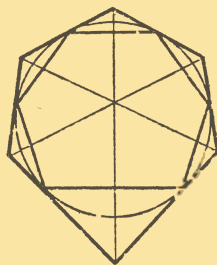


Ж. АДАМАР

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ
I

ПЛАНИМЕТРИЯ



У Ч П Е Д Г И З
1948

Акад. Ж. АДАМАР

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ПЛАНИМЕТРИЯ

ПЕРЕВОД С 11-го ИЗДАНИЯ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. Д. И. ПЕРЕПЁЛКИНА

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Издание третье

С ПРИЛОЖЕНИЕМ СОСТАВЛЕННЫХ
ПРОФ. Д. И. ПЕРЕПЁЛКИНЫМ
РЕШЕНИЙ ВСЕХ ПОМЕЩЁННЫХ В ТЕКСТЕ ЗАДАЧ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА ✱ 1948

*Утверждено
Министром просвещения РСФСР
к переизданию 3 октября 1947 г., протокол № 326*

Основой книги служит обыкновенный школьный курс геометрии на плоскости; однако содержание её выходит за рамки существующих программ. Это энциклопедия элементарной геометрии, стоящая на уровне современной науки и написанная выдающимся математиком. Существенным достоинством книги является наличие большого числа задач, многие из которых могут дать материал для творческой работы. В третьем издании книги помещены полные решения всех этих задач.

Редактор Т. Козьмина.

Техн. ред. М. Натапов.

Подписано к печати 30/IV 1948 г. А 04704. Печатных листов 38.
Учётно-издательских листов 44,14. Заказ № 7729.

Отпечатано в тип. Н-12 с матриц 1-ой Образцовой тип. треста
„Полиграфкнига“ Огиза при Совете Министров СССР.
Москва, Валуевая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ.

	<i>Стр</i>
Предисловие к третьему русскому изданию	13
Предисловия автора к первому, второму и восьмому изданиям	15

В в е д е н и е.

1. Тела, поверхности, линии, точки	19
1а. Геометрические места	19
2—2а. Математические предложения	19
3. Равные фигуры	20
4. Прямая линия	21
5. Отрезки, их сравнение	21
6. Плоскость	22
7. Окружность	22
8—8а. Дуги	23
9. Диаметр	24

КНИГА ПЕРВАЯ.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

Глава I. Углы.

10—11. Сравнение углов	26
12. Равенство вертикальных углов	27
13. Дуги и углы	27
14. Перпендикуляры. Через точку, лежащую на прямой, можно провести к этой прямой перпендикуляр и притом только один. Прямой угол	28
15. Сумма углов, образованных несколькими полупрямыми, выходящими из одной точки	29
15а. Биссектрисы четырёх углов, образованных двумя пересекающимися прямыми	29
16. Углы острые, тупые, дополнительные и попопнительные . .	30
17—18а. Измерение углов	30
19. Через точку, взятую вне прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один	33

19а.	Симметрия относительно прямой	33
20—20а.	Направление вращения	34
	<i>Упражнения 1—4.</i>	35

Глава II. Треугольники.

21.	Многоугольники вообще	36
22—22а.	Треугольники	37
23.	Свойства равнобедренного треугольника	37
24.	Признаки равенства треугольников	38
25.	Внешний угол треугольника. Во всяком треугольнике против большой стороны лежит больший угол, и обратно	39
26.	Прямолинейный отрезок короче любой ломаной линии, име- ющей с ним общие концы	40
27.	Объемлющие и объемлемые ломаные линии	41
28.	Если два треугольника имеют по неравному углу, заключён- ному между соответственно равными сторонами, то против большеего угла лежит и бо́льшая сторона	42
	<i>Упражнения 5—15.</i>	43

Глава III. Перпендикуляры и наклонные.

29—30.	Перпендикуляры и наклонные	44
31.	Расстояние точки от прямой	45
32—33.	Геометрическое место точек, одинаково удалённых от двух данных точек	45
	<i>Упражнения 16—18.</i>	47

Глава IV. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойство биссектрисы угла.

34—35.	Признаки равенства прямоугольных треугольников	47
36.	Свойство биссектрисы угла	48
	<i>Упражнения 19—20.</i>	49

Глава V. Параллельные прямые.

37.	Внутренние накрестлежащие, соответственные и внутренние односторонние углы	49
38.	Параллельные прямые	50
39.	Через точку, взятую вне прямой, можно провести прямую линию, параллельную этой прямой	51
40.	Через точку, взятую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой	51
41—42.	Теоремы, обратные предыдущим	51
43.	Углы с соответственно параллельными или перпендикуляр- ными сторонами	52

44. Сумма углов треугольника	53
44а. Сумма углов произвольного многоугольника	54
Упражнения 21—25.	54

Глава VI. Параллелограммы. Поступательные перемещения.

45—47. Параллелограммы	55
48. Ромб, прямоугольник	59
49. Квадрат	60
50—51. Поступательные перемещения	60
Упражнения 26—32.	61

Глава VII. Прямые в треугольнике, проходящие через одну точку.

52. Перпендикуляры, восстановленные в серединах сторон	62
53. Высоты	62
54. Биссектрисы	63
55—56. Медианы	63
Упражнения 33—38.	64
Задачи (39—46) к первой книге	65

КНИГА ВТОРАЯ.

ОКРУЖНОСТЬ.

Глава I. Пересечение прямой с окружностью.

57. Окружность определяется тремя точками	67
58. Пересечение прямой с окружностью; касательная к окружности	67
59. Общее определение касательной	68
60. Нормаль	69
60а. Угол между двумя окружностями	69
Упражнения 47—49.	69

Глава II. Диаметры и хорды.

61. Диаметр есть ось симметрии окружности	69
62. Хорда	70
63—64. Расстояние точки от окружности	70
65—66. Равные и неравные дуги и хорды	71
67. Касательная имеет с окружностью две общие точки, слившиеся между собой	72
Упражнения 50—54.	72

Глава III. Пересечение двух окружностей.

68—71. Исследование пересечения двух окружностей	73
72. Две окружности, касающиеся друг друга, имеют две общие точки, слившиеся между собой	75
Упражнения 55—59	76

Глава IV. Свойства вписанного угла.

73. Измерение вписанного угла	76
74. Измерение угла, образованного касательной и хордой, выходящей из точки касания	77
75—76. Угол, образованный двумя секущими	78
77—78. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом	79
79—82. Угловые свойства четырёхугольника, вписанного в круг . .	79
82а. Геометрическое место вершин равных и одинаково направленных углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность	81
Упражнения 60—72.	81

Глава V. Построения.

83—84. Геометрические построения. Геометрические инструменты .	82
85. Построения 1—3. Перпендикуляры к данной прямой. Биссектрисы	83
86—87а. Построения 4—9. Углы и треугольники	84
88. Построение 10. Прямая, проходящая через данную точку и параллельная данной прямой	87
89. Употребление угольника	87
90. Построения 11—14. Окружность	88
91—92. Построения 15—17. Касательная к окружности	89
93. Построение 18. Общие касательные к двум окружностям .	91
94. Построение 19. Окружности, касающиеся трёх данных прямых	93
Упражнения 73—91.	94

Глава VI. Перемещение фигур.

95. Равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения.	96
96—98. Поступательное перемещение, вращение	96
99. Симметрия относительно точки	98
100—101. Две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, могут быть получены одна из другой с помощью поступательного перемещения, сопровождаемого вращением. Угол между двумя фигурами	98
102. Две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, получаются одна из другой с помощью поступательного перемещения или с помощью вращения	99
102а—103. Другое доказательство (разложение перемещения на симметрии)	100
104. Мгновенный центр вращения	102
Упражнения 92—97	103
Задачи (98—123) ко второй книге	104

КНИГА ТРЕТЬЯ.

ПОДОБИЕ.

Глава I. Пропорциональные отрезки.

105—107.	О пропорциях вообще	107
108—110.	Деление отрезка	109
111—112.	Гармоническое деление	110
113.	Основная теорема	111
114.	Прямая, параллельная основанию треугольника	113
115.	Свойства биссектрисы	114
116.	Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно	115
	<i>Упражнения 124—128.</i>	116

Глава II. Подобие треугольников.

117.	Лемма	116
118—120.	Признаки подобия	117
121.	Отрезки, отсекаемые на параллельных прямых прямыми пучка	119
	<i>Упражнения 129—134.</i>	120

Глава III. Метрические соотношения в треугольнике.

122.	Проекция	121
123—125.	Прямоугольные треугольники. Теорема Пифагора	121
126—127.	Произвольные треугольники. Теорема Стюарта	122
128—130.	Вычисление длин замечательных линий треугольника	124
130а.	Радиус описанной окружности	126
	<i>Упражнения 135—147.</i>	127

Глава IV. Пропорциональные отрезки в круге.

Радикальная ось.

131—135.	Степень точки относительно окружности	128
136—138.	Радикальная ось	130
139.	Радикальный центр	132
	<i>Упражнения 148—154.</i>	132

Глава V. Гомотетия и подобие.

140.	Определение гомотетии	133
141—142.	Общие свойства	133
143.	Случай двух окружностей	135

144. Две фигуры, гомотетичные третьей, гомотетичны между собой	136
145. Оси подобия трёх окружностей	137
146—149. Подобие многоугольников	137
150. Точка, сама себе соответствующая	140
150а. Папотограф	141
Упражнения 155—162.	142

Глава VI. Построения.

151. Построения 1—2. Пропорциональные отрезки	143
152. Построения 3—3а. Подобные многоугольники	144
153—156. Построения 4—9. Среднее пропорциональное; отрезок $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; отрезки, определённые их суммой или разностью и их произведением; деление в среднем и крайнем отношении	144
157. Построение 10. Точки, расстояния которых от данных прямых имеют данные отношения	149
158. Построения 11—13. Общие касательные; радикальная ось; ортогональные окружности	150
159. Построения 14—15. Окружности, касающиеся данной прямой или данной окружности и проходящие через две данные точки	151
Упражнения 163—177.	152

Глава VII. Правильные многоугольники.

160—163. Определение правильных многоугольников и их существование	153
164. Звездчатые правильные многоугольники	155
165—170. Построение правильных многоугольников, вписанных в окружность; квадрат, шестиугольник, треугольник, десятиугольники, пятиугольники	156
171—175. Пятнадцатиугольники	160
176—178. Длина окружности. Отношение длины окружности к диаметру	164
179—179а. Длина дуги окружности	167
180—181. Вычисление π . Метод периметров	169
182—183. Вычисление π . Метод равных периметров	171
184. Результат вычислений	174
Упражнения 178—189.	175
Задачи (190—216) к третьей книге	176

ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

Глава I. Знаки отрезков.

185—187. Соглашение о знаках; основное тождество	178
188—189. Свойство гармонических точек	179

190—191. Приложение к гомотетии и к степени точки относительно окружности	181
<i>Упражнения 217—222.</i>	181

Глава II. Трансверсалн.

192—193. Теорема о трансверсальных. Обратная теорема	182
194—196. Приложения: середины диагоналей полного четырёхсторонника; гомологические треугольники; теорема Паскаля	184
197—198. Отрезки, отсекаемые на сторонах треугольника прямыми, выходящими из вершин треугольника и проходящими через одну точку	187
<i>Упражнения 223—231</i>	188

Глава III. Сложное отношение. Гармонические четвёрки прямых.

199. Сложное отношение	189
200. Основная теорема	189
201. Гармонические четвёрки прямых	190
202. Свойство полного четырёхсторонника	191
203. Поляра точки относительно угла	191
<i>Упражнения 232—236.</i>	192

Глава IV. Полюсы и поляры относительно окружности.

204. Определение поляры и её построение	193
205. Теорема о сопряжённых точках	194
206. Взаимно-полярные фигуры	195
207—208. Приложение к гомологическим треугольникам и к теореме Бриансона	195
209—210. Преобразование метрических свойств	196
211. Новое определение поляры и её построение	197
212. Сложное отношение точек, лежащих на окружности	198
213. Приложение к сопряжённым хордам	199
<i>Упражнения 237—241.</i>	199

Глава V. Взаимно обратные фигуры.

214—216. Определения. Окружность инверсии. Симметрия относительно прямой как предельный случай инверсии	200
217—218. Направление и длина отрезка, соединяющего точки, обратные двум данным точкам	201
219. Касательные к взаимно обратным кривым. Угол между кривыми, обратными данным	202
220. Фигура, обратная прямой линии	203
221. Фигура, обратная произвольной окружности	204
222. Взаимно обратные окружности	204

223—226. Антигомологические точки и хорды	205
227—228. Окружности, пересекающие две данные окружности под одним и тем же углом	206
<i>Упражнения 242—257.</i>	208

Глава VI. Задачи о касании окружностей.

229—231. Первое решение	209
232—236. Решение Жерюнна	211
<i>Упражнения 258—268.</i>	214

Глава VII. Свойства вписанного четырёхугольника.

Инверсор Поселье.

237—238. Теорема Птолемея. Случай точек, лежащих на одной прямой	215
239. Вычисление хорды дуги $a \pm b$ по заданным хордам дуг a и b .	217
240—240а. Отношение диагоналей вписанного четырёхугольника; вычисление этих диагоналей и радиуса описанной окружности . .	217
241. Инверсор Поселье	220
241а. Инверсор Гарта	221
<i>Упражнения 269—271а.</i>	222
Задачи (272—286) к дополнениям к третьей книге.	223

КНИГА ЧЕТВЁРТАЯ.

ПЛОЩАДИ.

Глава I. Измерение площадей.

242—246. Определения	225
247. Площадь прямоугольника	226
248. Площадь параллелограмма	228
249—251. Площадь треугольника	229
252—252а. Площадь произвольного многоугольника; площадь трапеции.	230
253—254. Площадь правильного многоугольника; площадь многоугольного сектора; площадь описанного многоугольника	230
255. Площадь вписанного четырёхугольника	231
<i>Упражнения 287—301.</i>	232

Глава II. Сравнение площадей.

256. Отношение площадей двух треугольников, имеющих по равному углу	233
257. Отношение площадей двух подобных многоугольников . . .	234
258. Квадрат гипотенузы	234
<i>Упражнения 302—311.</i>	235

Глава III. Площадь круга.

259—260. Определение площади круга	236
261—262. Формула для площади круга. Площадь кругового сектора	238
263. Площади фигур, ограниченных дугами круга	238
<i>Упражнения 312—318.</i>	239

Глава IV. Построения.

264—266. Равновеликие треугольники и многоугольники	239
267. Задача о квадратуре круга не разрешима с помощью циркуля и линейки	241
<i>Упражнения 319—323.</i>	241
Задачи (324—342) к четвертой книге.	241

ПРИБАВЛЕНИЯ.

Прибавление А. О методах, применяемых в геометрии	244
а) Теоремы, предлагаемые для доказательства	244
б) Геометрические места. Задачи на построение	251
с) Методы геометрических преобразований	254
Прибавление В. О постулате Эвклида	262
Прибавление С. Задача о касании окружностей	272
Прибавление D. О понятии площади	278
Прибавление Е. Задача Мальфатти	283
Смешанные задачи и задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах (343—422).	292

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ.

Составлены Д. И. Перепёлкиным.

Книга первая. Прямая линия.

Упражнения	307
Задачи	322

Книга вторая. Окружность.

Упражнения	327
Задачи	351

Книга третья. Подобие.

Упражнения	368
Задачи	393

Дополнения к третьей книге.

Упражнения	407
Задачи	448

Книга четвёртая. *Площади.*

Упражнения	458
Задачи	472

Смешанные задачи и задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах 488

Указатель содержания задач	608
--------------------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее—третье — издание перевода первой части „Элементарной геометрии“ Адамара существенно отличается от двух предыдущих тем, что в нём помещены решения всех имеющихся в первой части задач.

Несомненно, что самостоятельное решение этих, по большей части трудных, задач потребовало бы от читателя весьма большого количества времени и весьма значительных усилий. В то же время многие из этих задач представляют интерес не только как темы для упражнений, но и независимо от этого по самому их содержанию. Эти соображения и заставили нас приняться за составление решений задач, помещённых в курсе Адамара.

Содержание задач перепечатано здесь в основном без изменений. Исправлено, однако, несколько ошибок, вкравшихся в русский перевод (задачи 13, 49, 378, 406). Далее в процессе решения задач выявилась необходимость исправить отдельные погрешности или уточнить редакцию ряда задач, данную Адамаром (№№ 9, 10, 41, 88, 191, 222, 223, 256, 260, 270, 276, 284, 339, 347, 363, 372, 399, 400); в задачах 220, 253а, 265, 308 и 419а мы позволили себе опустить имевшиеся там указания на путь решения. Само собой разумеется, что автор этих строк принимает на себя ответственность за внесённые изменения.

Что касается характера и стиля приведённых нами решений, то, представляя судить о них читателю, ограничимся несколькими замечаниями. При выборе того или иного пути решения (если в нашем распоряжении имелось их несколько) мы стремились выбрать тот из них, который наиболее подходит к стилю Адамара, руководясь тем местом, где им помещена данная задача в книге, стилем изложения соответствующих вопросов в курсе, прямыми указаниями в тексте задачи на метод её решения, содержанием предшествующих ей и следующих за ней задач, и т. д. Мы помещали в книге два решения одной и той же задачи лишь в тех случаях, когда нам не удавалось сделать такого выбора, а также в тех немногих случаях, когда путь решения, намечаемый автором в самом тексте задачи, не представлялся нам наилучшим.

При изложении решения мы стремились оттенить наиболее ценные с нашей точки зрения логические моменты решения: значение тех или иных предположений, необходимость отдельных условий, доказательство правильности приведённого построения и т. п. Более трудные, но существенные моменты решения выделены нами в отдельные абзацы, набранные мелким шрифтом; они могут быть опущены читателем, не интересующимся этими более тонкими вопросами. Мы опускали или излагали весьма коротко те части решений, которые, по нашему мнению, легко могут быть развиты читателем: так, во многих задачах на построение опущено исследование и указано только (но избежание ошибок у читателя) наибольшее число решений, которое допускает задача; в доказательствах часто опускаются мотивы, по которым те или другие треугольники равны или подобны, прямые параллельны, и т. д. В особенности это относится к решениям более сложных задач.

Необходимо особо остановиться на задачах на отыскание наибольшего или наименьшего значения; таких задач в предлагаемой первой части имеется около 25. Дело в том, что в более трудных задачах такого рода

(№№ 366, 419а, 420) автор прямо рекомендует решать задачу, исходя из предположения, что существует фигура, для которой имеет место экстремум. Такой путь решения, более или менее естественный в ту эпоху, когда составлялась книга Адамара, мы считаем в настоящее время неприемлемым и в области элементарной геометрии. Поэтому во всех задачах на наибольшее и наименьшее значение нами даны такие решения, в которых существование экстремума не предполагается, а доказывается (за исключением задач 419а и 420, где мы ограничились соответствующим примечанием, так как подробный разбор изопериметрических свойств завёл бы нас слишком далеко).

Чтобы облегчить читателю ориентировку в содержании задач и помочь в подборе задач на ту или иную тему, мы поместили в конце книги небольшую «Указатель содержания задач». Заметим по этому поводу, что он далеко не исчерпывает и не может исчерпать всего содержания задач.

Мы отказались совершенно сознательно от помещения в решения задач тех или иных библиографических данных по нескольким причинам. Прежде всего известно, что именно в области элементарной геометрии одни и те же теоремы и задачи встречаются по нескольку раз у различных авторов в разное время независимо друг от друга, и потому помещение в книге библиографических данных исторического характера представляло бы слишком сложную задачу. Далее составителем, естественно, была просмотрена и использована большая литература. Однако и в тех случаях, когда идея решения была заимствована из литературы, приходилось иногда продельвать большую работу, чтобы придать решению вид, подходящий к стилю настоящей книги в целом. Во многих случаях составитель даже и не мог бы сказать сейчас с полной уверенностью, было ли данное решение найдено им самостоятельно или заимствовано из литературы. Наконец, библиографические указания принесли бы в данном случае небольшое пользы и читателю, желающему расширить свои познания, так как соответствующая литература (за исключением нескольких общеизвестных книг) разбросана и, как правило, мало доступна.

Рукопись настоящей книги была полностью прочитана доцентом Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина М. А. Юкиным: составитель обязан ему рядом ценных замечаний, устраняющих те или иные пробелы в решениях, выделяющих исключительные случаи, и т. д. Доц. Н. Т. Зерчинов и Е. Д. Загоскина, также ознакомившиеся с рукописью, поделились с составителем своими соображениями по поводу методической стороны в редакции решений ряда задач, особенно к первым главам книги. Идея решения задачи 121а была сообщена составителю И. А. Вильнером. Ряд ценных указаний автор получил также от рецензентов [проф. В. Н. Депутатова] и доц. С. И. Зетеля. Редактор издательства канд. наук Т. Л. Козьмина своим внимательным отношением к рукописи способствовала улучшению изложения ряда решений. Всем перечисленным товарищам составитель выражает здесь свою искреннюю признательность.

Принимая во внимание, что именно в решениях задач особенно легко можно осуществить дальнейшее улучшение путём указания более простых или более изящных решений, составитель обращается ко всем читателям с просьбой сообщать ему (по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз, редакция математики) свои замечания и предложения, за которые он будет весьма благодарен.

Москва, февраль, 1947.

Д. Переделкин.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

При составлении настоящего курса геометрии я всё время имел в виду то особое место, которое эта наука занимает в элементарной математике. В самом деле, будучи одним из первых математических предметов, с которым встречается учащийся, геометрия представляет собой наиболее простую и доступную форму математического рассуждения. Сила её методов и их плодотворность непосредственно более ощутимы, чем в случае относительно абстрактных арифметических и алгебраических теорий. Поэтому геометрия оказывается в состоянии оказывать бесспорное влияние на развитие активного мышления. Я в первую очередь стремился усилить это влияние, пробуждая инициативу учащегося и всячески ей содействуя.

Вот почему мне казалось необходимым увеличить число упражнений, насколько это позволяли рамки настоящего труда. Эта необходимость большого числа упражнений была для меня, так сказать, единственным принципом, руководившим мною в части подбора задач. Я считал необходимым поместить задачи различной степени трудности и притом в порядке возрастания этой трудности: в то время как упражнения, помещённые в конце каждой главы, в особенности первые из них, очень просты, упражнения, помещённые в конце каждой книги, уже не решаются так просто и непосредственно; наконец, я отнёс в конец тома относительно трудные задачи. Содержание некоторых задач заимствовано из тех или других важных теорий; отметим в частности задачи, относящиеся к теории инверсии и систем окружностей, многие из которых заимствованы из мемуара Дарбу: „*Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace*“¹⁾; другие задачи имеют единственной целью приучить мысль учащегося к проведению рассуждений. Столь же разнообразны были и те источники, из которых я заимствовал содержание упражнений: наряду с классическими задачами, представляющими собой наиболее непосредственное приложение теории, которые было бы почти странным не поместить в данной книге, имеются задачи, заимствованные у различных авторов и из различных периодических изданий как французских, так и иностранных, а также довольно большое число оригинальных задач.

С другой стороны, я поместил в конце тома особое Прибавление, в котором я имел в виду вкратце изложить основные идеи математических методов — идеи, которыми учащиеся должны были бы проникнуться с первого года обучения, но которые очень часто забываются даже учащимися наших высших учебных заведений. Следует признать, что та догматическая форма изложения, которую я здесь избрал, не является наиболее подходящей для данного случая: вопросы такого рода должны изучаться путём соответствующих бесед, причём каждое правило должно появляться лишь в тот момент, когда в нём возникает надобность. Я всё же счёл себя обязанным сделать попытку такого рода изложения, надеясь, что читатель отнесётся снисходительно к её неизбежному несовершенству. Быть может

¹⁾ Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (2), 1, 1872. — Содержание задачи 401 (построение окружностей, касательных к трём данным) сообщено мне преподавателем лицея имени Ампера Жераром (Gérard).

эта попытка, какова бы она ни была, принесёт некоторую пользу и будет содействовать внедрению в преподавание тех идей, о важности которых нет надобности распространяться.

Другие прибавления, помещённые в конце тома, носят более специальный характер. В Прибавлении *B* рассмотрен вопрос о постулате Эвклида. Взгляды современных геометров на этот вопрос приняли настолько ясную и определённую форму, что представляется необходимым и полезным дать их краткое изложение даже в курсе, носящем элементарный характер.

Прибавление *C* относится к задаче о касании окружностей. Как было отмечено Кёнигсом¹⁾, известное решение Жергонна, если даже его дополнить соответствующим доказательством, отсутствующим у его автора, всё же обладает некоторым недостатком. Этот пробел я и имел в виду восполнить.

Наконец, Прибавление *D* посвящено понятию площади. Обычное учение о площадях обладает, как известно, серьёзным логическим недостатком. Оно а priori предполагает, что эта величина определена и обладает известными основными свойствами. Теория, которую я излагаю в данном Прибавлении, обходится без этого предположения и потому заслуживает предпочтения, особенно если учесть, что она переносится без значительных изменений и на пространство.

В самом тексте книги оказалось возможным внести в классические рассуждения некоторые изменения, представляющие преимущества либо с точки зрения строгости, либо с точки зрения простоты; к их числу принадлежит, например, помещённое в самом начале первой книги доказательство существования перпендикуляра, восстановленного к прямой линии в какой-либо из её точек; соображения, основанные на непрерывности, которыми здесь обычно пользуются, пришлось оставить, поскольку в другом месте мы допускаем без доказательства возможность разделить отрезок или угол пополам. Рассмотрение направления углов позволило мне внести в предложение второй книги, а также в ряд предложений последующих книг полную чёткость и общность без того, чтобы сделать их менее простыми или менее элементарными.

В дополнениях к третьей книге изложены те вопросы, которые хотя и не относятся к элементам геометрии в смысле Эвклида, тем не менее завоевали определённое место в преподавании. Я ограничился изложением элементов соответствующих теорий и последовательно опускал всё то, что не является действительно существенным. Впрочем, курс составлен таким образом, что эти дополнения, а также те разделы текста, которые напечатаны мелким шрифтом, могут быть опущены при первом чтении без нарушения связности остальной части текста.

Проф. Дарбу, который оказал мне большую честь, поручив составление настоящего курса, чрезвычайно облегчил мою задачу теми ценными советами, которые он постоянно давал мне при его составлении. Заканчивая настоящее предисловие, я хотел бы выразить ему здесь свою почтительную признательность.

Ж. Адамар.

1) „Leçons de l'agrégation classique de Mathématiques“, Paris, 1892, стр. 92.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

За время, истёкшее с момента выхода в свет первого издания, обучение математике и в частности геометрии претерпело глубокие изменения не только в отдельных деталях, но и в самом своём характере, изменения, которых давно ждали и которых все добивались. В основу обучения математике, в начальной его стадии, стремятся положить соображения практического и наглядного характера вместо логического метода Эвклида, пользу которого начинающие не в состоянии оценить.

Напротив, к эвклидовскому методу приходится, конечно, возвращаться, когда речь идёт о пересмотре и о пополнении первоначальных сведений. Наш курс и соответствует этой именно второй стадии обучения, и потому нам не пришлось менять его характера.

Однако даже с точки зрения строгой логики классическое изложение обладало ненужной сложностью и схоластичностью в его первой главе, посвящённой учению об углах. Условие не пользоваться в первой книге понятием окружности, оставшееся неприкосновенным до настоящего времени, чрезвычайно затемняло здесь вещи, сами по себе очень простые и естественные. Изложение этих вопросов оказалось возможным значительно упростить, вводя с самого начала наряду с понятием об угле и понятие о дуге окружности. Мы уже раньше отказались здесь от традиционного использования непрерывности, на которой обычно основывали существование перпендикуляра; теперь оказался излишним и тот простой искусственный приём, которым мы раньше заменили соображения, основанные на непрерывности.

В то же время измерение центральных углов оказывается при этом естественным образом сближенным с учением об углах и занимает своё настоящее логическое место в курсе.

Не меньше выигрывает от этой перестановки и вторая книга. В самом деле, основное свойство вписанного угла отделяется при этом от вопроса об измерении углов, а прежде связь этих двух вопросов могло дать самое неправильное представление об этом свойстве вписанного угла и об его значении.

За исключением этого пункта план курса в целом остался неизменным. С другой стороны, те дополнения, которые были внесены в программу 1902 г., уже раньше нашли себе место в первом издании курса. Программа 1905 г., которая скорее снизила роль этих дополнений, тем самым не потребовала от нас никаких существенных изменений. Она содержит только одно добавление — инверсор Поселье. Единственная дополнительная глава, которая остаётся в программе, по крайней мере в области геометрии на плоскости¹⁾, — инверсия и её приложения — соответствует главам V—VII наших дополнений.

¹⁾ Надо ли говорить по этому поводу, что я вовсе не стремился к слиянию геометрии на плоскости с геометрией в пространстве. Я охотно признаю, что такое слияние заслуживает предпочтения с точки зрения чисто логической. Однако с точки зрения педагогической следует стремиться, мне кажется, к разделению встречающихся трудностей. Умение видеть в пространстве само по себе представляет собою серьёзную трудность, и я не думаю, чтобы эту трудность следовало присоединить к другим трудностям с самого начала обучения.

За последние годы в преподавательской среде наметилась и другая тенденция, которой нельзя не одобрить. Теперь очень часто говорят об эвристическом методе, и я надеюсь, что кое-где его применяют на практике. Прибавление, которое я поместил в первом издании настоящего курса (Прибавление А), как раз и имело своей целью показать, как следует понимать этот метод, столь существенный с моей точки зрения, по крайней мере, как его следует понимать с точки зрения теоретической, так как для его применения на практике необходимо наличие двух лиц. Мне хотелось бы, чтобы это Прибавление могло принести теперь некоторую пользу, указывая по крайней мере те принципы, которые следует применять в этом случае.

Я уже указывал (см. предисловие к геометрии в пространстве), что изложенный в Прибавлении С метод решения задачи о касании окружностей в действительности принадлежит Ф у ш е (Fouché) или даже П о н с е л е (Poncelet) и что Ж е р а р у (Gérard) принадлежит решение вопроса о площади плоской фигуры, правда отличное от того, которое я дал в Прибавлении D. Пользуясь случаем отметить, что Ф о н т е н е (Fontené) было высказано одно возражение, касающееся теории двугранных углов, и им же оно было устранено.

Ж. Адамар.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее издание не представляет, по сравнению с предыдущими, существенных изменений. Однако следует отметить, что наши взгляды на постулат Эвклида существенно изменились в связи с успехами физики: я должен был изменить конец Прибавления В (пп. 308, 308а), чтобы принять во внимание эту эволюцию научной мысли.

Некоторые изменения были также внесены в настоящее издание с целью уделить большее внимание свойствам наиболее простых шарнирных систем.

Ж. Адамар.

ВВЕДЕНИЕ.

1 *Телом* называется часть пространства, ограниченная со всех сторон.

Поверхностью называется общая часть двух смежных областей пространства. Лист бумаги может дать нам приблизительное представление о поверхности. В самом деле, он ограничивает две области пространства, которые расположены по обе стороны от листа. Но лист бумаги не будет, строго говоря, поверхностью: эти две области разделяются целой промежуточной областью, так как лист бумаги имеет толщину. Мы пришли бы к понятию поверхности, рассматривая лист бумаги, толщина которого бесконечно уменьшается.

Линией называется общая часть двух смежных областей поверхности. Это определение, очевидно, эквивалентно такому определению: *линия есть пересечение двух поверхностей.*

Линии, которые мы проводим, дают нам представление о геометрических линиях и притом неточное представление, так как, как бы они тонки ни были, они всегда имеют толщину, в то время как геометрические линии толщины не имеют.

Наконец, *точкой* называется то общее, что имеют две смежные части одной линии, или, иначе, пересечение двух встречающихся линий. Точка не имеет никакого измерения.

Любая совокупность точек, линий, поверхностей и тел называется *фигурой*.

1а. Всякая линия содержит бесчисленное множество точек.

Её можно рассматривать как след перемещающейся по ней точки. Это имеет место, когда мы проводим линию на бумаге остриём карандаша или пера (получающиеся при этом точки мы уподобляем геометрическим точкам, когда они достаточно тонки). Точно так же поверхность может быть образована перемещающейся линией.

Фигура, вообще говоря линия или поверхность, образованная совокупностью бесчисленного множества положений, которые может занимать некоторая точка, называется *геометрическим местом точек*.

Точно так же мы можем рассматривать поверхность как геометрическое место линии, которая перемещается.

2. Геометрия изучает свойства фигур и их взаимоотношения. Результаты этого изучения формулируются в виде *предложений*.

Предложение состоит из двух частей: первая, называемая коротко *условием*, указывает на совокупность всех имеющихся налицо условий;

вторая — *заключение* — выражает тот факт, который в силу этих условий неизбежно имеет место.

Так, в следующем предложении: *„Два количества A и B , равные одному и тому же третьему C , равны между собой“*, условием является следующая часть предложения: *количества A и B порознь равны C* ; заключением — *эти два количества A и B между собою равны*.

Среди предложений имеются такие, которые принимаются как очевидные без доказательства. Их называют *аксиомами*. Таким, например, является предложение, которое было приведено выше: *„Две величины, равные третьей, равны между собой“*. Все другие предложения называются *теоремами* и должны быть доказаны при помощи особого рассуждения. Чтобы провести это рассуждение, надо, основываясь на условии теоремы и предполагая, *что это условие выполнено*, вывести из него факты, указанные в заключении.

Согласно с этим мы должны допустить, что некоторое обстоятельство имеет место:

- 1) если оно является частью условия;
- 2) если оно является частью определения одного из элементов, о которых идёт речь¹⁾;
- 3) если оно вытекает из аксиомы;
- 4) если оно вытекает из одного из предыдущих доказательств.

В геометрических рассуждениях ни одно положение не должно считаться верным иначе, как в силу одной из этих четырёх причин.

2а. Предложением, *обратным* данному предложению, называется другое предложение, в котором заключение полностью или частично совпадает с условием первого предложения, и обратно.

Следствием называется предложение, непосредственно вытекающее из теоремы.

Леммой называется, напротив, подготовительное предложение, вводимое для того, чтобы облегчить доказательство последующего предложения.

3. Всякая фигура может быть перемещена в пространстве бесчисленным множеством способов без изменения своего вида совершенно так же, как это может быть сделано с обыкновенными твёрдыми телами. *Равными фигурами* называются такие две фигуры, которые можно совместить одну с другой так, чтобы они в точности совпадали во всех своих частях; одним словом, две равные фигуры представляют собою одну и ту же фигуру, расположенную в двух различных местах.

Фигура, которая подвергается только перемещениям и при этом не деформируется, называется *неизменяемой* фигурой.

¹⁾ Часто случается, что в процессе доказательства вводят в фигуру вспомогательные элементы. Некоторое положение может быть при этом верным в силу определения этих новых элементов. В таком случае говорят, что оно верно *по построению*.

4. Простейшая из линий — *прямая линия*; представление о ней даёт нам натянутая нить. Понятие прямой линии очевидно само по себе; чтобы иметь возможность пользоваться этим понятием в наших рассуждениях, будем рассматривать прямую линию, как определяемую её очевидными свойствами и в частности следующими двумя:

1°. *Всякая фигура, равная прямой линии, есть прямая линия*; и обратно, *каждая бесконечная прямая линия может быть совмещена со всякой другой и притом таким образом, что какая-либо одна точка первой совмещается с любой точкой второй*.

2°. *Через две точки можно провести прямую линию и притом только одну*.

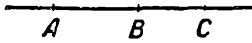
Таким образом, можно говорить о *той* прямой линии, которая проходит через точки A и B (или короче: о прямой AB).

Из определения непосредственно вытекает, что *две различные прямые могут встретиться только в одной точке*, потому что, если бы они имели две общие точки, они не были бы различными.

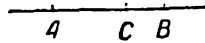
Ломаной линией называется линия, состоящая из частей прямых линий. Другие линии, которые не являются ни прямыми, ни ломаными, называются *кривыми линиями*.

5. Часть прямой линии, заключающаяся между двумя точками A и B , называется *отрезком* прямой AB .

Можно также рассматривать часть прямой, не ограниченную с одной стороны и ограниченную с другой стороны точкой. Такая часть называется *полупрямой*. Две произвольные полупрямые являются на основании предыдущего равными фигурами.



Черт. 1.



Черт. 2.

Отрезок AB называется *равным* отрезку $A'B'$, если первый отрезок можно наложить на второй отрезок таким образом, чтобы точка A совпала бы с точкой A' и точка B — с точкой B' .

При этих условиях два отрезка совпадут во всех своих точках на основании двух предложений, которые служат определением прямой линии. Следовательно, определение равных отрезков вполне согласуется с данным выше общим определением равных фигур.

Совмещение двух равных отрезков AB и $A'B'$ может быть осуществлено двумя различными способами, а именно: точка A может совпасть с точкой A' и точка B — с B' , или обратно. Это равносильно тому, что отрезок AB можно повернуть таким образом, чтобы после поворота каждая из двух точек A, B заняла бы место другой из этих точек.

Если два отрезка AB и BC расположены на одной и той же прямой линии и представляют собой продолжение один другого (черт. 1), то отрезок AC называется *суммой* двух первых отрезков. Сумма двух,

а следовательно, и нескольких отрезков не зависит от порядка слгаемых частей¹⁾.

Чтобы сравнить два отрезка, их переносят на одну и ту же прямую линию так, чтобы они выходили из одной и той же точки и были направлены в одну и ту же сторону, например AB и AC (черт. 1 и 2). Если при этом точки следуют в порядке A, B, C (черт. 1), то отрезок AC равен сумме AB и другого отрезка BC ; в этом случае он *больше*, чем AB , а этот последний *меньше*, чем AC ; если, напротив, порядок следующий: A, C, B (черт. 2), то отрезок AB больше AC . В обоих случаях третий отрезок BC , который при сложении с одним из двух данных отрезков даёт второй, называется *разностью* этих двух отрезков. Наконец, точки B и C могут совпасть. В этом случае, как мы знаем, данные отрезки равны.

На каждом отрезке прямой AB существует точка M — *середина* AB , одинаково удалённая от A и B ; всякая точка прямой, лежащая между M и A , очевидно, ближе к A , чем к B , и обратное имеет место для всякой точки, расположенной между M и B .

Вообще отрезок прямой AB может быть разделён на какое угодно число равных между собой частей²⁾.

6. *Плоскостью* называется такая безграничная поверхность, что всякая прямая, соединяющая две её точки, лежит на ней целиком.

Мы допускаем, что *через всякие три точки пространства проходит плоскость*. Прямая линия, проведённая на плоскости, делит её на две области, каждая из которых расположена по одну сторону от прямой линии и называется *полуплоскостью*. Нельзя перейти из одной области в другую по непрерывному пути, не выходя из плоскости и не пересекая прямой линии. Эти две области можно совместить одну с другой, заставляя одну из них вращаться около данной прямой линии, как около оси.

Мы будем заниматься прежде всего фигурами, расположенными на плоскости; изучение их составляет предмет *плоской геометрии* (планиметрии).

7. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки этой плоскости³⁾ (O , черт. 3); эта точка называется *центром окружности*.

1) Для двух отрезков это следует непосредственно из предыдущего абзаца.

2) Мы понимаем под этим, что на AB существуют точки, которые делят этот отрезок на равные части. Вопрос о том, можно ли найти эти точки фактически с помощью имеющихся у нас инструментов, будет рассмотрен нами позднее (книга III).

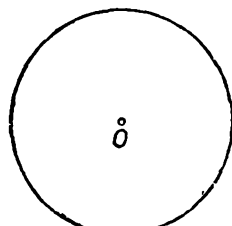
3) Геометрическое место точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки, лежащей *вне плоскости*, равным образом есть окружность (если такие точки вообще существуют); это мы докажем в геометрии пространства.

Геометрическое место точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки пространства, представляет некоторую поверхность — *сферу*.

Отрезок прямой линии, который соединяет центр с какой-нибудь точкой окружности, называется *радиусом*. Следовательно, все радиусы между собою равны. Это имеет место для спиц колеса, так как оно имеет форму окружности.

На основании предыдущего определения, чтобы доказать, что точка плоскости лежит на окружности, расположенной в этой плоскости, достаточно показать, что её расстояние до центра равно радиусу.

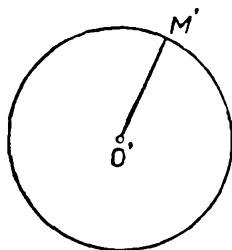
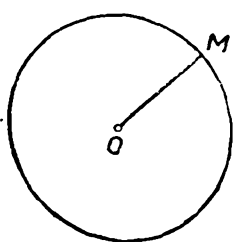
Всякая окружность делит плоскость, в которой она лежит, на две области: одну *внешнюю*, безграничную, образуемую точками, расстояния которых до центра больше радиуса; другую — *внутреннюю*, ограниченную со всех сторон, образованную такими точками, расстояния которых до центра меньше радиуса. Эта последняя область называется *кругом*.



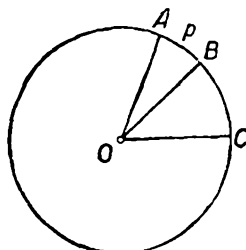
Черт. 3.

Ясно, что окружность вполне определена, когда даны плоскость, в которой она лежит, её центр и радиус.

Окружность часто обозначают (когда это не может дать повода к недоразумениям) той же буквой, как её центр, или двумя буквами, которые обозначают один из её радиусов, причём на первом месте ставят ту, которая обозначает центр. Таким образом, окружность, представленная на чертеже 4, обозначается через O или (если приходится рассматривать несколько окружностей с центром в O) через OM .



Черт. 4.



Черт. 5.

Две окружности одного радиуса представляют собою равные фигуры; ясно, что они совмещаются, коль скоро мы совместим их центры.

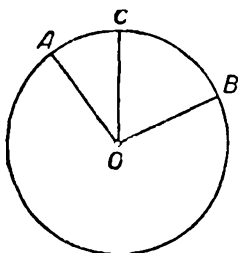
Две равные окружности могут быть наложены друг на друга *бесчисленным множеством способов*: их можно наложить одну на другую так, чтобы некоторая точка M' второй окружности совместились бы с данной точкой M первой окружности (черт. 4). Для этого достаточно совместить два радиуса OM и $O'M'$, что возможно, так как эти два прямолинейных отрезка равны.

8. *Дугой* называется часть окружности (APB , черт. 5).

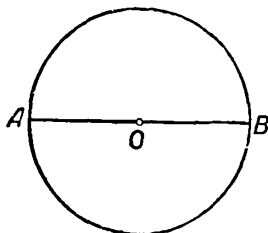
Из того обстоятельства, что две равные окружности могут быть наложены друг на друга бесчисленным множеством способов, следует

возможность сравнивать дуги, принадлежащие *одной и той же окружности или двум равным окружностям*, так же, как мы сравниваем отрезки прямой. Для этого перенесём эти две дуги таким образом, чтобы они имели один и тот же центр, один общий конец и были расположены по одну сторону от этого общего конца. Пусть AB и AC — две дуги, расположенные таким образом; мы скажем, что первая *больше* второй, если, перемещаясь из точки A по дуге AB^1 , мы встречаем точку C раньше точки B (черт. 6). Мы скажем, что первая дуга *меньше* второй, если порядок будет обратный: A, B, C (черт. 5).

8а. Точно так же можно определить *сумму* двух дуг AB, BC (черт. 5), принадлежащих одной и той же окружности (или двум рав-



Черт. 6.



Черт. 7.

ным окружностям), располагая эти две дуги так, чтобы конец одной совпал с концом другой и дуги были направлены в разные стороны от их общего конца.

Дуга AB может быть, так же как отрезок прямой, разделена на две или несколько равных частей²⁾. Она делится своей средней точкой на две дуги, из которых одна состоит из точек M , таких, что дуга AM больше, чем дуга MB , другая — из таких точек, что дуга AM меньше, чем дуга MB .

9. Две точки окружности называются *диаметрально противоположными* (A, B , черт. 7), если отрезок, который их соединяет, проходит через центр. Этот отрезок называется *диаметром*. Ясно, что длина диаметра равна удвоенной длине радиуса.

Окружность, очевидно, определена, коль скоро дан один из её диаметров. В таком случае её центром будет середина диаметра.

¹⁾ Здесь очень важно точно определить направление, в котором происходят перемещения (что было не нужно в случае прямой), потому что точки A, B делят окружность на две дуги, и порядок, в котором мы встретим точки B, C , не будет одним и тем же, если мы будем перемещаться из точки A по той или другой из этих дуг.

²⁾ То же замечание, которое ранее сделано (стр. 22, сноска 2) для отрезков прямой.

Диаметр AB делит окружность на две дуги, которые представляют собой части окружности, расположенные соответственно в двух полуплоскостях, определяемых прямой AB .

Эти две части *равны* между собой: их можно совместить, наложив полуплоскости, о которых идёт речь, одну на другую (п. 6). Мы имеем, таким образом, две *полуокружности*.

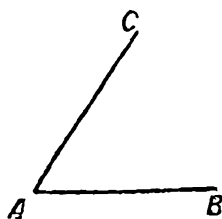
Точно так же круг делится диаметром на две равные части, которые совмещаются друг с другом при совмещении двух полуокружностей.

ГЛАВА I.

УГЛЫ.

10. Углом называется фигура, образованная двумя полупрямыми, выходящими из одной и той же точки. Эта точка называется *вершиной* угла, а две полупрямые — его *сторонами*.

Угол обозначается той же буквой, что и его вершина, помещённой между двумя другими буквами, которые служат для обозначения его сторон: перед буквами часто ставится специальный знак. Если, впрочем, фигура содержит только один угол, имеющий данную вершину, то буква, обозначающая эту вершину, будет вполне достаточна для обозначения угла. Так, угол, образованный полупрямыми AB , AC (черт. 8), будет обозначаться: $\angle BAC$, или проще $\angle A$.



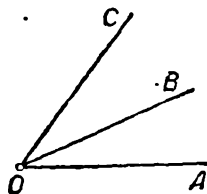
Черт. 8.

Два угла называются *равными* по определению равных фигур (п. 3), если их можно привести в совпадение, накладывая один на другой.

Два равных угла $\angle BAC$ и $\angle B'A'C'$ могут быть наложены один на другой двумя различными способами, а именно: или так, что сторона $A'B'$ совпадает со стороной AB и $A'C'$ со стороной AC , или наоборот. От одного способа совмещения можно перейти к другому, перевёртывая один из углов и накладывая его на самого себя, например, перемещая угол BAC так, чтобы сторона AB приняла положение, ранее занимаемое AC , и обратно.

11. Два угла называются *прилежащими* друг к другу, если они имеют общую вершину, одну общую сторону и расположены по разные стороны от этой общей стороны.

Если два угла $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — прилежащие (черт. 9), то угол AOC называется *суммой* этих двух углов. Сумма нескольких углов не зависит от порядка слагаемых.



Черт. 9.

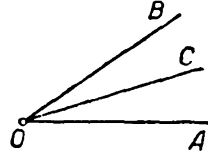
Чтобы сравнить два угла, их перемещают таким образом, чтобы они имели общую вершину, одну общую сторону и чтобы они были расположены по одну сторону от их общей стороны.

Пусть даны два угла $\angle AOB$ и $\angle AOC$, расположенные таким образом. Если при вращении вокруг точки O мы встретим стороны

в порядке OA , OB , OC (черт. 9), то угол AOC равен сумме углов AOB и BOC ; в этом случае говорят, что он *больше* угла AOB , а этот последний *меньше* угла AOC ; если, напротив (черт. 10), порядок таков: OA , OC , OB , то угол AOB больше угла AOC . Угол BOC , от прибавления которого к одному из двух данных углов получается другой угол, есть *разность* этих двух углов.

Наконец, в случае промежуточном, когда OB совпадает с OC , оба угла равны (см. предыдущий пункт).

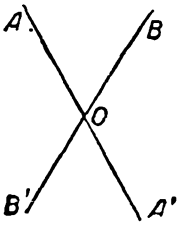
Внутри всякого угла BAC существует полупрямая AM , которая делит этот угол на две равные части. Она называется *биссектрисой* угла. Полупрямые, выходящие из A и расположенные внутри угла BAM , образуют с AB угол меньший, чем с AC ; обратное имеет место для полупрямых, расположенных внутри угла MAC .



Черт. 10.

Некоторый угол называется *удвоенным*, *утроенным* и т. д. углом по отношению к данному углу, если он представляет собою сумму двух, трёх и т. д. углов, равных этому углу. Этот последний называется при этом *половиной*, *третью* и т. д. первого.

Примечание. Очевидно, *величина угла не зависит от величины его сторон*, которые мы должны всегда предполагать неограниченно продолженными.



Черт. 11.

12. Если мы имеем угол, образованный двумя полупрямыми OA и OB (черт. 11) и если продолжить OA за точку O , проведя OA' , и то же самое сделать с OB , проведя OB' , то образуется новый угол $A'OB'$.

Вертикальными углами называются два угла, $\angle AOB$, $\angle A'OB'$, таких, что стороны одного являются продолжениями сторон другого.

Теорема. Два вертикальных угла равны между собой.

В самом деле, проверим угол BOA' и наложим его на самого себя (черт. 11). Сторона OB займёт положение OA' , и, с другой стороны, сторона OA' займёт первоначальное положение стороны OB ; полупрямая OA , как продолжение OA' , пойдёт по OB' , как по продолжению OB . Угол AOB займёт тогда положение угла $A'OB'$; следовательно, эти два угла равны.

13. Всякая полупрямая, выходящая из центра окружности, пересекает эту окружность в одной и только в одной точке.

Всякий угол AOB (черт. 5), имеющий вершину в центре O окружности (*центральный угол*), определяет на этой последней дугу AB , ограниченную точками пересечения окружности со сторонами угла. Эта дуга во всяком случае меньше, чем полуокружность, как в этом можно убедиться, принимая за концы полуокружности точку A и точку, ей диаметрально противоположную.

Обратно, всякую дугу, меньшую полуокружности, можно рассматри-

вать как отсекаемую центральным углом; этот угол образован радиусами, проведёнными в концы данной дуги.

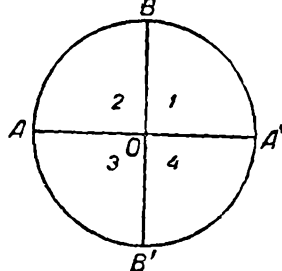
Теорема. На одной и той же окружности или на равных окружностях:

1) равным дугам (меньшим полуокружности) соответствуют равные центральные углы, и обратно;

2) неравным дугам (меньшим полуокружности) соответствуют неравные центральные углы, и большей дуге соответствует больший центральный угол;

3) если некоторая дуга (меньшая полуокружности) есть сумма двух других дуг, то и соответствующий ей центральный угол будет суммой центральных углов, соответствующих двум другим дугам.

1°. 2°. Пусть AB , AC (черт. 5) — две дуги одной и той же окружности, выходящие из одной точки A в одном и том же направлении (п. 8). Два центральных угла $\angle AOB$, $\angle AOC$ будут при этом расположены так, как это было сказано в п. 11. Полупрямые OA , OB , OC следуют в том же порядке, как точки A , B , C на окружности. Кроме того, если прямые OB и OC совпадают, то это же имеет место для точек B и C , и обратно.



Черт. 12.

3°. Так как для построения суммы двух дуг (п. 8а) эти дуги располагают так, как расположены дуги AB , BC (черт. 5), то центральный угол $\angle AOC$, соответствующий сумме дуг, будет суммой двух центральных углов

$\angle AOB$ и $\angle BOC$, которые будут прилежащими друг к другу.

На этом основании, чтобы сравнить различные углы, можно из их вершин, как из центров, описать окружности одним и тем же раз навсегда выбранным радиусом и сравнить дуги, отсекаемые на этих окружностях.

Деление угла на две или больше равные между собой части сводится к делению на равные части дуги, отсекаемой сторонами угла на окружности, имеющей центр в вершине угла.

14. Говорят, что две прямые *взаимно перпендикулярны*, если из четырёх углов, которые они образуют, два угла, прилежащих друг к другу, равны между собой. Например, прямая AOA' (черт. 12) перпендикулярна к прямой BOB' , если углы, обозначенные на чертеже номерами 1 и 2, между собой равны. В этом случае все четыре угла при точке O будут между собою равны, потому что $\angle 3$ и $\angle 4$ (черт. 12) соответственно равны $\angle 1$ и $\angle 2$ как вертикальные.

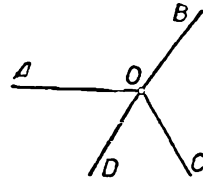
Угол, стороны которого перпендикулярны между собой, называется *прямым*.

Теорема. В данной плоскости через точку, взятую на прямой, можно провести к этой прямой перпендикуляр и притом только один.

Пусть через точку O требуется провести перпендикуляр к данной прямой, проходящей через эту точку. Достаточно провести из точки O , как из центра, окружность, которая пересечёт данную прямую в точках A и A' (черт. 12), и разделить на две равные части точкой B полуокружность ABA' . OB будет искомым перпендикуляром; и обратно, перпендикуляр к AA' , проходящий через точку O , должен делить на две равные части полуокружность ABA' .

Следствие. Мы видим, что *прямой угол отсекает на окружности, имеющей центр в вершине угла, дугу, равную четверти этой окружности.*

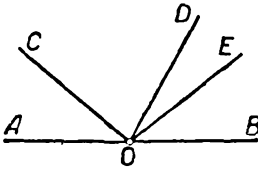
Все прямые углы равны между собой, так как на равных окружностях, имеющих центры в вершине каждого из них, они отсекают равные дуги.



Черт. 13.

15. Если через одну точку провести несколько полупрямых, то сумма всех последовательных углов ($\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$, черт. 13), образованных таким образом около этой точки, равна четырём прямым.

Действительно, сумма дуг, отсекаемых этими углами на окружности, имеющей своим центром данную точку, равна полной окружности.



Черт. 14.

Если через точку, лежащую на прямой, провести по одну сторону от этой прямой несколько полупрямых (черт. 14), то сумма образованных таким образом углов равна двум прямым, так как сумма дуг, отсекаемых этими углами, равна полуокружности.

Обратно, если два или несколько углов при одной и той же вершине, из которых каждый является прилежащим к предыдущему ($\angle AOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOB$, черт. 14), составляют в сумме два прямых, то крайние стороны этих углов лежат на одной прямой линии.

В самом деле, эти крайние стороны пересекают окружность, имеющую центр в общей вершине углов, в двух диаметрально противоположных точках, так как дуга, заключённая между ними, составляет полуокружность.

15а. Теорема. Биссектрисы четырёх углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, образуют две бесконечные прямые, перпендикулярные между собой.

Пусть AA' и BB' (черт. 15) — две прямые, которые пересекаются в точке O и образуют углы AOB , BOA' , $A'OB'$, $B'OA$, биссектрисами которых служат Om , On , Om' , On' ; я утверждаю:

1) что Om и Om' являются продолжениями одна другой, так же как On и On' ;

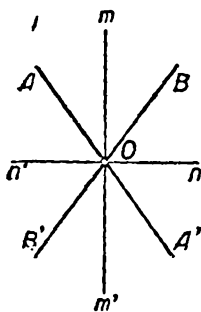
2) что полученные таким образом две прямые взаимно перпендикулярны.

Прежде всего Om перпендикулярна к On , так как два угла $\angle AOB$ и $\angle BOA'$ в сумме составляют два прямых, а потому их половины — $\angle mOB$ и $\angle BOm$, — дают в сумме один прямой. Но, применяя то же самое рассуждение к углам BOA' и $A'OB'$, мы видим, что прямая Om' перпендикулярна к On . Следовательно, Om' является продолжением Om ; и точно так же On' есть продолжение On .

16. *Острым* углом называется угол, меньший прямого; *тупым* — угол, больший прямого.

Два угла называются *дополнительными*, если их сумма равна прямому углу, и *пополнительными*, если их сумма равна двум прямым.

17. *Отношением* двух величин одного и того же рода называется число, которое показывает, сколько раз одна величина содержит другую величину или какую-либо p -ую часть другой величины (p — целое), и какую именно.



Черт. 15.

Например, если, разделив AB на 5 равных частей, мы увидим, что одна из этих частей ровно три раза содержится в отрезке BC , то мы скажем, что отношение BC к AB равно $\frac{3}{5}$.

Если же, напротив, пятая часть отрезка AB не содержится целое число раз в отрезке BC , например, если она в этом отрезке содержится больше чем 3 раза и меньше чем 4 раза, то $\frac{3}{5}$ будет

приближенным значением отношения $\frac{BC}{AB}$, причём это будет значение, взятое с точностью до $\frac{1}{5}$ по недостатку (значение с точностью до $\frac{1}{5}$, взятое по избытку, будет $\frac{4}{5}$).

Отношение этих двух величин a и b одного рода равно отношению двух других величин a' , b' одного рода (но не обязательно того же рода, как первые), если, каково бы ни было n , значение первого отношения, взятое с точностью до $\frac{1}{n}$, равно значению второго отношения, взятому с точностью до $\frac{1}{n}$.

Мера данной величины по отношению к определённой величине такого же рода, принятой за единицу, есть отношение данной величины к этой единице.

Можно доказать следующие свойства:

1°. Две величины, имеющие одну и ту же меру по отношению к одной и той же единице, равны.

2°. Отношение двух величин одного и того же рода равно отношению чисел, служащих их мерой по отношению к одной и той же единице.

3°. Отношение двух чисел равно частному этих двух чисел.

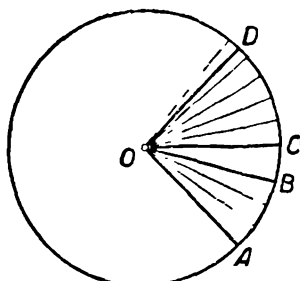
Теорема. В одной окружности или равных окружностях отношение двух центральных углов равно отношению двух дуг, которые заключены между их сторонами.

Пусть ¹⁾ даны (черт. 16) две дуги AB и CD окружности O . Разделим центральный угол AOB , например, на три равные части и предположим, что одна из этих частей содержится в угле COD больше

чем 4 раза, но меньше чем 5 раз; тогда с точностью до $\frac{1}{3}$ величина отношения $\frac{\angle COD}{\angle AOB}$ есть $\frac{4}{3}$.

Но, деля угол AOB на три равные части, мы в то же время разделили дугу AB на три равные части (п. 13). Если бы треть угла AOB могла уложиться 4 раза, но не 5 раз в угле COD , то это показывало бы, что треть дуги AB могла бы уложиться в дуге CD 4 раза, но не 5 раз.

Значения двух отношений, измеренные с точностью до $\frac{1}{3}$, равны; совершенно так же равны между собою значения двух отношений, взятые с точностью до $\frac{1}{n}$ для любого значения n ; теорема, таким образом, доказана.



Черт. 16.

Следствие. Если принять за единицу угла центральный угол, который заключает между сторонами дугу, принятую за единицу, то всякий центральный угол имеет ту же меру, как и дуга, заключенная между его сторонами.

Это предположение сводится к предыдущему, так как мера величины есть отношение этой величины к своей единице.

Предполагая, как мы это будем делать в последующем, что на каждой окружности за единицу дуг принимается дуга, заключенная между сторонами центрального угла, принятого за единицу углов, можно предыдущее следствие сформулировать так. центральный угол измеряется дугой, заключенной между его сторонами.

18. Только что установленные определения позволяют нам ввести одно важное соглашение.

¹⁾ Теорема становится очевидной, если допустить следующее арифметическое предположение (Таннери, Курс арифметики, гл. XIII, п. 493): Две величины пропорциональны, если: 1) одному и тому же значению первой соответствует всегда одно и то же значение второй и 2) сумме двух значений первой величины соответствует сумма двух соответствующих значений второй величины. Эти два условия здесь выполнены (п. 13).

Доказательство в тексте лишь воспроизводит для данного частного случая доказательство общей арифметической теоремы.

Прежде всего мы можем предположить, что все величины, о которых мы будем говорить, измерены определённо выбранной единицей для каждого рода величин; далее, что во всех равенствах, которые мы будем писать, количества, входящие в ту и другую часть равенства, представляют собой не самые величины, а лишь меры этих величин.

Таким образом, мы можем написать целый ряд равенств, которые без этих предположений не имели бы никакого смысла. Например, можно приравнять друг другу две разнородные величины, если имеется равенство двух *чисел*, которые их измеряют; смысл равенства в этом случае совершенно ясен. Мы сможем точно так же писать произведение двух каких-либо величин, так как произведение двух чисел уже определено, и т. д.

Впрочем, когда мы будем писать, как до сих пор, равенство двух величин одного и того же рода, — это равенство будет иметь точно такой же смысл, как и раньше, так как равенство двух величин и равенство их мер сводится одно к другому (п. 17).

На основании этого соглашения возможно написать, если AB — некоторая дуга и O — центр окружности:

$$\angle AOB = \text{дуге } AB.$$

Во всяком случае очень важно подчеркнуть, что это равенство существенно предполагает, что единица угла и единица дуги выбраны так, что указанное выше условие удовлетворено.

18а. Окружность обычно делится на 360 равных частей, называемых *градусами*, каждый из которых содержит 60 *минут*; каждая минута в свою очередь делится на 60 *секунд*. При этом дуги измеряются в градусах, а следовательно, и углы тоже измеряются в градусах. Число градусов, минут и секунд, заключающееся в угле, равно числу градусов, минут и секунд дуги, отсекаемой этим углом на окружности, имеющей центр в вершине угла; прямой угол соответствует четверти окружности, или 90 градусам. Отсюда следует, что мера центрального угла не зависит от радиуса окружности, на которой отсчитываются дуги, так как выбранная угловая единица (градус) по величине не зависит от этого радиуса, а именно составляет одну девяностую часть прямого угла.

Для записи величины углов (или дуг) в градусах, минутах и секундах пользуются следующими обозначениями: угол в 87 градусов, 34 минуты и 25 секунд записывается так: $87^{\circ}34'25''$.

Введение десятичной системы во всех других видах измерений приводит к установлению другого способа подразделения окружности, при котором она делится не на 360, а на 400 равных частей, называемых *градими*. Град, очевидно, несколько меньше градуса и составляет сотую часть прямого угла.

Град подразделяется также по принципу десятичной системы: строго говоря, нет необходимости давать этим подразделениям специальные названия, они пишутся просто по принципу десятичной нумерации.

Таким образом, можно говорить об угле $3^G,5417$ (т. е. 3 града и 5417 десятичных).

Однако сотую часть града часто называют *десятичной минутой* и обозначают её значком ' (вместо значка G , обозначающего *шестидесятиричную* минуту, т. е. шестидесятую долю градуса); точно так же сотая часть десятичной минуты (десятитысячная часть града) представляет собой *десятичную секунду*, обозначаемую знаком $''$. Таким образом, предыдущий угол по этой системе может быть написан так:

$$3^G 54' 17''.$$

Один град составляет $\frac{360^G}{400}$, или $\frac{9}{10}$ градуса, или $54'$. Один градус составляет $\frac{400^G}{360} = 1^G 11'$, т. е. (или иначе $\frac{10}{9}$ града).

19. Теорема. *Через точку, взятую вне прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один.*

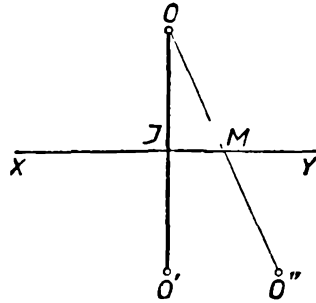
1°. *Возможно провести перпендикуляр.* Пусть даны точка O и прямая XU (черт. 17). Повернём полуплоскость, содержащую точку O , около прямой XU , как около оси, так, чтобы она совместилась с другой полуплоскостью. Точка O попадёт в O' . Соединим их прямой OO' .

Эта прямая пересечёт XU , так как она соединяет две точки, расположенные по разные стороны от прямой XU . Пусть I — точка пересечения. Углы $O'IX$ и OIX — прямые, так как угол $O'IX$ представляет собою то положение, которое принимает угол OIX , когда одну из полуплоскостей совмещают с другой путём вращения около XU .

Следовательно, две прямые XU и OO' перпендикулярны.

2°. *Можно провести только один перпендикуляр.* Пусть OM — какой-либо перпендикуляр к XU , проведённый через точку O ; продолжим эту прямую на длину MO'' , равную OM . Если мы совместим снова одну из полуплоскостей с другой, прямая MO пойдёт по MO'' , так как углы OMX и $O''MX$ равны как прямые, а так как $MO'' = MO$, то точка O попадёт в точку O'' ; следовательно, точка O'' совпадёт с точкой O' , и прямая OO'' совпадёт с OO' .

19а. Точка называется *симметричной* с данной точкой O относительно прямой XU , если она лежит на продолжении перпендикуляра, проведённого к прямой XU через точку O , на расстоянии, равном длине этого перпендикуляра. Из предыдущего следует, что точка, симметричная с точкой O , представляет собою то положение, которое занимает точка O после поворота (п. 19, 1°) около оси XU . Если дана какая-нибудь фигура, можно построить симметричные точки для каж-



Черт. 17.

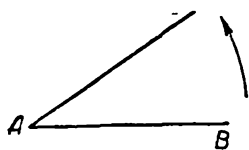
дой точки этой фигуры. Совокупность симметричных точек образует новую фигуру, которая называется симметричной с первой фигурой. Отсюда видно, что для получения фигуры, симметричной с данной фигурой относительно прямой XU , можно повернуть плоскость, в которой лежит фигура, вокруг XU так, чтобы каждая полуплоскость, определяемая этой прямой, совместились с другой полуплоскостью, и отметить новое положение, занятое данной фигурой. Отсюда следует:

Теорема. *Две симметричные плоские фигуры равны.*

Следствие. *Фигура, симметричная прямой линии, — прямая линия.*

Если какая-либо фигура совпадает со своей симметричной относительно прямой XU , то говорят, что она симметрична относительно этой прямой, или, иначе, что она имеет эту прямую *осью симметрии*.

20. Чтобы совместить фигуру F с фигурой F' , ей симметричной, мы должны выполнить такое движение, при котором фигура выйдет из своей плоскости. Следует заметить, что ¹⁾ невозможно достигнуть совмещения без такого движения; это происходит оттого, что *направление вращения обратно в обеих фигурах*. Объясним, что следует понимать под этим выражением.



Черт. 18.

Прежде всего заметим, что плоскость фигуры делит пространство на две области. Назовём одну из этих областей для краткости областью, расположенной *над* плоскостью, другую — *под* плоскостью.

Допустим, что на фигуре F имеем угол BAC , который можно рассматривать как образованный полупрямой, перемещающейся внутри угла из положения AB в положение AC (черт. 18). При взгляде на плоскость *сверху* мы будем говорить об этом угле, что он имеет отрицательное или положительное направление, смотря по тому, представляется ли вращение этой полупрямой происходящим *по часовой стрелке* или *в обратном направлении* ²⁾.

Положим для определённости, что имеет место последний случай. Тогда наблюдатель, лежащий на AB ногами в сторону A , а головой по направлению к B и смотрящий под плоскость, увидит сторону AC слева от себя; следовательно, если, оставаясь расположенным вдоль по AB , он посмотрит на сторону AC , то окажется, что часть пространства, находящаяся под плоскостью, он увидит справа от себя.

Ясно, что при взгляде на плоскость *снизу* можно повторить всё вышеизложенное, заменяя слово „над“ словом „под“ и обратно. Так как наблюдатель, расположенный вдоль по AB и смотрящий на AC ,

¹⁾ В общем случае. *Прим. ред. перевода.*

²⁾ Заметим, что для того, чтобы указать направление вращения, следует принимать во внимание порядок, в котором рассматриваются стороны угла. Так, угол BAC имеет противоположное направление по отношению к углу CAB .

будет необходимо иметь верх плоскости слева, если низ плоскости находится от него справа, и обратно, то *направление вращения меняется в зависимости от того, смотрим ли мы на плоскость с одной или с другой стороны плоскости*¹⁾.

Предположим теперь, что некоторый угол произвольно перемещается в своей плоскости, не выходя из неё. Наблюдатель, участвующий в этом движении, не изменит своего положения по отношению к верху и низу плоскости, так что направление вращения остаётся неизменным при всяком перемещении, не выводящем фигуры из её плоскости.

Чтобы показать, что такое движение не может совместить фигуру F с симметричной ей фигурой F' , достаточно поэтому показать, что направление вращения противоположно в обеих фигурах. Действительно, мы видели, что переход от F к F' можно осуществить вращением плоскости около оси XU так, чтобы она совпала сама с собой (п. 19а). При этом повороте точки, расположенные над плоскостью, оказываются под плоскостью, и обратно. Направление какого-либо угла фигуры F при взгляде снизу будет то же, что и направление угла с ним симметричного при взгляде сверху. Таким образом, при взгляде с одной и той же стороны направление углов будет противоположным.

20а. Примечания: 1°. Ясно, что, точно так же как и угол, дуга может иметь направление положительное или отрицательное, что зависит, конечно, от порядка, в котором мы рассматриваем концы дуги.

2°. Иногда говорят, что плоскость *ориентирована*, если на ней указано положительное направление углов. На основании предыдущего ориентировать плоскость — значит указать, которую из двух областей пространства мы будем называть расположенной *над* плоскостью.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Если точка M — середина отрезка AB , то расстояние CM равно полуразности отрезков CA и CB , если точка C лежит на самом отрезке, и полусумме CA и CB , если точка C взята на продолжении AB (доказать).

2. Если OM — биссектриса угла AOB , то угол COM равен полуразности углов COA и COB , если полупрямая OC лежит внутри $\angle AOB$; и дополняет эту полуразность до двух прямых углов, если полупрямая OC лежит внутри угла $A'OB'$, вертикального к углу AOB . Он равен полусумме углов COA и COB , если эта полупрямая расположена внутри одного из двух других углов BOA' или AOB' , образованных данными прямыми (доказать).

3. Из точки O выходят четыре полупрямые OA, OB, OC, OD (следующие одна за другой в том порядке, как они перечислены), причём $\angle AOB = \angle COD$ и $\angle BOC = \angle DOA$; доказать, что OA и OC суть продолжения одна другой и точно так же OB и OD .

4. Если четыре последовательные полупрямые OA, OB, OC, OD таковы, что биссектрисы углов AOB и COD и точно так же биссектрисы углов BOC и AOD образуют одну прямую, то четыре полупрямые представляют попарно продолжения одна другой (доказать).

¹⁾ Совершенно так же, как налпсь, просвечивающая через лист, кажется с обратной стороны листа перевернутой справа налево.

ГЛАВА II.

ТРЕУГОЛЬНИКИ.

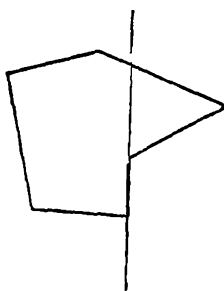
21. *Многоугольником* называется часть плоскости, ограниченная отрезками прямых линий (черт. 19). Эти последние образуют *стороны* многоугольника. Их концы образуют *вершины* многоугольника.

Однако мы будем, вообще говоря, называть многоугольниками только части плоскости, ограниченные одним контуром, который можно описать одним росчерком пера. Таким образом, часть плоскости, которая заштрихована на чертеже 21, не будет являться для нас многоугольником. Многоугольник называется *выпуклым*, если ни одна из прямых, полученных неограниченным продолжением каждой его стороны, не пересекает многоугольника. В противном случае (черт. 20) он называется *вогнутым*.

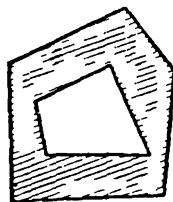
Многоугольники классифицируют по числу сторон. Простейшими многоугольниками будут: многоугольник с тремя сторонами, или *треугольник*, многоугольник с четырьмя сторонами, или *четырёхуголь-*



Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

ник, многоугольник с пятью сторонами, или *пятиугольник*, многоугольник с шестью сторонами, или *шестиугольник*. Мы будем ещё рассматривать многоугольники с 8, 10, 12, 15 сторонами, называемые соответственно *восьмиугольником*, *десятиугольником*, *двенадцатиугольником*, *пятнадцатиугольником*.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две непоследовательные вершины многоугольника.

Примечание. Иногда, с несколько более общей точки зрения, называют многоугольником любую замкнутую ломаную линию, стороны которой могут пересекаться между собой (как на черт. 22). В этом последнем случае, когда ломаная линия не ограничивает единственной площади, можно назвать эту ломаную *несобственным* многоугольником. Наоборот, мы скажем, что имеется многоугольник в *собственном смысле*, если мы хотим указать, что мы имеем случай, изображённый на чертежах 19 или 20, а не случай, изображённый на чертеже 22.

22. Среди треугольников в частности различают:

Равнобедренный треугольник. Так называется треугольник с двумя равными сторонами. Вершину, общую этим двум сторонам, называют просто *вершиной* треугольника, а сторону, расположенную против неё, — *основанием*.

Равносторонний треугольник, или треугольник с тремя равными сторонами.

Прямоугольный треугольник, или треугольник с одним прямым углом. Сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*; стороны, образующие прямой угол, — *катетами*¹⁾.

22а. **Высотой** треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону; **медианой** называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.

23. **Теорема.** Во всяком равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны между собой.

Пусть треугольник ABC — равнобедренный (черт. 23). Перевернём угол BAC и наложим его на самого себя (п. 10) так, чтобы сторона AB пошла по AC , и обратно.

Так как AB и AC равны, точка B займёт положение точки C , и наоборот. Следовательно, угол ABC совместится с углом ACB , так что эти два угла равны.

Обратная теорема. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.

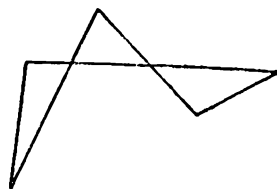
Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle B = \angle C$. Перевернём этот треугольник так, чтобы сторона BC наложилась на самое себя (п. 5), точка B перешла в точку C , и обратно. Так как угол ABC равен углу ACB , то сторона BA пойдёт по CA , и обратно: CA — по BA . Точка A , как точка пересечения BA и CA , сохранит своё прежнее положение, и сторона AB займёт положение AC .

Следствие. Равносторонний треугольник будет в то же время и прямоугольный (т. е. все его углы будут равны), и обратно.

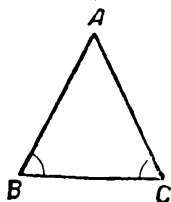
Теорема. Во всяком равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине перпендикулярна к основанию и проходит через его середину.

Пусть AD — биссектриса угла A в равнобедренном треугольнике ABC (черт. 24).

Если перевернуть угол BAC и наложить его на самого себя, то эта биссектриса не изменит своего положения, и то же самое будет



Черт. 22.



Черт. 23.

¹⁾ Определение катетов добавлено при переводе: во французском языке соответствующий термин не употребляется, и в оригинале каждый раз говорится: „стороны, образующие прямой угол“. Прим. рев. перевода.

иметь место для точки D , в которой биссектриса пересекает основание. Так как DB будет совмещено с DC и угол ADB с углом ADC , то мы будем иметь $DB=DC$ и $\angle ADB=\angle ADC$.

Примечание. Во всяком треугольнике ABC можно рассматривать четыре прямые:

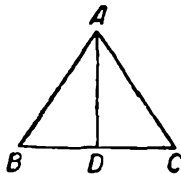
- 1) биссектрису угла A ;
- 2) высоту, выходящую из точки A ;
- 3) медиану, выходящую из той же точки;
- 4) перпендикуляр к стороне BC в её середине.

Вообще эти четыре прямые будут отличны друг от друга (см. упражнение 17). Предыдущая теорема показывает, что в равнобедренном треугольнике они все сливаются в одну прямую, которая является *осью симметрии* треугольника (п. 19а).

Эта теорема может быть также сформулирована иначе, а именно: *высота равнобедренного треугольника является в то же время его биссектрисой и медианой; или ещё: медиана равнобедренного треугольника является в то же время его высотой и биссектрисой; перпендикуляра к основанию в его середине проходит через вершину треугольника и является биссектрисой угла при вершине.*

Следствие. В равнобедренном треугольнике высоты, выходящие из концов основания, между собой равны; то же самое имеет место для медиан, выходящих из тех же вершин, и для биссектрис углов при этих точках, так как эти прямые попарно симметричны.

24. Следующие предложения, известные под названием *признаков равенства треугольников*, дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы два треугольника были равны.



Черт. 24.

Первый признак равенства. Два треугольника равны, если они имеют по равной стороне и прилежащие к этим сторонам углы того и другого треугольника соответственно равны друг другу.

Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ (черт. 25), в которых $BC=B'C'$; $\angle B=\angle B'$; $\angle C=\angle C'$.

Наложим угол B' на равный ему угол B так, чтобы сторона $B'A'$ приняла направление BA , а сторона $B'C'$ — направление BC . Так как $B'C'=BC$, то точка C' совпадёт с C , а так как угол C' равен углу C , то сторона $C'A'$ примет направление CA . Вследствие этого точка A' , как точка пересечения прямых $B'A'$ и $C'A'$, обязательно попадёт в точку пересечения прямых BA и CA , т. е. в точку A . Совпадение треугольников, таким образом, доказано.

Второй признак равенства. Два треугольника равны, если они имеют по равному углу и заключающие эти углы стороны того и другого треугольника соответственно равны друг другу.

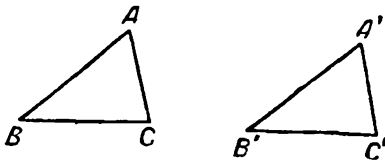
Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, в которых $\angle A=\angle A'$; $AB=A'B'$; $AC=A'C'$ (черт. 25).

Наложим угол A' на равный ему угол A так, чтобы сторона $A'B'$ приняла направление AB и сторона $A'C'$ — направление AC . Так как $A'B'=AB$, то точка B' попадёт в точку B ; точно так же точка C'

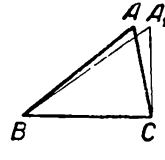
попадёт в C . $B'C'$ совпадёт, таким образом, с BC , и совмещение треугольников будет полное.

Третий признак равенства. *Два треугольника равны, если они имеют по три соответственно равные стороны.*

Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, стороны которых соответственно равны между собой. Расположим второй треугольник таким образом, чтобы сторона $B'C'$ совпала с равной ей стороной BC и оба треугольника лежали по одну и ту же сторону от BC . Пусть BCA_1 — новое положение треугольника $B'C'A'$. Я утверждаю, что точка A_1 совпадёт с точкой A . Это было бы очевидно, если бы прямая $B'A'$ приняла направление BA или прямая $C'A'$ приняла направле-



Черт. 25.



Черт. 26.

ние CA . Если же это было бы не так, то мы имели бы два равнобедренных треугольника BAA_1 и CAA_1 (черт. 26), и перпендикуляр к отрезку AA_1 в его середине должен был бы пройти через точки B и C (п. 23, мелкий шрифт), иначе говоря, совместиться с прямой BC . Это невозможно, так как точки A и A_1 лежат по одну сторону от BC , и потому BC не может пройти через середину отрезка AA_1 . Точки A и A_1 не могут быть, таким образом, различными, и два треугольника совпадают между собой.

Примечания: 1°. Для того чтобы доказать, что точка A совпадёт с точкой A_1 , мы смотрим, что произошло бы, если бы эти две точки были различны; и приходя в этом случае к явно ошибочному заключению, мы утверждаем, что этого быть не может.

Этот метод рассуждения называется *доказательством от противного* и часто применяется при доказательствах.

2°. В треугольнике имеется шесть главных элементов: три угла и три стороны. Мы видим, что достаточно установить равенство трёх из этих элементов (выбранных надлежащим образом) в двух треугольниках, чтобы иметь возможность утверждать, что треугольники равны, и в частности, что равны три остальных элемента.

3°. Два равные треугольника (или вообще два многоугольника) могут отличаться друг от друга направлением вращения (п. 20). В этом случае они могут быть наложены друг на друга только с помощью движения, выводящего один из них из плоскости. Напротив, если направление вращения одинаково, то два многоугольника могут быть приведены к совмещению простым скольжением в плоскости, как мы это увидим дальше.

25. Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, образованный одной стороной и продолжением следующей стороны.

Теорема. *Всякий внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, к нему не прилежащих.*

Пусть имеется треугольник ABC , в котором построен внешний угол $B'AC$ (черт. 27).

Я утверждаю, что этот угол больше, например, внутреннего угла C . Чтобы это доказать, я провожу медиану BD , которую продолжаю на длину DE , равную ей самой. Точка E находится внутри угла $B'AC$, который будет больше угла EAC . А этот последний равен углу C , так как два треугольника DAE и DCB равны как имеющие по равному углу, заключённому между соответственно равными сторонами. Действительно, углы при точке D равны как вертикальные: $AD = DC$ и $BD = DE$ по построению. Следовательно, внешний угол $B'AC$ больше внутреннего угла C , что и требовалось доказать.

Внешний угол $B'AC$ будет дополнительным для внутреннего угла A . Угол C , будучи меньше угла $B'AC$, в сумме с углом A даёт величину, меньшую двух прямых. Наша теорема может быть сформулирована так: *сумма двух углов треугольника меньше двух прямых.* В частности *треугольник не может иметь более одного прямого или тупого угла.*

Теорема. *Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.*

Пусть в треугольнике ABC (черт. 28) $AB > AC$. Мы докажем, что $\angle C > \angle B$. Для этого мы отложим на AB отрезок $AD = AC$. По предположению отрезок DC расположен внутри первоначального угла C , а следовательно, угол ACD меньше угла C . Но в равнобедренном треугольнике ACD угол $\angle ACD$ равен углу $\angle ADC$, который больше угла B , как это следует из предыдущей теоремы, применённой к треугольнику DCB . Теорема, таким образом, доказана.

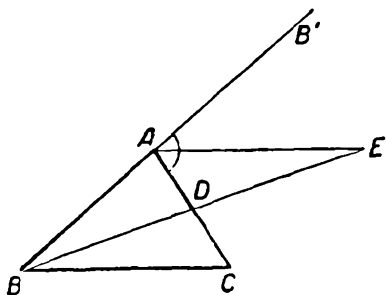
Обратно, *большему углу соответствует ¹⁾ и большая сторона.* Это положение, очевидно, равносильно предыдущему.

26. Теорема. *Во всяком треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон.*

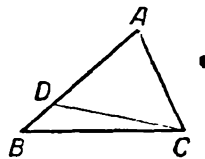
В треугольнике ABC продолжим AB на длину $AD = AC$ (черт. 29). Требуется доказать, что $BC < BD$ ²⁾.

¹⁾ Стороной, соответствующей данному углу треугольника, называется сторона, ему противолежащая.

²⁾ Теорема очевидна, если BC — не самая большая из сторон треугольника.



Черт. 27.



Черт. 28.

Проведя CD , мы видим, что угол D равен углу ACD (п. 23) и, следовательно, меньше угла BCD .

Искомое неравенство вытекает, таким образом, из предыдущей теоремы, применённой к треугольнику BCD .

Следствия: I. Во всяком треугольнике любая сторона больше разности двух других.

Действительно, неравенство $BC < AB + AC$ даёт после вычитания AC из обеих частей:

$$BC - AC < AB.$$

II. Каковы бы ни были три точки A, B, C , каждое из расстояний BC, CA, AB равняется самое большее сумме двух других и самое меньшее их разности, причём равенство может иметь место только, если три точки расположены на одной прямой.

Теорема. Прямолинейный отрезок короче всякой ломаной линии, имеющей с ним общие концы.

Если ломаная линия составлена из двух отрезков, то теорема сводится к предыдущей.

Пусть теперь ломаная линия $ABCD$

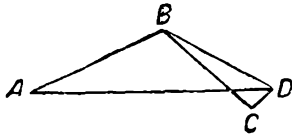
состоит из трёх отрезков (черт. 30). Соединив B с D , получим

$$AD < AB + BD,$$

и так как $BD < BC + CD$, то

$$AD < AB + BD < AB + BC + CD.$$

Теорема, таким образом, доказана для линии, состоящей из трёх отрезков; совершенно так же убедимся последовательно в справедливости теоремы для ломаных линий, составленных из 4, 5 и т. д. отрезков. Теорема оказывается справедливой при всяком числе отрезков, образующих ломаную линию.



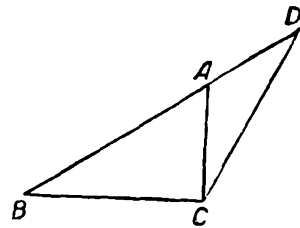
Черт. 30.

27. Периметром многоугольника или ломаной линии называется сумма всех сторон.

Теорема. Периметр выпуклой ломаной меньше периметра любой ломаной, объемлющей данную и имеющей с ней общие концы.

Путь $ACDB$ — выпуклая ломаная линия и $ACD'E'F'B$ — объемлющая её ломаная (черт. 31). Продолжим стороны AC и CD в одном и том же направлении $BCDB$, т. е. сторону AC за точку C , а сторону CD — за точку D . Эти продолжения пересекут объемлющую линию соответственно в точках G и H .

Путь $ACDB$ короче пути $ACHB$, так как они имеют общую часть ACD , а остающаяся часть DB первого короче остающейся части DHB



Черт. 29.

второго. В свою очередь, путь $ACHB$ меньше, чем $AGD'E'F'B$, так как, отбрасывая общие части AC , HB , получим отрезок CH , который короче ломаной линии $CGD'E'F'H$.

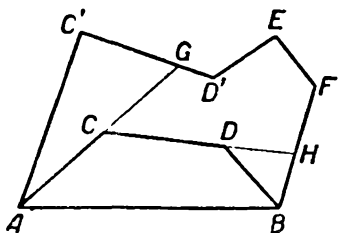
Наконец, точно так же $AGD'E'F'B$ меньше $AC'D'E'F'B$, так как AG меньше $AC'G$.

Таким образом, имеем:

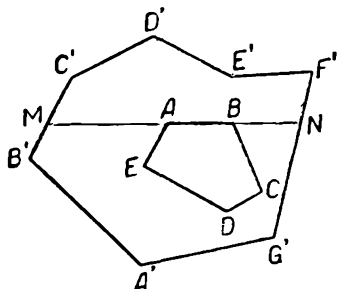
$$ACDB < ACHB < AGD'E'F'B < AC'D'E'F'B.$$

Следствие. Периметр выпуклого многоугольника меньше периметра замкнутой ломаной линии, которая объемлет его со всех сторон.

Пусть (черт. 32) имеем выпуклый многоугольник $ABCDE$ и ломаную линию $A'B'C'D'E'F'G'A'$, которая объемлет его со всех сторон.

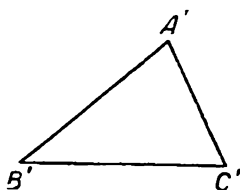
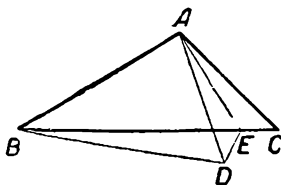


Черт. 31.



Черт. 32.

Продолжим сторону AB в обоих направлениях до пересечения с объемлющей линией в точках M , N ; мы видим, что линия $AEDCB$ меньше $AMB'A'G'NB$ (по предыдущей теореме), так что многоугольник $AEDCBA$ имеет периметр меньший, чем многоугольник $NMB'A'G'N$.



Черт. 33.

А этот в свою очередь по длине меньше данной объемлющей линии, так как часть $MB'A'G'N$ у них общая, а $MN < MC'D'E'F'N$.

28. Теорема. Если два треугольника имеют по неравному углу, заключенному между соответственно равными сторонами, то третьи стороны неравны и против большего угла лежит и большая сторона.

Пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$, в которых $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A > \angle A'$ (черт. 33). Я хочу доказать, что BC больше $B'C'$.

Наложим треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы две равные их стороны $A'B'$ и AB совпали. Так как угол A' меньше угла A , то сторона $A'C'$ займёт положение AD внутри угла BAC . Проведём биссектрису AE угла DAC ; эта прямая точно так же лежит внутри угла BAC . Следовательно, точки B и C лежат по разные стороны от неё, и прямая AE должна пересечь сторону BC в некоторой точке E , расположенной между B и C . Если мы проведём DE , то увидим, что два треугольника ACE и ADE равны как имеющие по равному углу (углы при A), заключённому между двумя соответственно равными сторонами (AE общая, $AC = A'C' = AD$); отсюда следует равенство сторон DE и EC . Далее неравенство $BD < BE + ED$, вытекающее из треугольника BDE , даёт нам

$$BD < BE + EC \text{ или } BD < BC.$$

Обратная теорема. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а третьи стороны неравны между собой, то углы, противолежащие этим сторонам, также неравны и против большей стороны лежит и больший угол.

Это положение равносильно предыдущему.

Примечание. Предыдущая теорема ни в какой мере не предполагает доказанным *третий признак равенства треугольников* (п. 24). Наоборот, она даёт для него новое доказательство.

Если, в самом деле, одновременно с $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$ имеем $BC = B'C'$, то необходимо, чтобы углы при точках A, A' в двух треугольниках были равны, так как иначе стороны BC и $B'C'$ были бы неравны между собой, как мы только что видели. Но если $\angle A = \angle A'$, то два треугольника равны (второй признак равенства).

УПРАЖНЕНИЯ.

5. Доказать, что треугольник равнобедренный:
 - 1) если его биссектриса является в то же время и высотой;
 - 2) если его медиана является в то же время и высотой;
 - 3) если его биссектриса является в то же время и медианой.
6. На стороне OX некоторого угла отложены два отрезка OA и OB , а на другой стороне угла OX' два отрезка OA' , OB' , соответственно равные первым, и концы отрезков накрест соединены между собой: A с B' , а A' с B . Доказать, что точка I , в которой пересекаются прямые AB' и $A'B$, лежит на биссектрисе данного угла.
7. Если две стороны треугольника не равны между собой, то медиана заключённая между ними, образует с меньшей из этих сторон угол больший, чем с другой стороной (доказать, пользуясь построением, аналогичным построению п. 25).
8. Если соединить точку, взятую в плоскости треугольника, с тремя вершинами, то сумма полученных отрезков больше полупериметра треугольника; если точка взята внутри треугольника, то она меньше его периметра (доказать).
- 8а. Если соединить точку, взятую в плоскости многоугольника, со всеми его вершинами, то сумма полученных отрезков больше полупериметра многоугольника (доказать).
9. Сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника заключается между его полупериметром и периметром (доказать).

10. Точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника есть точка плоскости, которая имеет наименьшую возможную сумму расстояний до его четырёх вершин (доказать).

11. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, её заключающих, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны (доказать).

12. Сумма медиан треугольника больше полупериметра и меньше периметра (доказать).

13. Найти на данной прямой точку, сумма расстояний которой до двух заданных точек наименьшая. Рассмотреть два случая: когда обе точки находятся по одну и ту же или по разные стороны от прямой.

Свести первый случай ко второму (пользуясь симметрией части фигуры относительно данной прямой).

14. (Задача о бильярде.) Даны прямая XU и две точки A, B по одну и ту же сторону от этой прямой; найти на этой прямой точку M такую, чтобы угол AMX был бы равен углу BMU .

Получается та же точка, что и в предыдущем упражнении.

15. Найти на данной прямой такую точку, чтобы разность расстояний её от двух заданных точек была наибольшей. Рассмотреть два случая, когда обе точки находятся по одну и ту же или по разные стороны от прямой.

ГЛАВА III.

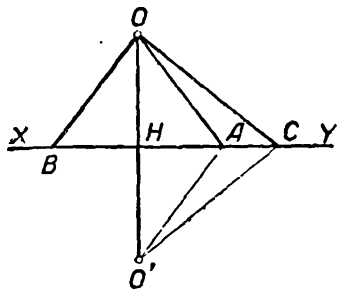
ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И НАКЛОННЫЕ.

29. Теорема. Если из одной точки, взятой вне прямой, провести к этой прямой перпендикуляр и несколько наклонных, то:

1) перпендикуляр короче всякой наклонной;

2) две наклонные, основания которых одинаково удалены от основания перпендикуляра, равны;

3) из двух наклонных длиннее та, основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра.



Черт. 34.

1°. Пусть даны перпендикуляр OH и наклонная OA , проведённые из точки O к прямой XU (черт. 34). Продолжим отрезок OH на равную ему длину HO' ; точка O' симметрична с точкой O относительно прямой XU , так что отрезок $O'A$ равен отрезку OA как отрезок, с ним симметричный. Рассматривая треугольник $OO'A$, в котором $OO' < OA + O'A$, мы видим, что OO' можно заменить через $2OH$ и $OA + O'A$ — через $2OA$. Отсюда следует, что

$$2OA > 2OH, \text{ или } OH < OA.$$

2°. Пусть даны две такие наклонные OA и OB , что $HA = HB$. Эти две наклонные будут равны как симметричные относительно прямой OH .

3°. Пусть даны две такие наклонные OA и OC , что $HC > HA$ (черт. 34). Предположим сначала, что точки A и C находятся по

одну сторону от H . Тогда точка A лежит внутри треугольника $OO'S$. Следовательно, мы будем иметь (п. 27):

$$OA + O'A < OS + O'S.$$

Но, как мы видели выше, OA равно $O'A$ и OS равно $O'S$. Деля почленно на два, получим, как раньше,

$$OA < OS.$$

Если рассматривать наклонную OB менее удалённую, чем OS , но лежащую по другую сторону от точки H , то достаточно отложить в направлении HS отрезок $HA = HB$: наклонная OA будет равна OB (2°) и будет меньше OS , как мы только что видели.

30. Обратная теорема. Если две наклонные равны, то их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра, так как иначе они были бы неравны; если две наклонные неравны, то та из них, которая длиннее другой, дальше отстоит от основания перпендикуляра.

Следствие. Из данной точки O к данной прямой XU нельзя провести более двух наклонных, имеющих одну и ту же длину. Действительно, основания этих наклонных должны быть равноудалены от основания H перпендикуляра на прямую XU ; но одно и то же расстояние может быть отложено на прямой XU от точки H только двумя способами.

31. Расстоянием точки от прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Предыдущая теорема показывает, что этот перпендикуляр действительно представляет собою кратчайший путь от точки до прямой.

32. Теорема. 1°. Любая точка, лежащая на перпендикуляре к данному отрезку, проходящем через его середину, одинаково удалена от обоих концов этого отрезка.

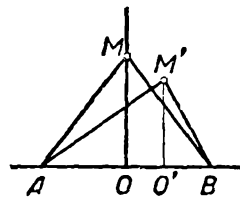
2°. Всякая точка, не расположенная на этом перпендикуляре, неодинаково удалена от двух концов отрезка.

1°. Пусть M — точка, расположенная на перпендикуляре в середине O отрезка AB (черт. 35). Отрезки MA , MB равны как наклонные, одинаково отстоящие от основания перпендикуляра MO .

2°. Пусть M' — точка, не лежащая на перпендикуляре в середине отрезка AB , например, расположенная с той же стороны от перпендикуляра, где находится точка B . В таком случае и основание перпендикуляра O' , опущенного из точки M' на прямую, будет лежать от перпендикуляра в середине отрезка с той же стороны, где находится точка B (иначе оба перпендикуляра пересеклись бы и через точку пересечения можно было бы провести два перпендикуляра к AB).

Следовательно, будем иметь

$$O'A > O'B, \text{ откуда (п. 29) } M'A > M'B.$$



Черт. 35.

Примечания: 1°. Можно было бы доказать эту вторую часть теоремы иначе, доказав предложение, ей равносильное: *всякая точка, одинаково удалённая от A и B , лежит на перпендикуляре к отрезку AB , восставленному в его середине*. Это предложение вытекает из обратной теоремы п. 30 (основания двух равных наклонных равноудалены от основания перпендикуляра) или ещё из свойства равнобедренного треугольника (п. 23, примечание). Однако следует заметить, что наш способ доказательства имеет то преимущество, что он показывает, какое из двух расстояний больше в том случае, когда они неравны.

2°. Предложение, которое мы только что сформулировали (всякая точка, одинаково удалённая от A и B , лежит на перпендикуляре к отрезку AB , проходящем через его середину), является обратным по отношению к первой части предыдущей теоремы. Таким образом, мы имеем здесь два способа доказательства обратной теоремы. Первый состоит в повторении первоначального рассуждения в обратной последовательности. Это то, что мы сделали в предыдущем примечании. В первоначальном рассуждении (доказательство предыдущей теоремы, 1°) мы исходили из предположения, что точка M лежит на перпендикуляре к отрезку AB , проходящем через его середину, или что MA и MB были равноудалены от основания перпендикуляра, а отсюда мы делали вывод, что они равны. Теперь же мы исходили из того, что точка M одинаково удалена от A и B или что обе наклонные равны, и делали заключение, что они одинаково удалены от перпендикуляра.

Второй способ доказательства обратной теоремы состоит в том, чтобы доказать то, что называется *противоположным предложением*. Так называется предложение, в котором условие противоположно условию первоначального предложения, а заключение противоположно первоначальному заключению. Таким образом, вторая часть предыдущей теоремы является предложением, противоположным первой её части, и равносильна обратной ей теореме.

Мы встретим в дальнейшем (см., например, п. 41) третий способ доказательства обратных теорем.

33. Воспользуемся теперь определением п. 1а. На основании этого определения предыдущая теорема может быть сформулирована так:

Теорема. *Геометрическое место точек, одинаково удалённых от двух данных точек, есть перпендикуляр, восставленный в середине отрезка, соединяющего эти точки.*

Действительно, фигура, образованная точками, одинаково удалёнными от A и B , есть перпендикуляр к отрезку AB , проходящий через его середину.

Заметим, что для того, чтобы в этом убедиться, необходимо доказать:

1) что любая точка перпендикуляра удовлетворяет данному условию,

2) что всякая точка, удовлетворяющая данному условию, лежит на перпендикуляре, или, что сводится к тому же самому, что всякая точка, не расположенная на перпендикуляре, не удовлетворяет условию.

Необходимость в таком доказательстве, состоящем из двух частей, представляется во всех задачах, касающихся отыскания геометрических мест.

УПРАЖНЕНИЯ.

16. Если два прямоугольных треугольника таковы, что катеты первого треугольника соответственно меньше катетов второго, то и гипотенуза первого треугольника меньше гипотенузы второго (доказать).

17. Если углы B и C треугольника ABC — острые и стороны AB , AC неравны, то линии, выходящие из вершины A , следуют в таком порядке: большая сторона, медиана (см. упражнение 7, гл. II), биссектриса, высота, меньшая сторона (доказать).

18. В неравностороннем треугольнике отрезок биссектрисы от вершины до противоположной стороны меньше, чем медиана, выходящая из той же вершины.

ГЛАВА IV.

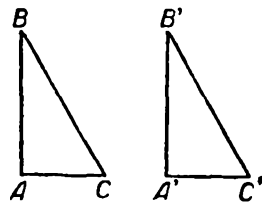
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. СВОЙСТВО БИСSEKTPИСЫ УГЛА.

34. К прямоугольным треугольникам применимы, само собой разумеется, признаки равенства произвольных треугольников. Например, два прямоугольных треугольника равны, если они имеют соответственно равные катеты (второй признак равенства произвольных треугольников).

Кроме разобранных ранее признаков равенства треугольников, существуют два других, которые приложимы только к прямоугольным треугольникам.

Первый признак равенства. Два прямоугольных треугольника равны, если они имеют равные гипотенузы и по одному равному острому углу.

Пусть (черт. 36) даны два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$, в которых $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$.



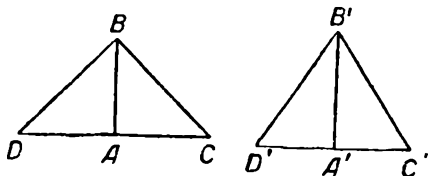
Черт. 36.

Наложим второй треугольник на первый так, чтобы их равные углы B и B' совпали. Тогда $B'C'$ пойдёт по направлению BC , и так как эти два отрезка равны, точка C' попадёт в точку C . При этом $B'A'$ пойдёт по направлению BA , и, следовательно, $C'A'$ должна пойти по направлению перпендикуляра, опущенного из точки C на BA , т. е. по направлению CA .

Второй признак равенства. Два прямоугольных треугольника равны, если они имеют по равной гипотенузе и по одному равному катету.

Пусть даны два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$, в которых $BC = B'C'$, $AB = A'B'$. Наложим второй треугольник на первый так, чтобы совместились равные стороны AB и $A'B'$.

Сторона $A'C'$ пойдёт по направлению AC . Мы будем иметь теперь две наклонные из точки B к прямой AC , а именно BC и новое положение стороны $B'C'$, которые по условию будут равны и, следовательно (п. 30), одинаково удалены от основания перпендикуляра. Таким образом, $A'C' = AC$, откуда и следует равенство двух треугольников.



Черт. 37.

35. Теорема. Если два прямоугольных треугольника имеют по равной гипотенузе и по неравному острому углу, то стороны, противолежащие

неравным углам, неравны, и против большего угла лежит большая сторона.

Пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$ (черт. 37), в которых $BC = B'C'$; $\angle B > \angle B'$. Я утверждаю, что $AC > A'C'$.

Чтобы в этом убедиться, отложим на продолжении стороны AC равный ей отрезок AD и точно так же на продолжении стороны $A'C'$ — равный ей отрезок $A'D'$. Мы будем иметь прежде всего (п. 29) $BD = BC = B'C' = B'D'$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике DBC медиана BA будет также биссектрисой, так что угол DBC будет в два раза больше первоначального угла B . Точно так же угол $D'B'C'$ будет в два раза больше первоначального угла B' , так что мы будем иметь $\angle DBC > \angle D'B'C'$.

Два треугольника DBC и $D'B'C'$ будут иметь тогда по неравному углу, заключённому между соответственно равными сторонами, откуда следует, что $DC > D'C'$, а следовательно $AC > A'C'$.

36. Теорема. Биссектриса угла есть геометрическое место точек, расположенных внутри угла и одинаково удалённых от сторон угла.

Доказательство, как мы объяснили раньше (п. 33), состоит из двух частей:

1°. Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, одинаково удалена от сторон угла.

Пусть даны угол BAC и точка M (черт. 38), лежащая на биссектрисе этого угла. Если из точки M опустим на стороны угла перпендикуляры MD и ME , то два прямоугольных треугольника AMD , AME будут равны как имеющие общую гипотенузу и равные острые углы (при вершине A). Следовательно, перпендикуляры MD и ME будут равны.

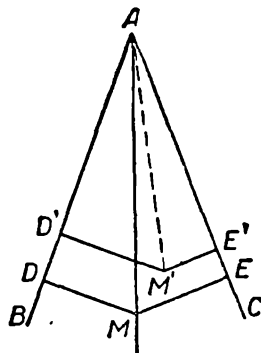
2°. Любая точка, расположенная внутри угла, но не на биссектрисе, неодинаково удалена от двух сторон угла.

Пусть дана точка M' , расположенная, например, между биссектрисой и стороной AC .

При этом угол BAM' будет больше угла $M'AC$. Следовательно, если мы опустим на AB и AC перпендикуляры $M'D'$ и $M'E'$, то два прямоугольных треугольника $AM'D'$ и $AM'E'$ будут иметь общую гипотенузу и неравные углы при вершине A ; следовательно, $M'D'$ будет (п. 35) больше $M'E'$.

Точно так же, как для теоремы п. 32, мы могли бы доказать вместо противоположного предложения, данного в 2°, обратную теорему: *Всякая точка, расположенная внутри угла и одинаково удаленная от его сторон, лежит на биссектрисе.*

Для этого пришлось бы, повторяя в обратной последовательности первоначальные рассуждения, рассмотреть точку M (черт. 38), которая по предположению одинаково удалена от AB и AC , и применить к двум прямоугольным треугольникам AMD , AME , в которых гипотенуза — общая и $MD = ME$, второй признак равенства (п. 34). Таким образом, мы доказали бы равенство углов при A , откуда и следовало бы, что AM есть биссектриса.



Черт. 38.

Но таким путём мы не смогли бы узнать, которое из двух расстояний больше в том случае, когда они неравны.

Следствие. *Геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух прямых, состоит из двух биссектрис (п. 15а) углов, образованных этими прямыми.*

УПРАЖНЕНИЯ.

19. Доказать, что если две высоты треугольника равны, то треугольник — равнобедренный.

20. Доказать более общее предложение, что во всяком треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота ¹⁾.

Г Л А В А V.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

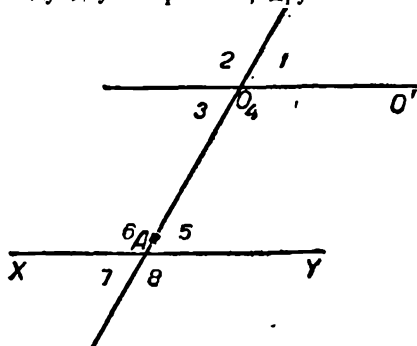
37. Если две прямые линии пересечены одной и той же секущей (черт. 39), то эта секущая образует с данными прямыми восемь углов, перенумерованных на чертеже, взаимное расположение которых характеризуется следующими названиями:

¹⁾ Высотой (медианой, биссектрисой), соответствующей данной стороне, называется высота (медиана, биссектриса), проведённая из противоположащей вершины. *Прим. ред. перевода.*

Два угла, такие как $\angle 3$ и $\angle 5$, находящиеся между двумя данными прямыми и по разные стороны от секущей, называются *внутренними накрестлежащими*.

Два угла, такие как $\angle 3$ и $\angle 6$, расположенные между двумя данными прямыми, но по одну сторону от секущей, называются *внутренними односторонними*.

Два угла, такие как $\angle 6$ и $\angle 2$, расположенные по одну сторону от секущей и обращённые — один к части плоскости, заключённой между двумя прямыми, другой к части плоскости, внешней по отношению к данным прямым, называются *соответственными*.



Черт. 39.

38. Параллельными прямыми называются две прямые, лежащие в одной и той же плоскости, которые, сколько бы их ни продолжать в обе стороны, не пересекаются между собой.

Теорема. Две прямые линии, пересеченные одной и той же третьей, параллельны:

- 1) если внутренние односторонние углы являются *пополнительными углами*¹⁾; или
- 2) если внутренние накрестлежащие углы равны; или
- 3) если соответственные углы равны.

1°. Если две прямые пересекались бы с той или другой стороны от секущей, то они образовали бы треугольник, в котором (п. 25) сумма двух внутренних односторонних углов должна была бы быть меньше, чем два прямых.

Два других случая сводятся к первому:

2°. Если внутренние накрестлежащие углы $\angle 3$ и $\angle 5$ равны, то это сводится к тому, что $\angle 3$ является *пополнительным* для $\angle 6$, иначе говоря, к тому, что внутренние односторонние углы являются *пополнительными*.

3°. Если соответственные углы $\angle 6$ и $\angle 2$ равны, то $\angle 3$ и $\angle 6$ снова будут *пополнительными*, так как $\angle 3$ будет *пополнительным* для $\angle 2$.

Этой теоремой приходится пользоваться для доказательства параллельности двух прямых.

Следствие. В частности, две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей и лежащие в одной плоскости, параллельны.

¹⁾ Если $\angle 3$ и $\angle 6$ (черт. 39) *пополнительные*, то и $\angle 4$ и $\angle 5$ *пополнительные*, так как сумма этих четырёх углов равна четырём прямым.

39. Теорема. *Через точку, взятую вне прямой, можно провести прямую линию, параллельную этой прямой.*

Пусть даны точка O и прямая XU (черт. 39). Соединим точку O с произвольной точкой A прямой XU и проведём прямую OO' , которая с OA образует такой угол, что $\angle AOO' + \angle OAU = 2d^1$; она и будет параллельна XU .

40. Предыдущее построение может быть выполнено бесчисленным числом способов, потому что точка A может быть взята произвольно на прямой XU . Может показаться, что оно даёт бесчисленное множество различных параллельных линий.

Однако это не так в силу следующей аксиомы.

Аксиома²⁾. *Через точку, взятую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.*

Следствия: I. *Две различные прямые, параллельные одной и той же третьей, параллельны между собой*, так как, если бы они имели общую точку, то через эту точку можно было бы провести две прямые, параллельные третьей.

II. *Если две прямые параллельны, то всякая третья прямая, которая пересекает первую, пересекает и вторую*; иначе две прямые, параллельные второй прямой, пересекались бы между собой³⁾.

41. Теорема п. 38 допускает обратную теорему, которую мы сейчас докажем.

Обратная теорема. *Если две параллельные прямые пересечены одной и той же секущей, то:*

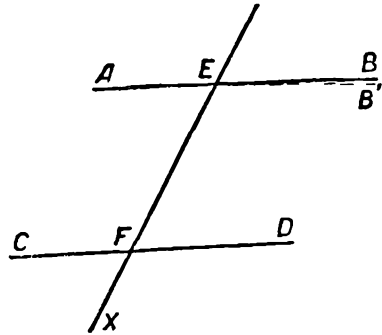
1) *внутренние односторонние углы являются углами дополнителями;*

2) *внутренние накрестлежащие углы равны;*

3) *соответственные углы равны.*

Доказательство будет одним и тем же для всех трёх случаев.

Пусть даны две параллельные прямые AB , CD , пересечённые секущей EFX (черт. 40). Я утверждаю, например, что соответственные углы — $\angle XEB$ и $\angle XFD$ — равны. В самом деле, прямая EB' , образующая при точке E с прямой EF угол XEB' , равный углу XFD , будет параллельна CD и потому совпадёт с EB .



Черт. 40.

1) Буква d — начальная буква французского слова *droit* (прямой) — служит для обозначения прямого угла.

2) Эта аксиома известна под именем *постулата Эвклида*. В действительности её следует рассматривать как часть определения основных понятий геометрии (см. Прибавление В в конце тома).

3) Здесь мы имеем новый пример доказательства от противного (см. п. 24, примечание 1°).

Следствия I. Если две прямые линии образуют с одной и той же секущей два внутренних односторонних угла, сумма которых отлична от двух прямых, то они непараллельны и пересекаются с той стороны от секущей, где сумма углов меньше двух прямых.

II. Если две прямые линии параллельны, то всякий перпендикуляр к одной из них является перпендикуляром и к другой.

Действительно, он непременно пересечёт вторую прямую (п. 40, следствие II) и образует с ней прячой, угол на основании теоремы, которую мы только что доказали.

Примечания: 1°. Равные соответственные углы XEB и XFD имеют одно и то же направление вращения.

О двух параллельных полупрямых EB и FD , расположенных по одну и ту же сторону от секущей, говорят, что они *параллельны и направлены в одну и ту же сторону*.

2°. Мы применили здесь новый способ доказательства обратных теорем, отличный от тех, которыми мы пользовались в п. 32, и который состоит в доказательстве обратной теоремы с помощью соответствующей прямой теоремы. Заметим, что в данном случае это доказательство существенно основывается на том обстоятельстве, что прямая, проходящая через точку E и параллельная CD , — *единственная*.

42. На основании теоремы п. 38 и ей обратной данное выше определение параллельных прямых в точности сводится к следующему.

Две прямые параллельны, если они образуют с какой-нибудь секущей равные соответственные углы (или равные внутренние накрест лежащие углы или дополнительные внутренние односторонние углы).

Это последнее определение следует, вообще говоря, предпочитать первоначально данному определению, которому оно равносильно.

Выражение *параллельные прямые* часто заменяют выражением *прямые, имеющие одно и то же направление*, смысл которого ясен из предыдущих предложений.

Примечание. С этой точки зрения две совпадающие между собой прямые должны рассматриваться как частный случай двух параллельных прямых.

43. Теорема. Два угла, стороны которых соответственно параллельны, или равны, или являются дополнительными углами: они равны, если обе пары их соответственных сторон направлены в одну и ту же сторону или обе пары их соответственных сторон направлены в противоположные стороны; они дополнительные, если одна пара сторон направлена в одну и ту же сторону, а другая пара сторон — в противоположные стороны.

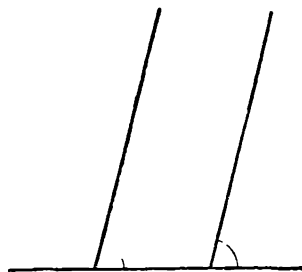
Прежде всего два угла, у которых одна сторона общая, а две другие параллельны и направлены в одну и ту же сторону (черт. 41), равны как соответственные. Следовательно, два угла, стороны которых параллельны и направлены в одну и ту же сторону, равны между собою, так как сторона одного из них образует в пересечении со стороной другого третий угол, равный каждому из данных углов.

Если два угла имеют пару параллельных сторон, направленных в одну и ту же сторону, и пару параллельных сторон, направленных в противоположные стороны, то, продолжая одну из сторон второй пары, мы получим угол, дополнительный первому и равный второму.

Если обе пары сторон направлены в противоположные стороны, то, продолжив обе стороны первого угла, мы получим угол, равный первому как вертикальный, а с другой стороны, равный и второму.

Примечание. Два соответственных угла, а, следовательно, также и два угла, обе пары сторон которых параллельны и направлены в одну сторону, имеют одинаковое направление. Поэтому можно сказать ещё так:

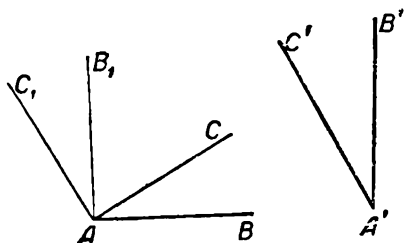
Два угла, имеющие соответственно параллельные стороны, равны или дополнительные, смотря по тому, имеют ли оба угла одинаковое направление или различные направления.



Черт. 41.

Теорема. Два угла, стороны которых соответственно перпендикулярны друг другу, равны или являются углами дополнительными, в зависимости от того, имеют ли оба угла одинаковое направление или различные направления.

Пусть углы BAC , $B'A'C'$ (черт. 42) таковы, что $A'B'$ и $A'C'$ соответственно перпендикулярны к AB и AC . Проведем перпендикуляр AB_1



Черт. 42.

к прямой AB , перевернем угол B_1AC и наложим его на самого себя так, чтобы сторона AB_1 пошла по AC ; прямая AB , перпендикулярная к AB_1 , займёт положение AC_1 , перпендикулярное к AC . Таким образом, мы имеем угол B_1AC_1 , равный данному углу BAC и одного с ним направления (так как он представляет собой перевернутый угол CAB , который имеет направление, противоположное углу BAC); стороны угла B_1AC_1 соответственно перпендикулярны сторонам угла BAC , а, следовательно, параллельны сторонам угла $B'A'C'$. Так как углы B_1AC_1 , $B'A'C'$ будут равными или дополнительными, смотря по тому, имеют ли они одинаковое направление или различные направления, то то же будет иметь место и для данных углов.

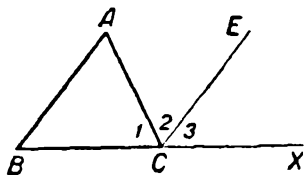
44. Теорема. Сумма углов треугольника равна двум прямым.

В треугольнике ABC (черт. 43) продолжим BC по направлению CX и проведём CE параллельно AB . Мы образуем при точке C три угла (на чертеже они обозначены: 1, 2, 3), сумма которых равна двум прямым. Но эти три угла соответственно равны трём углам треугольника,

в силу того, что $\angle 1$ является углом C треугольника; $\angle 2$ равен углу A (как углы внутренние накрестлежащие, образованные секущей AC с параллельными прямыми AB , CE); $\angle 3$ равен B (как углы соответственные, образованные секущей BC с теми же параллельными прямыми).

Следствия: I. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, к нему не прилежащих.

II. Острые углы прямоугольного треугольника суть углы дополнителильные.



Черт. 43.

III. Если два треугольника имеют по два соответственно равных угла, то и третьи их углы равны.

44а. Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника¹⁾ равна двум прямым, умноженным на число сторон многоугольника, уменьшенное на два.

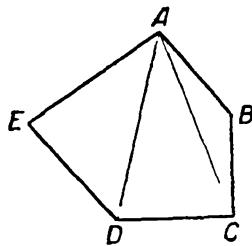
Пусть дан многоугольник $ABCDE$ (черт. 44). Соединяя точку A с другими вершинами диагоналями, мы разобьём этот многоугольник на треугольники. Треугольников будет на два меньше числа сторон, потому что точка A взята за общую вершину всех этих треугольников, так что все стороны многоугольника являются основаниями треугольников, кроме тех двух, которые примыкают к A . Сумма углов всех этих треугольников даёт сумму углов многоугольника. Теорема, таким образом, доказана.

Если n — число сторон многоугольника, то сумма его углов будет $2d(n-2)$ или $(2n-4)d$.

Следствие. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, образованных продолжением всех сторон в одном и том же направлении, равна четырём прямым.

Сумма каждого внешнего угла с соответствующим ему внутренним углом равна 2 прямым. Складывая углы, расположенные при n вершинах, получим $2n$ прямых; из них $2n-4$ прямых дают сумму внутренних углов.

Сумма внешних углов составляет, следовательно, 4 недостающих прямых угла.



Черт. 44.

УПРАЖНЕНИЯ.

Параллельные прямые.

21. Если в треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис углов B и C провести прямую MN , параллельную BC , до пересечения в точ-

¹⁾ Точно так же, только несколько сложнее, доказывается та же теорема и для вогнутого многоугольника с помощью надлежащего определения углов такого многоугольника.

ках M и N со сторонами AB и AC , то отрезок MN равен сумме отрезков BM и CN (доказать).

Как изменится это предложение, если провести прямую, параллельную BC , через точку пересечения биссектрис внешних углов при B и C ; через точку пересечения биссектрисы угла при B с биссектрисой внешнего угла при C ?

Сумма углов многоугольника.

22. Доказать теорему п. 44а, разбивая многоугольник на треугольники прямыми, выходящими из одной и той же внутренней точки многоугольника.

23. В произвольном давном треугольнике ABC проведены из точки A к стороне BC две прямые AD и AE , из которых первая образует с AB угол, равный углу C , в то время как вторая образует с AC угол, равный углу B . Доказать, что треугольник ADE равнобедренный.

24. Во всяком треугольнике ABC :

1) биссектриса угла A образует с высотой, выходящей из вершины A , угол, равный полуразности углов B и C ;

2) биссектрисы углов B и C образуют между собой тупой угол, равный прямому, сложенному с углом $\frac{A}{2}$;

3) биссектрисы внешних углов B и C образуют между собой острый угол, дополнительный к углу $\frac{A}{2}$ (доказать).

25. В выпуклом четырёхугольнике:

1) биссектрисы двух последовательных углов образуют между собою угол, равный полусумме двух других углов;

2) биссектрисы двух противоположных углов образуют между собою угол, дополнительный к полуразности двух других углов (доказать).

ГЛАВА VI.

ПАРАЛЛЕЛОГРАМЫ. ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

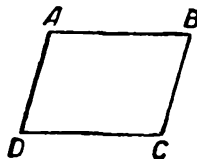
45. Частными случаями четырёхугольников являются *трапеции* и *параллелограммы*.

Трапецией называется (черт. 45) четырёхугольник, у которого две стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции.

Параллелограммом называется (черт. 46) четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.



Черт. 45.



Черт. 46.

Теорема. В параллелограмме противоположные углы равны, а углы, прилежащие к одной и той же стороне, дополнительные.

В самом деле, в параллелограмме $ABCD$ (черт. 46) углы A и B , прилежащие к одной и той же стороне AB , являются углами внутренних односторонними при параллельных прямых AD и BC , пересекаемых секущей AB ; следовательно, они дополнительные. Что касается

углов A и C , то они равны как углы с параллельными сторонами, направленными в противоположные стороны.

Примечание. Очевидно, что если известен один угол параллелограмма, то известны и все остальные.

Обратная теорема. Если в четырёхугольнике противоположные углы равны, то четырёхугольник — параллелограм.

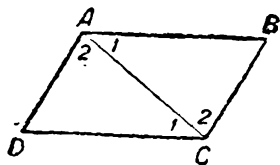
В самом деле, сумма углов любого четырёхугольника равна четырём прямым (п. 44а).

Но если $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$, то сумма четырёх углов: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ может быть написана в виде $2\angle A + 2\angle B$. Отсюда следует, что $\angle A + \angle B = 2d$ и прямые AD , BC будут параллельны, так как они образуют с AB дополнительные внутренние односторонние углы. Точно так же докажем, что AB параллельна CD .

46. Теорема. Во всяком параллелограмме противоположные стороны равны.

В параллелограмме $ABCD$ (черт. 47) проведём диагональ AC .

Она разбивает параллелограм на два треугольника ABC , CDA , которые равны, так как имеют общую сторону AC , заключённую между



Черт. 47.

двумя соответственно равными углами:

$\angle A_1 = \angle C_1$ (как углы внутренние накрест-лежащие при параллельных AB и CD);

$\angle A_2 = \angle C_2$ (как углы внутренние накрест-лежащие при параллельных AD и BC).

Из равенства треугольников следует равенство сторон:

$$AB = CD; AD = BC.$$

В этой теореме условие состоит из двух частей: 1) две противоположные стороны параллельны; 2) две другие стороны также параллельны. Заключение состоит точно так же из двух частей: 1) две противоположные стороны равны; 2) две другие также равны.

Так как заключение обратного предложения можно получить, беря либо часть условия, либо полностью всё условие данного предложения, и обратно, то доказанная теорема имеет две обратные теоремы.

Обратные теоремы. Четырёхугольник будет параллелограмом:

1) если противоположные стороны равны;

2) если две противоположные стороны равны и параллельны.

1°. Предположим, что в четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 47) $AB = CD$ и $AD = BC$. Проведём диагональ AC . Треугольники ABC и CDA будут равны как имеющие соответственно равные стороны. Углы A_1 и C_1 будут также равны, и так как эти углы занимают по отношению к секущей AC положение внутренних накрестлежащих, то прямые AB и CD , которые их образуют, параллельны.

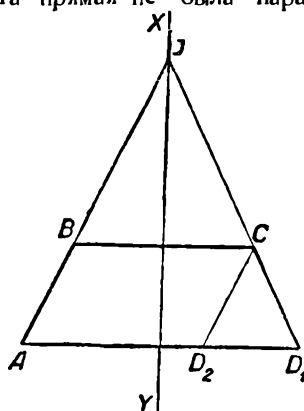
Точно так же из равенства углов A_2 и C_2 следует параллельность прямых AD и BC .

2°. Предположим теперь, что $AB = CD$ и одновременно AB параллельна CD . Оба треугольника ABC и CDA будут равны, так как

они будут иметь по одному равному углу ($\angle A_1 = \angle C_1$ как внутренние накрестлежащие), заключённому между соответственно равными сторонами: AC — общая сторона и $AB = CD$. Из равенства треугольников следует равенство углов A_2 и C_2 и параллельность сторон AD и BC .

46а. Примечания: 1°. Четырёхугольник может иметь две равные стороны AB, CD , а две другие BC, AD параллельные между собою и в то же время не быть параллелограммом (в этом случае он называется *равнобокой трапецией*).

Выбрав произвольно сторону AB , достаточно принять за DC отрезок D_1C (черт. 48), симметричный с AB относительно некоторой прямой XU плоскости, лишь бы только эта прямая не была параллельна AB и пересекала бы её в точке I , расположенной на продолжении AB (а не на самом отрезке AB). Четырёхугольник $ABCD_1$ будет иметь две параллельные стороны (та и другая перпендикулярны к XU) и две другие стороны, равные между собою (как симметричные одна с другой относительно XU); причём эти последние не будут параллельны, так как они имеют общую точку I . Обратно, всякий четырёхугольник, у которого две стороны BC и AD параллельны, а две другие равны между собою, будет параллелограммом или будет иметь (случай равнобокой трапеции) ось симметрии. Действительно, пусть XU будет перпендикуляром, восставленным в середине BC . Мы уже имеем две наклонные к прямой AD , проходящие через C и равные AB : 1) CD_1 , симметричную с AB относительно XU , и 2) CD_2 , образующую параллелограмм вместе с точками A, B, C ; концы этих наклонных лежат на AD , так как последняя параллельна CB . Следовательно, точка D должна совпадать либо с D_1 , либо с D_2 , так как через C можно провести к AD только две наклонные, равные AB .



Черт. 48.

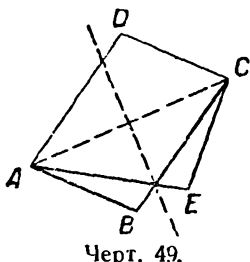
Кажется, что это рассуждение теряет силу, если D_1 совпадает с D_2 , т. е. если CD_1 параллельна AB . Но в этом случае AB параллельна XU , т. е. перпендикулярна к AD ; тогда между точкой C и прямой AD действительно нельзя провести другого отрезка, равного перпендикуляру AB .

2°. Первое обратное предложение п. 46 существенно предполагает, что мы имеем дело с четырёхугольниками в собственном смысле этого слова (п. 21, примечание); только в том случае, когда оба треугольника ABC и ADC (черт. 47) расположены по разные стороны от общей стороны AC , углы A_1 и C_1 этой фигуры будут внутренними накрестлежащими.

Нетрудно построить четырёхугольник в несобственном смысле (называемый *антипараллелограммом*), противоположные стороны которого

будут равны. Для этого достаточно в параллелограмме $ABCD$ (черт. 49) заменить точку D точкой E , ей симметричной относительно диагонали AC .

Можно получить также антипараллелограмм $ABCE_1$, выбирая точку E_1 , симметричную с B относительно перпендикуляра, восстановленного в середине AC таким образом, чтобы четырёхугольник ABE_1C был равнобокой трапецией. Но эта точка E_1 не может быть отличной от E , так как (п. 24, греций признак) по определённую сторону от AC существует только одна точка, которая будет одновременно находиться на расстоянии $AE = BC$ от A и на расстоянии $CE = AB$ от C . Следовательно, всякий несобственный четырёхугольник, противоположные стороны которого равны, будет образован двумя непараллельными сторонами и диагоналями равнобокой трапеции.



Черт. 49.

3°. Два четырёхугольника, имеющие все четыре стороны соответственно равные, не обязательно равны между собою. Другими словами, можно деформировать данный четырёхугольник $ABCD$ (в собственном смысле или нет), не изменяя длин его сторон.

Пусть неизменные длины сторон будут $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Можно построить треугольник ABC со сторонами a и b и произвольным углом, заключённым между ними. Этот треугольник даёт длину AC (диагонали четырёхугольника). Каждому значению AC будет соответствовать (при условии возможности п. 86, книга II) треугольник ACD , построенный на этом отрезке как на основании и с двумя другими сторонами CD , DA , соответственно равными c , d . Следовательно, угол B будет иметь произвольную величину (по крайней мере, в известных пределах). Четырёхугольник, изменяющийся при соблюдении этих условий, называется *шарнирным четырёхугольником*. Это понятие имеет большое значение в приложениях геометрии.

Согласно предыдущему параллелограмм останется параллелограмом, а антипараллелограмм — антипараллелограмом, если сделать каждый из них шарнирным¹⁾.

47. Теорема. *Диагонали параллелограмма делят друг друга в точке пересечения пополам.*

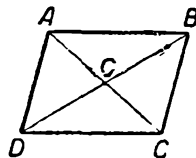
В параллелограмме $ABCD$ (черт. 50) проводим диагонали AC и BD , которые пересекаются в точке O . Два треугольника ABO и CDO равны как имеющие соответственно равные углы и равные стороны

¹⁾ Это заключение теряет силу только в том случае, если параллелограмм преобразуется в антипараллелограмм или наоборот (так как параллелограмм и антипараллелограмм будут единственными четырёхугольниками, противоположные стороны которых соответственно равны). Если преобразование происходит непрерывно, то для преобразования параллелограмма в антипараллелограмм необходимо, чтобы параллелограмм вытягивался в прямую, т. е. чтобы две его соседние стороны, а также и две остальные становились продолжением одна другой.

$AB=CD$ (по предыдущей теореме). Следовательно, $AO=CO$, $BO=DO$.

Обратная теорема. Если диагонали четырёхугольника делятся в точке пересечения пополам, то четырёхугольник — параллелограмм.

Допустим, что в четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 50) $AO=CO$, $BO=DO$. Два треугольника ABO и CDO будут равны как имеющие по равному углу (углы при точке O равны как вертикальные), заключённому между соответственно равными сторонами. Поэтому углы при вершинах A и C в этих треугольниках будут равны и, следовательно, AB будет параллельна CD . Равенство треугольников ADO и BCO доказывает таким же образом, что AD параллельна BC .

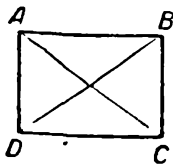


Черт. 50.

Примечание. Мы доказали обратные теоремы в пп. 46 и 47, повторяя в обратной последовательности первоначальные рассуждения, как это было объяснено в п. 32, примечание 2°.

48. Прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы между собой равны, и, следовательно, — все углы прямые. Прямоугольник — параллелограмм, так как его противоположные углы равны между собой.

Ромб называется четырёхугольник, у которого все четыре стороны равны. Ромб является параллелограммом, так как противоположные его стороны равны. Следовательно, в прямоугольнике, как и в ромбе, диагонали делятся в точке пересечения пополам.



черт. 51.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны между собой.

В прямоугольнике $ABCD$ (черт. 51) диагонали AC и BD равны; действительно, треугольники ADC и BCD равны, так как $\angle ADC = \angle BCD$ как прямые углы, сторона DC — общая и $AD=BC$ как противоположные стороны параллелограмма.

Следствие. В прямоугольном треугольнике медиана, выходящая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, потому что, проведя через концы гипотенузы прямые, параллельные катетам, получим прямоугольник, в котором рассматриваемая медиана является половиной диагонали.

Обратная теорема. Всякий параллелограмм, в котором диагонали равны, — прямоугольник.

Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (черт. 51), у которого диагонали равны. Из того, что $AD=BC$, следует, что треугольники ADC и BCD равны по трём сторонам. Углы ADC и BCD также равны, и так как они дополнительные, то каждый из них прямой, откуда и следует, что параллелограмм — прямоугольник.

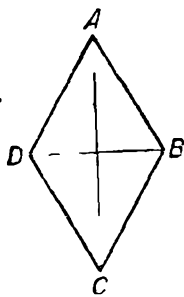
Следствие. Треугольник, в котором медиана равна половине соответствующей стороны, — прямоугольный.

Теорема. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.*

Если четырёхугольник $ABCD$ (черт. 52) — ромб, то треугольник ABD — равнобедренный. Диагональ AC , являясь медианой этого треугольника, является в то же время его высотой и биссектрисой.

Обратная теорема. *Всякий параллелограм, диагонали которого перпендикулярны, есть ромб.*

В самом деле, каждая вершина будет одинаково отстоять от двух смежных вершин, так как она лежит на прямой, проходящей через середину соединяющей их диагонали и перпендикулярной к последней.



Черт. 52.

49. Квадратом называется четырёхугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые.

Таким образом, квадрат одновременно является ромбом и прямоугольником, так что его диагонали равны между собой, перпендикулярны и делятся пополам.

Обратно, всякий четырёхугольник, в котором диагонали равны, перпендикулярны и делятся пополам, есть квадрат.

Два квадрата, имеющие по равной стороне, равны между собой.

50. Лемма. *Две фигуры F и F' равны между собою и имеют одно и то же направление вращения, если точки обеих фигур соответствуют друг другу таким образом, что треугольники ABC и $A'B'C'$, образованные соответственными точками обеих фигур, будут равны между собой и их соответственные углы будут иметь одно и то же направление, как бы ни были выбрана точка C .*

В самом деле, пусть A, B — две точки фигуры F , и A', B' — точки, им соответственные. Отрезок AB , очевидно, должен быть равен $A'B'$. Перенесём вторую фигуру и наложим её на первую так, чтобы эти два равных отрезка совместились. Я утверждаю, что при этом обе фигуры целиком совместятся. Пусть C будет какая-либо третья точка первой фигуры, и C' — точка, ей соответственная. Так как два треугольника $ABC, A'B'C'$ будут равны, то и углы $B'A'C'$ и BAC будут равны и одинаково направлены. Следовательно, при совмещении $A'B'$ с AB прямая $A'C'$ должна пойти по направлению AC . Так как, кроме того, $A'C' = AC$, то точка C' совпадает с C .

Так как это доказательство приложимо ко всем точкам обеих фигур, то обе фигуры совпадают целиком.

Примечания: 1°. Мы нашли достаточное условие равенства двух фигур; это же условие является, очевидно, и необходимым.

2°. Из предыдущего рассуждения следует:

Чтобы совместить две равные фигуры, соответственные углы которых имеют одно и то же направление, достаточно совместить две точки одной фигуры с двумя соответствующими им точками другой

51. Теорема. *Если из всех точек данной фигуры провести равные отрезки, параллельные между собой и направленные в одну и ту же сторону, то концы этих отрезков образуют фигуру, равную данной.*

Пусть прежде всего A, B — две точки первой фигуры, которым соответствуют точки A', B' второй фигуры. Так как отрезки AA' и BB' параллельны и равны, то четырёхугольник $ABB'A'$ — параллелограмм. Следовательно, отрезки AB и $A'B'$ равны и параллельны между собой и направлены в одну и ту же сторону. Таким образом, отрезки, соединяющие между собой соответственные точки в каждой фигуре, равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону.

Далее, трём каким-либо точкам первой фигуры, образующим треугольник, соответствуют три точки, образующие треугольник, равный первому, и так как стороны соответственных углов этих треугольников параллельны и направлены в одну и ту же сторону, то направления соответственных углов одинаковы. Следовательно, обе фигуры равны.

Операция, при помощи которой мы переходим от первой фигуры ко второй, называется *поступательным перемещением*. Очевидно, что поступательное перемещение вполне определено, если даны величина и направление какого-нибудь отрезка AA' , соединяющего одну из точек первой фигуры с соответствующей ей точкой второй. Поступательное перемещение обозначают поэтому такими же буквами, как и этот отрезок, например, говорят: „перемещение AA' “.

Следствия. I. *Если из всех точек прямой провести равные, параллельные и направленные в одну и ту же сторону отрезки, то геометрическое место концов этих отрезков есть прямая, параллельная первой прямой.*

В частности, геометрическое место точек, расположенных по одну и ту же сторону от некоторой прямой и на данном от неё расстоянии, есть прямая, параллельная этой прямой.

II. *Две параллельные прямые на всём своём протяжении одинаково отстоят друг от друга.*

Следовательно, можно говорить о *расстоянии* между двумя параллельными прямыми.

III. *Геометрическое место точек, одинаково отстоящих от двух параллельных прямых, есть третья прямая, параллельная первой и*

УПРАЖНЕНИЯ.

Параллелограммы.

26 Биссектрисы углов параллелограмма образуют прямоугольник; биссектрисы его внешних углов также образуют прямоугольник (доказать).

27 Отрезок любой прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллелограмма, заключённый между его противоположными сторонами, делится в этой точке пополам (доказать).

В силу этого обстоятельства точка пересечения диагоналей параллелограмма называется его *центром*.

28. Два параллелограмма, *вписанных* один в другой, иначе говоря, таких, у которых четыре вершины первого соответственно лежат на четырёх сторонах второго, имеют общий центр (доказать).

29. Угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противоположная сторона меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы (доказать).

30. Если в прямоугольном треугольнике один из его острых углов вдвое больше другого, то один из катетов равен половине гипотенузы (доказать).

Поступательные перемещения.

31. Найти геометрическое место точек, для которых сумма или разность их расстояний до двух данных прямых равна данной длине.

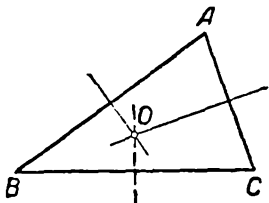
32. Даны две параллельные прямые и две точки A и B , находящиеся вне этих параллельных и расположенные по обе стороны от них. Найти ломаную линию наименьшей длины, соединяющую точки A и B , если вершины этой ломаной лежат на данных прямых, и отрезок ломаной между обеими прямыми имеет данное направление.

ГЛАВА VII.

ПРЯМЫЕ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ, ПРОХОДЯЩИЕ ЧЕРЕЗ ОДНУ ТОЧКУ.

52. Теорема. *Во всяком треугольнике перпендикуляры, восстановленные в серединах сторон, пересекаются в одной точке.*

Пусть дан треугольник ABC (черт. 53). Прямые, перпендикулярные к сторонам AB и AC треугольника и проходящие через их середины, не могут быть параллельными (иначе AB и AC лежали бы на одной



Черт. 53.

прямой) и пересекаются в некоторой точке O . Требуется доказать, что эта точка лежит также и на перпендикуляре к стороне BC , проходящем через её середину.

Точка O , лежащая на прямой, перпендикулярной к стороне AB и проходящей через её середину, одинаково отстоит от точек A и B ; кроме того, она одинаково отстоит от точек A и C как точка, лежащая на перпендикуляре, восстанов-

ленном в середине стороны AC . Следовательно, она одинаково отстоит от точек B и C и потому лежит на перпендикуляре, восстановленном в середине стороны BC .

53. Теорема. *Во всяком треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.*

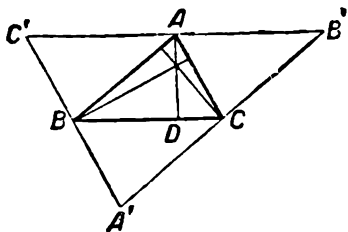
Пусть дан треугольник ABC (черт. 54). Проведём через точку A прямую, параллельную BC , через точку B — прямую, параллельную AC , и через C — прямую, параллельную AB .

Мы получим, таким образом, новый треугольник $A'B'C'$. Мы докажем, что высоты треугольника ABC являются перпендикулярами, вос-

ставленными в серединах сторон нового треугольника, откуда будет следовать, что они проходят через одну точку.

Параллелограмм $ABCB'$ даёт нам $BC = AB'$; точно так же параллелограмм $ACBC'$ даёт $BC = AC'$, так что точка A является серединой $B'C'$.

Высота AD треугольника ABC пройдёт через середину $B'C'$ и, кроме того, будет перпендикулярна к $B'C'$, так как она перпендикулярна к параллельной ей прямой BC .



Черт. 54.

Так как то же самое рассуждение может быть повторено для двух других высот, то теорема доказана.

54. Теорема. *Во всяком треугольнике:*

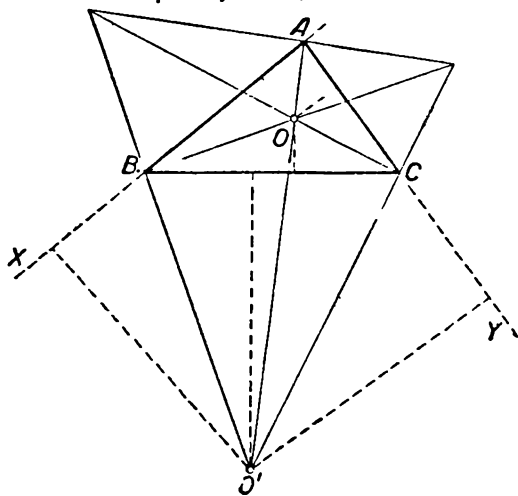
1) *биссектрисы трёх углов пересекаются в одной точке;*

2) *биссектриса одного из углов и биссектрисы двух внешних углов, к нему не прилежащих, пересекаются в одной точке.*

1°. Проведём в треугольнике ABC (черт. 55) биссектрисы углов B и C : они пересекаются в точке O , лежащей внутри треугольника. Эта точка, как принадлежащая биссектрисе угла B , одинаково отстоит

от прямых AB и BC . Принадлежа также биссектрисе угла C , эта точка одинаково отстоит от AC и BC . Таким образом, она одинаково отстоит от AB и AC , и так как она лежит внутри угла A , то она находится на биссектрисе этого угла.

2° Так как сумма двух внешних углов CBX , BCY меньше четырёх прямых, то сумма их половин меньше, чем два прямых. Следовательно, биссектрисы этих двух углов пересекаются (п. 41, следствие) в точке O' , лежащей внутри угла A . Эта точка O'



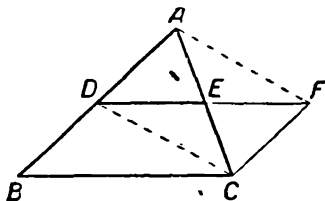
Черт. 55.

будет, как и точка O , одинаково отстоять от трёх сторон треугольника. Она будет принадлежать, таким образом, биссектрисе угла A .

55. Теорема. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен её половине.*

Пусть в треугольнике ABC (черт. 56) D — середина AB , E — середина AC . Отложим на продолжении DE отрезок EF , равный DE .

Четырёхугольник $ADCF$ будет параллелограмом (п. 47), и, следовательно, CF будет равна и параллельна DA или, что то же самое, BD . В таком случае четырёхугольник $DBCF$ будет в свою очередь параллелограмом, а потому DE параллельна BC и, как половина DF , равна половине BC .



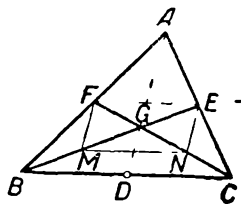
Черт. 56.

56. Теорема. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей на одной трети длины каждой из них, считая от соответствующего основания.

Пусть в треугольнике ABC проведены сначала две медианы BE и CF (черт. 57); я утверждаю, что их точка пересечения G находится на одной

трети каждой из них. Чтобы это показать, обозначим через M и N середины BG и CG . Отрезок MN , соединяющий середины двух сторон в треугольнике BCG , параллелен BC и равен её половине. Но EF также параллелен BC и равен её половине. В таком случае $EFMN$ — параллелограм, в котором диагонали делятся в точке пересечения пополам. Таким образом, имеем $EG = GM = MB$ и $FG = GN = NC$.

Следовательно, медиана BE проходит через точку, лежащую на трети расстояния CF . Но таким же рассуждением можно показать, что третья медиана AD также пройдет через эту точку.



Черт. 57.

Примечание. Точка пересечения медиан называется также *центром тяжести* треугольника. Обоснование этого названия даётся в механике.

УПРАЖНЕНИЯ.

33. Соединить данную точку с точкой пересечения двух данных прямых, если эта последняя лежит за пределами чертежа (п. 53).

34. Во всякой трапеции середины непараллельных сторон и середины диагоналей лежат на одной и той же прямой, параллельной основаниям трапеции; расстояние между серединами непараллельных сторон равно полусумме оснований; расстояние между серединами диагоналей равно полуразности оснований (доказать).

35. Если из точек A , B и из середины C отрезка AB опустить перпендикуляры на произвольную прямую, то перпендикуляр, опущенный из точки C , равен полусумме или полуразности перпендикуляров, опущенных из A и B , смотря по тому, имеют ли эти два перпендикуляра одинаковое направление или противоположные направления (доказать).

36. Середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма; стороны этого параллелограмма соответственно параллельны диагоналям данного четырёхугольника и равны половинам этих диагоналей; его центр лежит на середине отрезка, который соединяет середины диагоналей данного четырёхугольника (доказать).

37. Доказать, что медианы треугольника ABC проходят через одну точку, продолжая медиану CF (черт. 57) за точку F на длину, равную FG .

38. Даны три (различные) прямые, проходящие через одну точку O и точка A на одной из них. Доказать, что существует:

1) треугольник с вершиной в точке A , высотами которого служат данные прямые (есть одно исключение);

2) треугольник с вершиной в точке A , медианами которого служат данные прямые;

3) треугольник с вершиной в точке A , для которого данные прямые служат биссектрисами внутренних или внешних углов (есть одно исключение);

4) треугольник, имеющий середину одной из сторон в точке A , для которого данные прямые служат перпендикулярами, восстановленными в серединах сторон (привести к случаю 1).

ЗАДАЧИ К ПЕРВОЙ КНИГЕ.

39 Во всяком треугольнике наибольшей стороне соответствует наименьшая медиана (доказать).

Треугольник, имеющий две равные медианы, — равнобедренный¹⁾.

40. Допустим, что бильярдный шар отражается от прямолинейного борта таким образом, что две прямые, по которым он движется до и после удара, одинаково наклонены к борту. Пусть теперь D_1, D_2, \dots, D_n — n прямых, лежащих в одной плоскости; A и B — две точки, расположенные с одной и той же стороны от каждой из этих прямых. В каком направлении должен быть пущен шар из точки A , чтобы он прошёл через точку B , после того как он отразится последовательно от всех данных прямых?

Доказать, что путь, по которому пройдёт шар, есть кратчайшая ломаная линия, идущая из точки A в точку B и имеющая вершины последовательно на данных прямых²⁾.

Частный случай. Данные прямые являются четырьмя сторонами прямоугольника, взятыми по порядку, и точка B совпадает с точкой A , которая взята внутри прямоугольника. Показать, что в этом случае путь, пройденный шаром, равен сумме диагоналей прямоугольника.

41. Диагонали обоих прямоугольников, рассмотренных в упражнении 26, расположены на одних и тех же двух прямых, параллельных сторонам данного параллелограмма [обстоятельство, аналогичное³⁾ рассмотренному в п. 54]; одна из этих диагоналей равна разности, а другая — сумме сторон параллелограмма (доказать).

42. В равнобедренном треугольнике сумма расстояний от точки, лежащей на основании, до двух других сторон есть величина постоянная (доказать).

Как изменится это предложение, если рассматриваемая точка взята на продолжении основания?

В равностороннем треугольнике сумма расстояний внутренней точки от трёх его сторон есть величина постоянная (доказать).

¹⁾ Относительно аналогичного свойства высот см. упражнения 19—20 и биссектрис — упражнения 361—361а (в конце тома).

²⁾ Если имеется только одна прямая, задача сводится к той, которая была рассмотрена в упражнениях 13—14.

После того как решена эта первая задача, надо найти способ, который позволял бы из найденного уже решения для случая одной прямой получить решение для случая двух прямых, перейти затем к случаю трёх прямых и т. д.

³⁾ Аналогия, на которую указывает автор, состоит в том, что в п. 54 изучается расположение биссектрис в треугольнике, а здесь — расположение биссектрис в параллелограме. *Прим. ред. перевода.*

Как изменится это предложение, если рассматриваемая точка становится внешней?

43. Если в треугольнике ABC через середину стороны BC провести перпендикуляр к биссектрисе угла A , то эта прямая образует на каждой из сторон AB и AC два отрезка, соответственно равные $\frac{AB+AC}{2}$ и $\frac{AB-AC}{2}$ (доказать).

44. Пусть $ABCD$ и $DEFG$ — два квадрата, помещённые рядом таким образом, что стороны DC , DE имеют одно и то же направление и стороны AD , DG являются продолжением одна другой. На AD и на продолжении DC отложены два отрезка AH и CK , равные DG . Доказать, что четырёхугольник $HBKF$ — также квадрат.

45. На сторонах $A^?B$, AC треугольника вне этого треугольника построены квадраты $ABDE$, $ACFG$ (D и F — противоположные вершины по отношению к A).

Доказать:

1) что отрезок EG перпендикулярен к медиане, выходящей из A , и вдвое длиннее этой медианы;

2) что четвёртая вершина I параллелограмма, у которого три другие вершины будут E , A , G (E и G — противоположные вершины), лежит на высоте данного треугольника, выходящей из A ;

3) что CD , BF соответственно равны и перпендикулярны BI , CI и пересекаются также на высоте, выходящей из A .

46. Даны прямой угол AOB и две взаимно перпендикулярные прямые, выходящие из точки P . Первая прямая пересекает стороны данного угла в точках A и B ; вторая пересекает те же стороны в точках C и D . Доказать, что перпендикуляры, проведённые из точек D , O , C к прямой OP , отсекают на AB два отрезка, равные соответственно AP и PB , но расположенные в обратной последовательности.

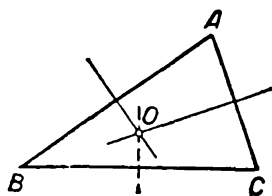
ГЛАВА I.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ОКРУЖНОСТЬЮ.

57. Теорема. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.*

Иначе говоря, *окружность определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой.*

Пусть, в самом деле, A, B, C (черт. 58) — три точки, не лежащие на одной прямой линии. Мы уже доказали (п. 52), что перпендикуляры, восстановленные в серединах отрезков BC , CA и AB , проходят через одну и ту же точку O , равноудалённую от точек A, B и C . Окружность, описанная из точки O , как из центра, радиусом OA , проходит через три данные точки. Эта окружность — единственная окружность, удовлетворяющая поставленному условию, так как центр окружности, которая пройдёт через точки A, B и C , должен обязательно принадлежать трём перпендикулярам, о которых мы говорили.

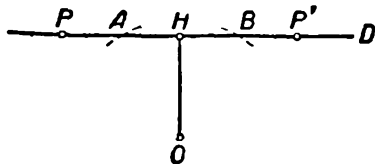


Черт. 58.

Следствие. Мы видим, что *окружность не может иметь двух различных центров*, а следовательно, не может иметь и двух неравных радиусов.

58. Теорема. *Прямая не может пересекать окружность более чем в двух точках.*

Если расстояние от центра до прямой больше радиуса, прямая не пересекает окружности. Если это расстояние меньше радиуса, прямая пересекает окружность в двух точках. Наконец, если расстояние равно радиусу, прямая имеет с окружностью одну общую точку.



Черт. 59.

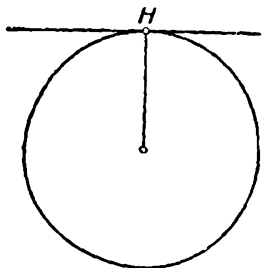
В последнем случае прямая называется *касательной* к окружности.

Пусть дана окружность с центром O и прямая D . Из центра O (черт. 59) опустим на прямую D перпендикуляр OH .

1°. Окружность не может иметь более двух общих точек с прямой D . Это сводится к тому, что из точки O нельзя провести к прямой D более двух наклонных, равных радиусу R (п. 30, следствие).

2°. Если расстояние OH больше радиуса, то расстояние от центра любой точки прямой и подавно (п. 29) будет больше радиуса; следовательно, все точки прямой являются внешними по отношению к кругу.

3°. Если, напротив, OH меньше радиуса, точка H находится внутри окружности, но по обе стороны от H есть точки, расположенные вне окружности. Чтобы в этом убедиться, отложим на прямой D от точки H два отрезка HP и HP' , равные радиусу; расстояния OP и OP' будут непременно больше радиуса. Следовательно, будем иметь две точки пересечения с окружностью: одну между H и P и другую — между H и P' ; это будут единственные точки пересечения (1°).



Черт. 60.

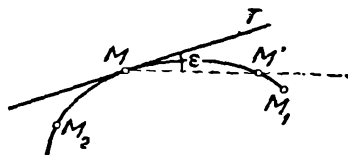
4°. Если, наконец, OH равно радиусу (черт. 60), то точка H будет общей точкой прямой и окружности, но, так же как в 2°, убедимся, что всякая другая точка прямой находится вне окружности.

Следствие. *Через точку, взятую на окружности, можно провести к ней касательную и только одну, причём эта касательная перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку.*

59. Предыдущее определение касательной не годится в качестве определения касательной к произвольной кривой.

Касательной к какой-либо кривой в точке M этой кривой (черт. 61) называется предельное положение, к которому стремится прямая MM' , когда точка M' , описывая кривую, безгранично приближается к M . Иначе говоря:

Прямая MT называется *касательной* в точке M , если для всякого данного угла ϵ можно выбрать по обе стороны от точки M две дуги MM_1 и MM_2 такие, чтобы для всякого положения точки M' , взятой на одной из этих дуг, прямая MM' образовала бы с прямой MT или с её продолжением угол, меньший ϵ^1 .



Черт. 61.

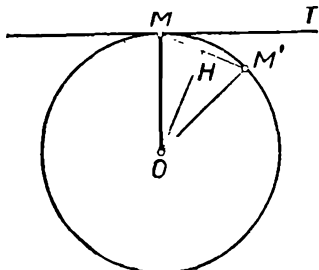
Покажем, что для случая окружности это определение сводится к тому, которое мы дали выше.

Проведём в точке M окружности O перпендикуляр MT к радиусу OM и на хорду MM' (черт. 62) опустим из центра перпендикуляр OH . Эта прямая является высотой равнобедренного треугольника OMM' и в то же время биссектрисой угла при O . Угол TMM' равен углу MOH (как углы с перпендикулярными сторонами) и, следовательно, — половине угла MOM' . Но этот последний можно сделать меньше вся-

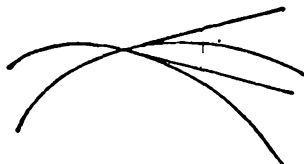
¹) Можно доказать, как это вообще доказывается в теории пределов, что если такая прямая существует, то она единственная.

кого данного угла, если выбрать точку M' достаточно близко к точке M .

60. *Нормалью* к кривой в данной точке называется перпендикуляр к касательной в этой точке. Следовательно, нормаль к окружности в данной точке есть не что иное как радиус, проведённый в эту точку.



Черт. 62.



Черт. 63.

На любой данной окружности имеются две (и только две) такие точки, что нормали в этих точках проходят через данную точку P плоскости (отличную от центра): этими точками будут концы диаметра, проходящего через точку P .

60а. *Углом между двумя кривыми* в точке их пересечения называется угол, образованный их касательными в этой точке (черт. 63). Следовательно, угол между двумя пересекающимися окружностями равен углу между радиусами, проведёнными в их общую точку, или углу, ему дополнительному.

УПРАЖНЕНИЯ.

47. Из всех точек окружности проведены отрезки, равные и параллельные одному и тому же данному отрезку.

Найти геометрическое место концов этих отрезков.

48. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку с различными точками окружности.

49. AB — диаметр окружности O , C — точка, взятая на продолжении этого диаметра за точку B , CDE — секущая из точки C , которая пересекает окружность в точках D и E . Если внешняя часть CD равна радиусу, то угол EOA в три раза больше угла DOB (доказать).

ГЛАВА II.

ДИАМЕТРЫ И ХОРДЫ.

61. На основании определения, данного в п. 19а, сказанное в п. 9 может быть сформулировано так:

Теорема. *Всякий диаметр служит осью симметрии для окружности и для круга.*

Отсюда видно, что окружность имеет бесчисленное множество осей симметрии.

62. *Хордой* называется отрезок, соединяющий концы дуги окружности. Эта дуга, как говорят, *стягивается* хордой. Следует заметить, что всякая хорда стягивает две различные дуги — одну меньшую, а другую большую полуокружности (или обе равные полуокружности, если хорда есть диаметр).

63. Теорема. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и каждую из стягиваемых ею дуг на две равные части.*

В самом деле, диаметр окружности O , перпендикулярный к хорде AB , служит осью симметрии, с одной стороны, окружности, а с другой стороны, — равнобедренного треугольника OAB ; следовательно, он является осью симметрии и для образованной ими фигуры в целом.

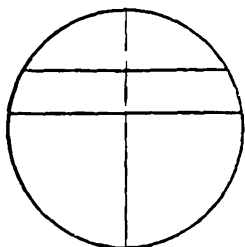
Следствие. Каждые два из пяти следующих условий:

- 1) быть перпендикулярным хорде,
- 2) проходить через центр,
- 3) проходить через середину хорды,
- 4), 5) проходить через середину одной из двух стягиваемых дуг, —

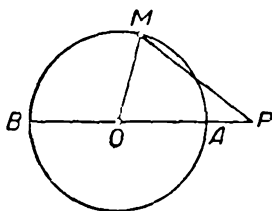
определяют прямую.

Все определённые таким образом прямые сливаются в одну.

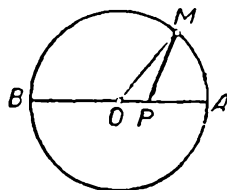
Геометрическое место середин ряда параллельных хорд есть диаметр, перпендикулярный к этим хордам.



Черт. 64.



Черт. 65.



Черт. 66.

Касательная параллельна тем хордам, которые делятся диаметром, проведённым в точку касания, на две равные части.

Теорема. *Две дуги окружности, заключённые между двумя параллельными прямыми, равны (черт. 64).*

Действительно, эти дуги симметричны друг с другом относительно диаметра, перпендикулярного к обоим параллельным прямым.

64. Теорема. *Если в плоскости окружности дана некоторая точка P , то из всех точек, лежащих на окружности, точка, наиболее близкая к P , и точка, наиболее удалённая от P , представляют собой основания нормалей к окружности (п. 60), проходящих через точку P .*

Если A — та из двух точек, которая расположена на полупрямой OP , а B — та точка, которая лежит на противоположной полупрямой (черт. 65 и 66), то расстояние PA равно разности OP и радиуса, а расстояние PB — сумме тех же длин. Следовательно, любая

точка M окружности находится от точки P на расстоянии, большем PA и меньшем PB , как третья сторона треугольника OPM .

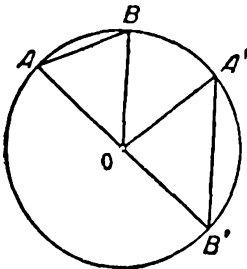
Расстояние PM постоянно увеличивается, когда точка M описывает окружность, перемещаясь из A в B , потому что сторона PM треугольника OPM лежит против угла, который всё время увеличивается и заключён между двумя сторонами постоянной длины.

Следствие. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

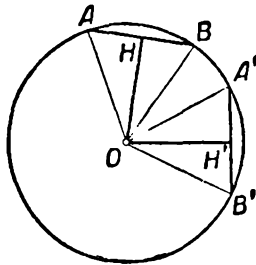
Если, в самом деле, совместить точку P с точкой A , то хорда PM будет, очевидно, меньше диаметра PB .

65. Теорема. В одном круге или в двух равных кругах:

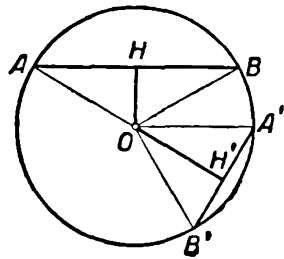
- 1) равным дугам соответствуют равные хорды, и обратно;
- 2) из двух неравных дуг, меньших полуокружности, большая дуга соответствует большей хорде.



Черт. 67.



Черт. 68.



Черт. 69.

1°. Если мы совместим две равные дуги, совмещая их концы, то совместятся и хорды.

Обратно, если хорды равны, то центральные углы равны по третьему признаку равенства треугольников, и, следовательно, дуги также равны.

2°. Если дуга AB меньше дуги $A'B'$ (черт. 67) и, следовательно, угол AOB меньше угла $A'OB'$, то хорда AB будет меньше $A'B'$, как это показывает теорема п. 28, применённая к треугольникам OAB и $OA'B'$.

66. Теорема. В одном и том же круге или в двух равных кругах:

- 1) две равные хорды одинаково удалены от центра, и обратно;
- 2) из двух неравных хорд большая менее удалена от центра.

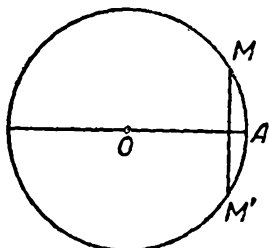
1°. Две равные хорды в одном и том же круге соответствуют двум равным дугам; достаточно наложить друг на друга эти две дуги, чтобы убедиться, что середины обеих хорд находятся на одинаковом расстоянии от центра.

Обратно, если две хорды AB и $A'B'$ круга O (черт. 68) одинаково отстоят от центра, прямоугольные треугольники OHA и $OH'A'$ имеют равные гипотенузы и равные катеты $OH = OH'$; следовательно, $HA = H'A'$ и $AB = A'B'$.

2°. Предположим, что хорда AB больше хорды $A'B'$ (черт. 69). Отсюда следует, что угол AOB больше угла $A'OB'$, и если опустить перпендикуляры OH и OH' , то угол AOH больше угла $A'OH'$.

Но в таком случае угол OAH , являющийся дополнением первого угла, меньше угла $OA'H'$, представляющего собой дополнение второго. Два прямоугольных треугольника OHA и $OH'A'$ имеют, таким образом, равные гипотенузы и неравные острые углы, откуда следует (п. 35), что $OH < OH'$.

67. Представим себе хорду MM' (черт. 70), которая перемещается таким образом, что расстояние её от центра, вначале меньшее радиуса, увеличивается и становится равным этому радиусу. Предположим для определённости, что эта хорда перемещается, оставаясь перпендикулярной к определённому диаметру OA .



Черт. 70.

Длина MM' уменьшается по мере того, как хорда приближается к касательной в точке A , на основании предыдущей теоремы, и точку M можно взять настолько близко к точке A (иначе говоря хорду, настолько близко к касательной), что эта длина будет сколь угодно малой, так как $MM' < 2MA$.

Мы видим, что точки M и M' бесгранично приближаются одна к другой и стремятся слиться с точкой A ; мы выражаем это обстоятельство следующими словами: *касательная имеет с окружностью две общие точки, сливающиеся в A* . Мы увидим, что такой способ выражения позволяет проще сформулировать некоторые теоремы.

УПРАЖНЕНИЯ.

50. Окружность проходит через две данные точки A и B . Пусть C — одна из точек, в которой эта окружность встречает данную прямую, перпендикулярную к прямой AB . Найти геометрическое место точек, диаметрально-противоположных точке C , если окружность, изменяясь, всё время проходит через точки A и B (использовать упражнение 34).

51. Если разделить хорду на три равные части и соединить с центром точки деления, то соответствующий центральный угол не разделится на три равные части (доказать).

Какая из трёх частей угла будет наибольшей (использовать упражнение 7)? Обобщить на случай большего числа частей.

52. Если две хорды одной окружности равны между собой, то расстояния от точки пересечения этих хорд или их продолжений до концов той и другой хорды соответственно равны между собой (доказать).

53. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, имеющих данную длину.

54. Найти наименьшую хорду окружности, которую можно провести через данную точку, находящуюся внутри этой окружности.

ГЛАВА III.

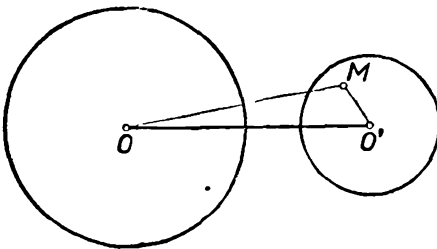
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ.

68. Две окружности не могут иметь более двух общих точек по теореме п. 57.

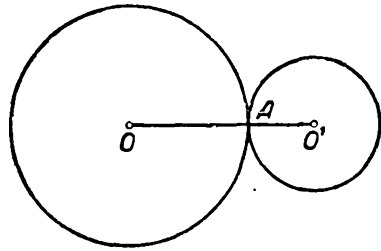
Теорема. Если две окружности пересекаются, то прямая, соединяющая их центры, перпендикулярна к общей хорде и делит её на две равные части. Если они имеют только одну общую точку, то эта точка лежит на линии центров, и обратно.

В самом деле, линия центров обеих окружностей является их общей осью симметрии. Если две окружности пересекаются в некоторой точке, не лежащей на линии центров, то второй их общей точкой будет точка, симметричная с первой относительно линии центров.

Если общая точка — единственная, то она necessarily должна лежать на линии центров.



Черт. 71.



Черт. 72.

Обратно, если имеется общая точка, лежащая на линии центров, то эта точка будет единственной общей точкой. Действительно, вторая общая точка окружностей лежала бы либо на линии центров, либо вне её: в первом случае обе окружности имели бы общий диаметр, во втором случае существовала бы и третья точка пересечения. В обоих случаях окружности совпадали бы между собой.

69. Говорят, что две кривые *касаются* друг друга, если они имеют общую касательную в их общей точке.

На основании предыдущей теоремы это определение в случае двух окружностей сводится к следующему:

Две окружности *касаются* друг друга, если они имеют только одну общую точку, потому что общая точка, через которую проходит общая касательная к окружностям, necessarily является точкой линии центров, и обратно (п. 58, следствие).

70. Пусть O , O' — центры двух окружностей, радиусы которых R , R' ; предположим для определённости, что $R' \leq R$.

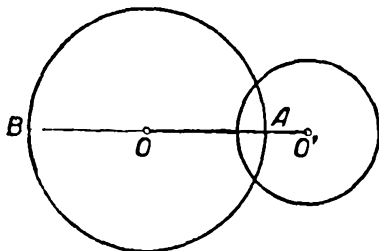
При этом могут иметь место следующие пять случаев:

1°. $OO' > R + R'$ (черт. 71).

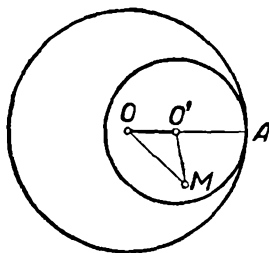
Предположим, что M — точка, лежащая на окружности O' или внутри её, так что $O'M \leq R'$. Тогда (на основании п. 26, следствие) будем иметь: $OM \geq OO' - O'M > R + R' - O'M > R$.

Таким образом, всякая точка, взятая внутри или на второй окружности, является внешней по отношению к первой, а всякая точка внутри или на первой окружности — внешней по отношению ко второй. Две окружности, как говорят, расположены одна *вне* другой.

2°. $OO' = R + R'$. В таком случае OO' можно рассматривать как сумму двух отрезков OA и $O'A$ (черт. 72), соответственно равных R и R' . Точка A — общая; кроме того, ко всякой другой точке можно применить предыдущие рассуждения. Следовательно, окружности *касаются* друг друга *внешним* образом.



Черт. 73.



Черт. 74.

3°. $R + R' > OO' > R - R'$. В этом случае R заключается между суммой и разностью двух отрезков OO' и R' .

Таким образом, из двух точек A и B , в которых окружность O пересекает линию центров, одна внешняя, а другая — внутренняя относительно окружности O' (черт. 73); отсюда следует, что окружность O , представляющая собою линию, идущую из точки A в точку B , встретит вторую окружность в точке, отличной от A и B , т. е. в точке, не лежащей на линии центров. Следовательно, обе окружности имеют две общие точки. Окружности называются *пересекающимися*.

4°. $OO' = R - R'$. В этом случае OO' можно рассматривать как разность двух отрезков OA и $O'A$ (черт. 74), соответственно равных R и R' . Точка A их линии центров — общая, так что окружности *касаются*.

Пусть M — точка, лежащая на окружности O' или внутри этой окружности. Мы будем иметь

$$OM \leq OO' + O'M \leq OO' + R',$$

т. е. $OM \leq R$.

Круг O' целиком, за исключением только точки A , находится в этом случае внутри круга O . Окружности *касаются* друг друга *внутренним* образом.

5°. $OO' < R - R'$ (черт. 75). Пусть снова M — точка, находящаяся внутри или на окружности O' .

Тогда получим:

$$OM \leq OO' + O'M \leq OO' + R' < R.$$

Следовательно, круг O' полностью находится внутри круга O .

Две окружности лежат одна *внутри* другой.

71. Перечисленные выше случаи охватывают все возможности. Отсюда следует, что предложения, обратные предыдущим заключениям, также справедливы. Например, если две окружности пересекаются, то расстояние их центров заключается между суммой радиусов и их разностью; действительно, если бы это расстояние было больше суммы радиусов, то окружности лежали бы одна вне другой; если бы это расстояние было равно той же сумме, то обе окружности касались бы друг друга внешним образом и т. д.

Впрочем, каждое из этих положений можно доказывать и непосредственно. Так, в случае пересекающихся окружностей точка пересечения образует с двумя центрами треугольник, и теоремы п. 26 приводят к предыдущему заключению.

Итак, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема. 1°. Если две окружности расположены одна вне другой, то расстояние между их центрами больше суммы радиусов, и обратно.

2°. Если они касаются друг друга внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов, и обратно.

3°. Если они пересекаются, то расстояние между их центрами заключается между суммой радиусов и их разностью, и обратно.

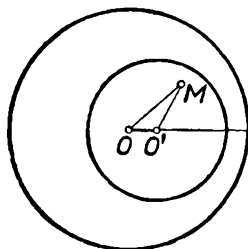
4°. Если они касаются друг друга внутренним образом, то расстояние между их центрами равно разности радиусов, и обратно.

5°. Если одна окружность лежит внутри другой, то расстояние между их центрами меньше разности радиусов, и обратно.

Можно сказать ещё и так: две окружности находятся одна вне другой, одна внутри другой, пересекаются или касаются друг друга, смотря по тому, отсекают ли они на линии центров отрезки, из которых один лежит вне другого, внутри другого или один частично перекрывает другой, или, наконец, оба отрезка имеют общий конец.

72. Если две окружности, вначале пересекающиеся, изменяются таким образом, что становятся касательными в точке A , то их точки пересечения неограниченно приближаются одна к другой и к точке A (см. упр. 55).

Поэтому, как и выше (п. 67), говорят, что две окружности, касающиеся друг друга, имеют две общие точки, слившиеся между собой.



Черт. 75.

УПРАЖНЕНИЯ.

55. Пусть O — центр окружности радиуса R ; O' — центр другой окружности радиуса R' , которая пересекает первую окружность; A — одна из точек, в которых прямая OO' пересекает окружность O ; B — произвольная точка, взятая на этой же самой окружности, и в частном случае сколь угодно близко от A .

Показать, что:

1) в том случае, когда точка O' лежит на продолжении отрезка OA за точку A , одна из точек пересечения обеих окружностей лежит на меньшей дуге AB , если разность $R + R' - OO'$ меньше $OB + O'B - OO'$;

2) в том случае, когда точка O' лежит на самом отрезке OA , то же обстоятельство имеет место, если разность $OO' - (R - R')$ меньше разности $OO' - (OB - O'B)$;

3) в том случае, когда точка O' лежит на продолжении отрезка OA за точку O , то же обстоятельство имеет место, если разность $OO' - (R' - R)$ меньше разности $OO' - (O'B - OB)$.

56. Найти наименьший и наибольший отрезки, которые можно провести между двумя окружностями.

57. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности.

58. Если через точку прикосновения двух касающихся окружностей провести произвольную прямую, то она пересечёт обе окружности в двух других точках, таких, что радиусы, проведённые в эти точки, параллельны между собой (доказать).

59. Две окружности, касающиеся друг друга внутренним образом, остаются касающимися друг друга, если, не изменяя положения центров, увеличить или уменьшить оба радиуса на одну и ту же величину (доказать).

Две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, остаются касающимися друг друга, если, не изменяя положения центров, уменьшить один из радиусов и увеличить другой на ту же самую величину (доказать).

ГЛАВА IV.

СВОЙСТВА ВПИСАННОГО УГЛА.

73. Углом, вписанным в окружность, называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец; таким образом, вписанный угол есть угол, вершина которого находится на окружности.

Теорема. Всякий вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами.

Он равен половине центрального угла, заключающего ту же дугу.

Заметим, что первая часть этой теоремы предполагает соглашение, установленное в п. 17 (следствие)¹⁾.

Мы будем различать три случая:

¹⁾ Вторая часть имеет пока смысл только тогда, когда дуга, заключённая между сторонами угла, меньше полуокружности (п. 13), следовательно, когда вписанный угол меньше 90° , т. е. прямого угла.

Однако в тригонометрии приходится рассматривать (см. учебники тригонометрии) центральные углы, превосходящие 180° ; это позволяет высказать теорему, приведённую в тексте, для всех случаев.

Первый случай. Одна из сторон вписанного угла проходит через центр.

Пусть $\angle BAC$ — вписанный угол (черт. 76), сторона которого AC проходит через центр. Соединим B с O . Мы образуем, таким образом, равнобедренный треугольник OAB , в котором углы A и B равны. Внешний угол BOC этого треугольника равен сумме $\angle A + \angle B$ и, следовательно, равен удвоенному углу A . Так как угол BOC измеряется дугой BC , то угол BAC измеряется половиной той же дуги.

Второй случай. Центр находится внутри вписанного угла.

Пусть $\angle BAD$ — вписанный угол (черт. 76). Проведем прямую AO , которая пересечет окружность в точке C , мы разбиваем вписанный угол на две части: $\angle BAC$, $\angle CAD$, для каждой из которых наша теорема уже доказана (1-й случай).

Таким образом (в соответствии с п. 18), имеем:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \text{ дуги } BC, \quad \angle CAD = \frac{1}{2} \text{ дуги } CD;$$

складывая, получим:

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \text{ дуги } BD.$$

Третий случай. Центр находится вне вписанного угла.

Пусть $\angle EAB$ — вписанный угол (черт. 76). Проводя опять диаметр AC , мы сможем написать:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \text{ дуги } BC, \quad \angle EAC = \frac{1}{2} \text{ дуги } EC,$$

откуда, вычитая,

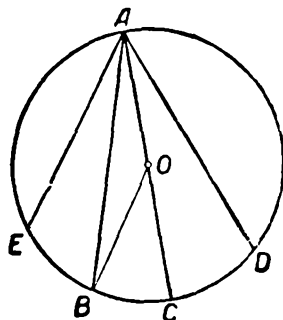
$$\angle EAB = \frac{1}{2} \text{ дуги } EB.$$

Следствия: I. Все углы, вписанные в одну и ту же дугу окружности, равны как имеющие одну и ту же меру.

II. Угол, вписанный в полуокружность, — прямой как измеряющийся четвертью окружности.

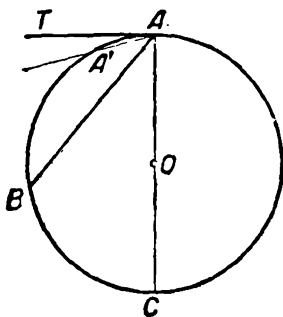
74. Теорема. Угол, образованный касательной и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, отсекаемой этой хордой.

Угол BAT , образованный касательной AT и хордой AB (черт. 77), можно рассматривать как предельное положение угла, образованного хордой AB с хордой AA' , когда точка A' бесконечно приближается к точке A .

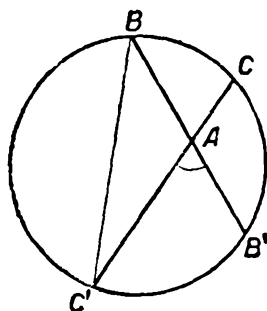


Черт. 76.

Впрочем, доказательство, данное для третьего случая предыдущей теоремы, применимо и в данном случае; равенство $\angle EAC = \frac{1}{2}$ дуги EC должно быть просто заменено равенством $\angle TAC = \frac{1}{2}$ дуги AC ,



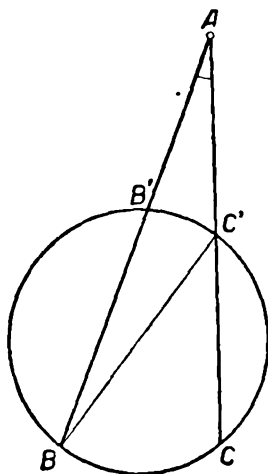
Черт. 77.



Черт. 78.

которое вытекает из того, что угол TAC — прямой, а дуга AC равна полуокружности.

75. Теорема. Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися внутри окружности, измеряется полусуммой дуг, заключающихся одна — между его сторонами, другая — между их продолжениями.



Черт. 79.

Пусть продолжения сторон угла BAC (черт. 78) пересекают окружность в точках B' и C' . Соединим B с C' . Углы C' и B измеряются соответственно дугами BC и $B'C'$. Но эти два угла в сумме составляют угол A , внешний для треугольника ABC' .

76. Теорема. Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.

Пусть угол BAC (черт. 79) образован секущими $AB'B$, $AC'C$. Проведём опять BC' . Угол $BC'C$ — внешний по отношению к треугольнику ABC' , — равен сумме $\angle A + \angle B$. Следовательно, угол A можно вычислить как разность $\angle BC'C - \angle B$; это доказывает теорему, так как угол $BC'C$ заключает дугу

BC , а угол B — дугу $B'C'$.

Примечание. Если одну из секущих, например $AB'B$, заменить касательной AT (черт. 80), то теорема и её доказательство имеют место без всяких изменений, при условии, что точка T одновременно играет роль точки B и точки B' , одним словом, при допущении, что

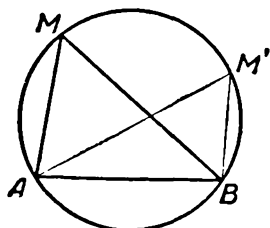
касательная имеет с окружностью две общие точки, слившиеся в точке T , в согласии с условием п. 67.

77. Теорема. *Геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой, из которых данный отрезок этой прямой виден под данным углом, есть дуга окружности, имеющая своими концами концы данного отрезка.*

Пусть AB — данный отрезок прямой; M — точка искомого геометрического места¹⁾, иначе говоря, такая точка, что угол AMB равен данному углу (черт. 81). Если через точки A , M и B провести дугу окружности, ограниченную точками A и B , то всякая точка этой дуги принадлежит искомому геометрическому месту, так как угол $AM'B$ равен углу AMB (п. 73). Напротив, всякая другая точка N плоскости (расположенная с той же стороны от прямой AB) лежит или внутри или вне окружности, которую мы только что провели. В первом случае угол ANB больше данного угла (п. 75); во втором случае меньше его (п. 76), и, следовательно, точка N не будет точкой искомого геометрического места, что и требовалось доказать.

Построенная таким образом дуга называется дугой, *вмещающей* данный угол и *опирающейся* на отрезок AB .

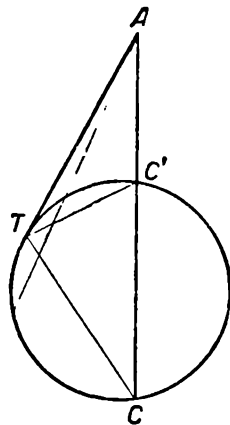
Если бы мы отказались от условия, чтобы точки искомого геометрического места находились с определённой стороны от AB , то ясно, что геометрическое место точек состояло бы из двух дуг, симметричных друг с другом относительно AB .



Черт. 81.

79. Четыре произвольно взятые точки вообще не будут лежать на одной окружности, потому что три из них определяют окружность, которая, в общем случае, не пройдёт через четвертую точку. Условие, при котором четыре точки лежат на одной окружности, даёт нам следующая теорема:

¹⁾ Такие точки несомненно существуют. Мы получим одну из них, проведя через точки A и B прямые, параллельные сторонам некоторого угла, равного данному углу, и выбирая ту или другую из двух новых вершин построенного таким образом параллелограмма.



Черт. 80.

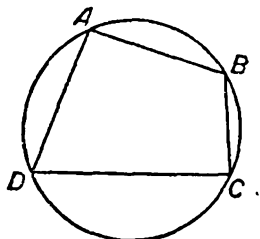
78. Если данный угол — прямой, предыдущая формулировка, в соединении со следствием II п. 73, показывает нам, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, для которой этот отрезок служит диаметром.*

Это вытекает также из двух следствий п. 48.

Теорема. Во всяком выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность, противоположные углы — дополнительные.

Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 82) угол A измеряется половиной дуги BCD ; угол C измеряется половиной дуги BAD . Дуги BCD и BAD составляют в сумме полную окружность; поэтому сумма $\angle A + \angle C$ равна центральному углу, который соответствует полуокружности, т. е. равна двум прямым.

80. Обратная теорема. Если в выпуклом четырёхугольнике противоположные углы дополнительные, то четырёхугольник может быть вписан в окружность.



Черт. 82.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 82) углы A и C — дополнительные. Дуга BD окружности BAD , не содержащая точки A , является геометрическим местом точек, из которых отрезок BD виден под постоянным углом (п. 77), дополнительным к углу A (п. 79). Эта дуга проходит, следовательно, через точку C .

81. Примечание. Во всяком четырёхугольнике можно рассматривать четыре угла

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$, и далее, проведя диагонали AC и BD , ещё восемь углов, которые обозначены цифрами с 1 по 8 на чертеже 83.

Если четырёхугольник вписанный, то:

- 1) $\angle A$ и $\angle C$ — дополнительные;
- 2) $\angle B$ и $\angle D$ — дополнительные;
- 3) $\angle 1$ и $\angle 4$ равны (как вписанные в одну и ту же дугу);

точно так же:

- 4) $\angle 5$ и $\angle 8$ равны;
- 5) $\angle 2$ и $\angle 7$ равны;
- 6) $\angle 3$ и $\angle 6$ равны.

Обратно, если какое-либо одно из этих условий имеет место, то четырёхугольник — вписанный (пп. 77, 80).

Таким образом, каждое из условий 1, 2, 3, 4, 5, 6 влечёт за собою все остальные.

82. Условия 1 и 2; указанные в предыдущем примечании, могут быть представлены в форме, которая их сближает с условиями 3—6.

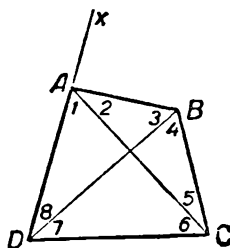
Заметим прежде всего, что точки A и B (черт. 83) находятся с одной и той же стороны от CD ; следовательно, треугольники CDA и CDB имеют одно и то же направление вращения, так что равные углы DAC и DBC имеют одинаковое направление. То же самое имеет место для углов ACB , ADB и т. д. Напротив, углы DAB и DCB имеют противоположное направление, так как A и C находятся по разные стороны от BD . Продолжим DA за точку A по направлению AX ; таким образом получается угол XAB одного направления с углом DCB . Мы видим, что эти два одинаково направленных угла равны, если углы DAB и DCB — дополнительные, и мы приходим к следующему заключению

Если четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности, то углы одного направления, образованные, с одной стороны, прямыми AC и AD и, с другой стороны, прямыми BC и BD , равны между собою; кроме того, при этом выполняются все те условия, которые получаются из этого последнего условия любой перестановкой букв A, B, C и D .

Обратно, любое из шести получаемых, таким образом, условий влечёт за собою возможность вписать данный четырёхугольник в окружность и, следовательно, выполнение пяти остальных условий.

82а. Формулировка п. 77 может быть точно так же заменена следующей: геометрическое место вершин равных и одинаково направленных углов, стороны которых (или их продолжения) проходят через две данные точки, есть окружность, проходящая через эти две точки.

Так как всякая окружность может быть получена таким путём, то эту формулировку можно рассматривать как новое определение окружности, которое равносильно первоначальному и может в случае надобности его заменить.



Черт. 83.

УПРАЖНЕНИЯ.

60. Найти геометрическое место середины хорд окружности, которые проходят через заданную точку.

61. На каждом из радиусов окружности откладывают от центра отрезок, равный расстоянию конца этого радиуса до одного определённого диаметра. Найти геометрическое место концов построенных таким образом отрезков.

62. Дана окружность и её хорда AB . Пусть CD — подвижная хорда той же окружности, имеющая постоянную длину. Найти:

1) геометрическое место точек пересечения I прямых AC и BD ;

2) геометрическое место точек пересечения K прямых AD и BC ;

3) геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ICD и KCD . Показать, что эти два геометрических места соответственно равны двум предыдущим.

63. Пусть A и B — заданные точки некоторой окружности и M — переменная точка той же окружности. На продолжении отрезка AM откладывают отрезок $MN = MB$. Найти геометрическое место точек N .

64. Показать, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC , где A, B и C — три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A .

65. Если через точки пересечения A и B двух окружностей провести две произвольные секущие, то хорды, соединяющие между собою новые точки пересечения этих прямых с двумя окружностями, параллельны (доказать).

66. Биссектрисы углов любого четырёхугольника образуют четырёхугольник, который может быть вписан в окружность. То же имеет место для биссектрис внешних углов (доказать).

67. Через середину C дуги AB проводят две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D, E и хорду AB в точках F, G . Доказать, что четырёхугольник $DEGF$ может быть вписан в круг.

68. Дана окружность и на ней определённая точка P , далее дана прямая и на этой прямой определённая точка Q . Через точки P и Q проводят произвольную окружность, которая второй раз пересекает данную окружность в точке R , а данную прямую — в точке S . Доказать, что прямая RS пересечёт данную окружность в одной и той же точке, как бы ни была выбрана вторая окружность.

69. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена произвольная секущая, которая второй раз пересекает окружности в точках C и C' . Показать, что хорда CC' видна из точки B под одним и тем же углом, как бы ни была выбрана секущая, и что этот угол равен углу между радиусами, проведёнными в точки C и C' .

Через точку A проведена вторая секущая, пересекающая окружности в точках D и D' . Показать, что угол между хордами CD , $C'D'$ равен тому же углу или углу, ему противоположному.

Как изменится эта формулировка, когда обе секущие сольются?

70. Во всяком треугольнике точки, симметричные с точкой пересечения высот относительно трёх сторон треугольника, лежат на описанной окружности (доказать).

71. Доказать, что высоты треугольника являются биссектрисами углов треугольника, образованного их основаниями.

Применить метод п. 82 к четырёхугольникам, образованным двумя сторонами и двумя высотами, доказав, что эти четырёхугольники вписанные, и используя вытекающие отсюда угловые свойства.

Тот же путь доказательства применим в ряде других вопросов, и в частности в следующем¹⁾:

72. Основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на три стороны вписанного треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

Обратно, если основания перпендикуляров, опущенных из какой-либо точки плоскости треугольника на три его стороны, лежат на одной линии, то эта точка лежит на описанной окружности (доказать).

ГЛАВА V.

ПОСТРОЕНИЯ.

83. Под *геометрическими построениями* понимают построения, производимые при помощи линейки и циркуля.

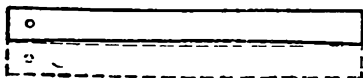
Эти построения теоретически абсолютно точны. Практически эти построения действительно очень точны, но тем не менее и они, как и все другие построения, дают поводы к ошибкам (например, вследствие того, что линии, проводимые карандашом, имеют толщину).

Линейка есть инструмент, служащий для того, чтобы проводить прямые линии. Для того чтобы линейка была правильной, необходимо, чтобы оба её края были прямолинейны. Чтобы убедиться, выполнено ли это условие, пользуются самым определением прямой линии. Проводят сначала линию вдоль по краю линейки (черт. 84); затем поворачивают линейку и прикладывают её тем же краем с другой стороны к проведённой линии. Если линейка достаточно верна, то вторая

¹⁾ То же самое рассуждение применимо и в нескольких задачах, помещённых далее — на стр. 104—106.

линия, проведённая вдоль края линейки в её новом положении, должна совпадать с первоначальной.

Циркуль состоит из двух заострённых стержней, соединённых между собой шарниром. *Расстояние* циркуля есть расстояние между острями; инструмент позволяет переносить отрезки или описывать из произвольного центра окружность, имеющую радиусом это расстояние.



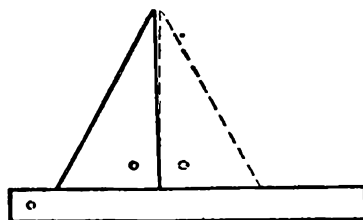
Черт. 84.

84. Кроме двух инструментов, о которых мы говорили, на практике

употребляются ещё угольник и транспортир.

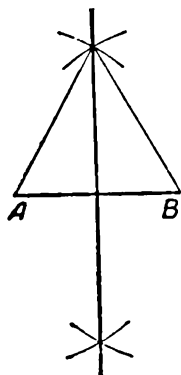
Угольник — это прямоугольный треугольник, сделанный из дерева или другого материала. Хороший угольник должен удовлетворять двум условиям: 1) стороны его должны быть прямолинейны; 2) угол угольника должен быть прямой.

Первое из этих условий проверяется так же, как для линейки; угольники, которыми приходится пользоваться на практике, обычно удовлетворяют ему с достаточной степенью точности. Чтобы проверить, выполняется ли второе, прикладывают угольник к краю линейки (черт. 85)



Черт. 85.

и проводят прямую вдоль того края, который должен быть перпендикулярен к линейке. Прикладывая затем угольник в обратном направлении, как показано на чертеже, проводят снова прямую, которая должна совпадать с первой. Это второе условие часто выполняется только приближённо; поэтому второе условие и не предполагается в точных геометрических построениях.



Черт. 86.

Транспортир служит для измерения углов в градусах. Он обыкновенно состоит из рогового или медного полукруга, разделённого на 180 частей. При этом деления могут быть нанесены только приближённо; транспортир, будучи полезен на практике, не является геометрическим инструментом.

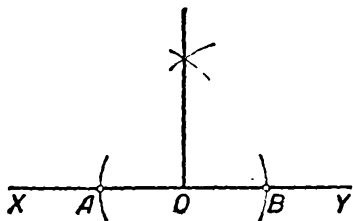
85. Построение I. (Первое основное построение.) *Построить прямую, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину* (черт. 86).

Эта прямая есть геометрическое место точек, одинаково удалённых от точек A и B (п. 33). Поэтому, если из точек A и B, как из центров, описать равные окружности радиусом, достаточно большим для того, чтобы они пересекались, то точки пересечения будут принадлежать искомому перпендикуляру; остаётся только соединить эти две точки.

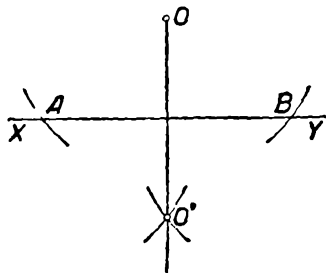
К этому построению приводятся следующие два:

Построение 2. *Через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой.*

Из данной точки O (черт. 87 или 88), как из центра, описывают окружность, которая пересекает данную прямую в двух точках A и B . Перпендикуляр, восстановленный в середине AB , проходит через точку O ,



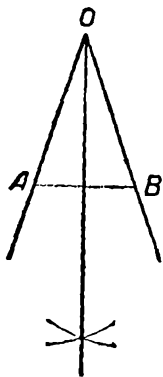
Черт. 87.



Черт. 88.

так как $OA = OB$; следовательно, этот перпендикуляр и есть искомая прямая

Если точка O находится вне прямой, то можно принять расстояние OA за общий радиус тех окружностей, которые мы проводим (построение 1), чтобы построить перпендикуляр в середине AB : нам не придётся, таким образом, менять растворение циркуля. Две окружности пересекаются в точке O и в точке O' , симметричной с первой относительно прямой AB (черт. 88). Это упрощение неприменимо, когда точка O находится на прямой, так как в этом случае она совпала бы с O' ; оно нецелесообразно, если точка O расположена очень близко от прямой, потому что обе точки O и O' , будучи очень близкими одна к другой, не определяют достаточно точно прямую, которая их соединяет.



Черт. 89.

Построение 3. *Построить биссектрису данного угла AOB (черт. 89).*

Отложим на сторонах угла два равных отрезка OA и OB так, чтобы образовался равнобедренный треугольник. Биссектриса данного угла является не чем иным, как перпендикуляром в середине AB (п. 23).

В отношении проведения дуг возможно то же самое упрощение, как и выше.

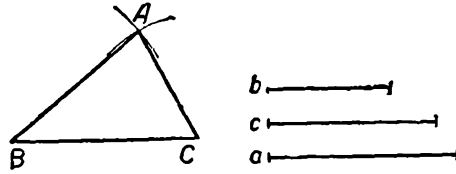
86. Построение 4. (Второе основное построение.) *Построить треугольник по трём сторонам.*

Взяв отрезок BC , равный первой стороне (черт. 90), описываем из точек B и C , как из центров, две окружности, которые имеют своими радиусами соответственно две другие стороны; точка их пересечения A

даёт третью вершину треугольника. Таким образом, эта вершина имеет два возможных положения, так как окружности пересекаются в двух точках, но соответствующие треугольники, будучи симметричными друг другу относительно BC , между собою равны.

Условия возможности построения. Чтобы две окружности пересекались, необходимо и достаточно (пп. 70, 71), чтобы одна сторона была заключена между суммой двух других и их разностью или (п. 26) чтобы каждая сторона была меньше суммы двух других сторон.

Когда известны длины сторон, достаточно убедиться, что наибольшая сторона меньше суммы двух других.



Черт. 90.

Построение 5. *Через точку, взятую на прямой, провести другую прямую, образующую с данной угол, равный данному углу.*

На сторонах данного угла O берём две произвольные точки A и B и строим треугольник, равный OAB , откладывая сторону, соответствующую OA , на данной прямой от данной точки. На практике треугольник OAB берут равнобедренным, чтобы иметь только два различных раствора циркуль.

Построение 6. *Зная два угла треугольника, найти третий.*

Строим два прилежащих друг к другу угла, равных соответственно двум данным углам, и продолжаем одну из необщих сторон; получаем третий угол, дополнительный для суммы двух первых, иначе говоря, равный искомому третьему углу треугольника.

Условие возможности. Сумма двух данных углов должна быть меньше двух прямых.

Построение 7. *Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.*

На сторонах угла, равного данному углу, откладываем данные стороны.

Построение 8. *Построить треугольник по стороне и двум углам¹⁾.*

Прежде всего, зная два угла, мы знаем и третий (построение 6) и в частности — оба угла, прилежащие к данной стороне; их мы и строим при концах этой стороны (построение 5).

Условие возможности то же, что и для построения 6.

87. Построение 9. *Построить треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.*

Пусть в треугольнике ABC даны угол A и стороны a и b , противолежащие соответственно углам A и B .

¹⁾ При этом предполагается, что для каждого из двух данных углов указано, прилежит ли он к данной стороне или нет. *Прим. ред. перевода.*

Построив угол, равный углу A (черт. 91), отложим на одной из его сторон отрезок AC , равный b . Точка C , таким образом, определена; точка B должна находиться на окружности, имеющей точку C своим центром и отрезок a — радиусом. Пересечение этой окружности со второй стороной угла A и даст искомую вершину B , положение которой окончательно определяет треугольник.

Исследование. Задача будет иметь решение во всех случаях, когда окружность, о которой мы говорим, пересечёт полупрямую AH (черт. 91) — вторую сторону угла A .

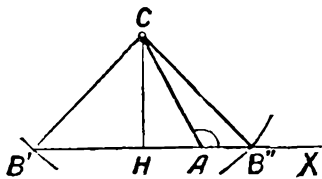
Из точки C опустим перпендикуляр CH на AH .

1°. Если $CH > a$, окружность не пересекает прямой, и задача невозможна.

2°. Если $CH < a$, окружность пересекает бесконечную прямую AH в двух точках B' , B'' . Необходимо узнать, нахолятся ли эти точки на полупрямой AH или по другую сторону от точки A .

Мы будем различать два случая:

1) Угол A — острый. В этом случае точка H , середина $B'B''$, расположена на полупрямой AH . Следовательно, то же самое имеет место, по крайней мере, для одной из двух точек B' и B'' , так что всегда имеется, по крайней мере, одно решение. Имеется и второе решение, если вторая из этих точек лежит между точками A и H , а это будет в том и только в том случае, когда $a < b$.



Черт. 92.

2) Угол A — тупой (черт. 92). При этом точка H не будет находиться на полупрямой AH ; следовательно, по крайней мере одна из точек B' , B'' не будет отвечать поставленному условию: имеется самое большее одно решение. Это решение существует, если

вторая точка более удалена от H , чем точка A , а это будет в том и только в том случае, когда $a > b$.

87а. Наконец, если угол A — прямой, задача формулируется так:

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету. Решение — единственное, если данная гипотенуза больше данного катета.

Примечание. Из всего предыдущего следует такая теорема:

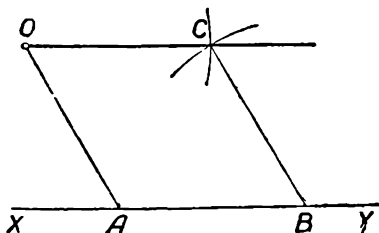
Теорема. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, и угол первого треугольника, лежащий против одной из этих сторон, равен углу второго треугольника, лежащему против соответственной стороны, то углы, противолежащие вторым равным сторонам, или равны или дополняют. Первый случай (который влечёт за собой равенство треугольников) имеет место всегда, если углы, равенство которых дано, прямые или тупые.

88. Построение 10. *Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.*

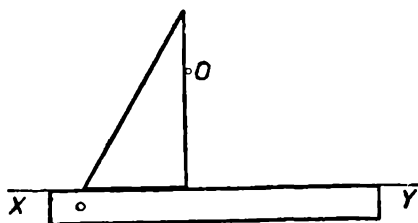
Взяв на данной прямой две произвольные точки A и B (черт. 93), я провожу из данной точки O , как из центра, окружность радиусом AB , а из точки B , как из центра, — окружность радиусом OA . Эти две линии пересекаются (не с той стороны от OB , где находится точка A) в некоторой точке C , которая принадлежит искомой прямой, потому что четырёхугольник $OABC$, в котором противоположные стороны равны, параллелограмм.

Предпочтительно выбирать $AB=OA$, так чтобы все проведённые окружности имели один и тот же радиус.

89. Построения 2 и 10 могут быть осуществлены с помощью угольника.



Черт. 93.



Черт. 94.

Чтобы выполнить построение 2: *через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой*, прикладывают линейку одним краем к данной прямой и заставляют скользить вдоль этого края линейки один из катетов угольника до тех пор, пока второй его катет не пройдёт через данную точку (черт. 94) и, следовательно, будет искомым перпендикуляром.

Это построение предполагает выполненным условие, вообще говоря, недостаточно хорошо выполняющееся на практике, что угол угольника прямой; поэтому оно не применяется в тех чертежах, где требуется большая точность.

Чтобы выполнить построение 10: *через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой*, сначала совмещают гипотенузу угольника с данной прямой (черт. 95). Прикладывая затем линейку к одному из катетов и удерживая её в этом положении, заставляют скользить угольник вдоль линейки до тех пор, пока край угольника, совпадавший первоначально с данной прямой, не пройдёт через данную точку.

Построенная таким образом прямая и данная параллельны между собой, так как они образуют с одной и той же секущей (край линейки) равные соответственные углы (углы A и A_1 на чертеже).

Это построение предполагает только, что края линейки и угольника прямолинейны. Оно не менее точно, чем построение, выполняемое

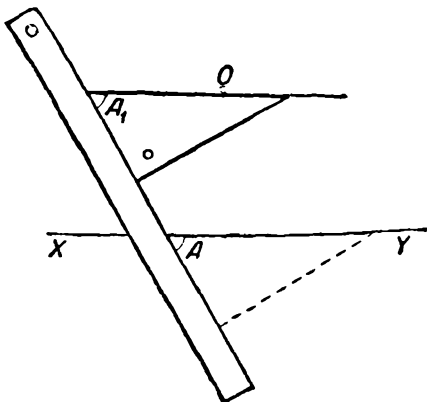
при помощи циркуля, но проще его и потому часто употребляется вместо него на практике.

90. Построение 11. Разделить дугу окружности на две равные части.

Проводим через середину хорды, стягивающей эту дугу, прямую, к ней перпендикулярную (построение 1).

Построение 12. Построить окружность, проходящую через три данные точки, A, B, C , не лежащие на одной прямой.

Строим перпендикуляры в серединах отрезков, попарно соединяющих данные три точки; точка их пересечения даёт центр искомой окружности O , OA — её радиус.



Черт. 95.

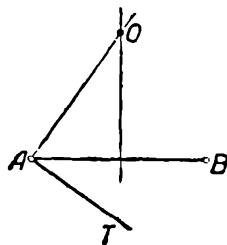
Полученная таким образом окружность называется *описанной* около треугольника, образованного тремя точками.

Вообще, многоугольник (или ломаная линия) называется *вписанным* в некоторую линию, а эта последняя — *описанной* около него, если все вершины многоугольника находятся на этой линии.

Примечание. Если бы три точки A, B и C лежали на одной прямой, то окружность не существовала бы; но

мы должны были бы считать, что она заменяется прямой линией ABC .

В самом деле, *прямую линию можно рассматривать как предельный случай окружности*, центр которой безгранично удаляется. Действительно, прямая AB есть геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под постоянным углом, равным нулю или двум прямым. Возможно, кроме того, и непосредственно доказать, что окружность, проходящая через две точки A и B , центр которой безгранично удаляется, имеет своим пределом прямую линию AB (определив предварительно надлежащим образом, как следует понимать это выражение).



Черт. 96.

Построение 13. Построить окружность, зная две точки A и B и касательную AT в одной из них.

Центр O будет точкой пересечения перпендикуляра к отрезку AB , проходящего через его середину, и перпендикуляра к AT в точке A . Действительно, окружность с центром O и радиусом OA будет касаться AT в точке A и пройдет через точку B (черт. 96).

Примечание. Это построение представляет собою предельный случай предыдущего на основании общего определения касательной (п. 59).

Построение 14. Построить дугу, имеющую своей хордой данный отрезок и вмещающую данный угол.

Пусть AB — данный отрезок. Строим одну из точек M искомого геометрического места (см. сноску п. 77) и проводим окружность AMB ¹⁾. Иначе: заметим, что касательная в точке A к искомой окружности образует с отрезком AB данный угол (пп. 73 и 74); это позволяет построить касательную в точке A (построение 5) и свести построение к предыдущему.

91. Построение 15. Провести касательную в данной точке окружности.

Строим перпендикуляр к радиусу в точке касания.

Построение 16. Построить касательную к окружности, параллельную данному направлению.

Диаметр, проходящий через точку касания, должен быть перпендикулярен к данному направлению; так как этот диаметр пересекает окружность в двух точках, то задача имеет два решения.

Построение 17. Провести касательную к окружности из какой-либо точки, лежащей в её плоскости.

Первый способ. Пусть требуется из точки A провести касательную к окружности O (черт. 97). Допустим прежде всего, что задача решена, и пусть T — точка касания.

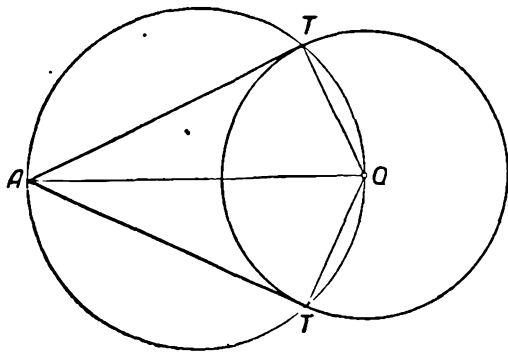
Так как угол ATO — прямой, то точка T принадлежит окружности, имеющей своим диаметром отрезок OA .

Обратно, если точка T данной окружности принадлежит окружности, построенной на OA как на диаметре, то касательная в точке T пройдет через точку A , так как угол OTA — прямой.

Следовательно, точки T , которые отвечают условию задачи, будут общими точками данной окружности и окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре.

Второй способ. Пусть T — снова искомая точка касания.

Построим на продолжении отрезка OT за точку T отрезок TO' , равный OT (черт. 98). Так как отрезок TA перпендикулярен OT , то точка O' симметрична с точкой O относительно AT , в силу чего $AO' = AO$. Точка O' принадлежит, таким образом, окружности с центром A и радиусом OA .



Черт. 97.

¹⁾ Так обозначается окружность, проходящая через точки A , M и B .
Прим. ред. перевода.

Так как она принадлежит, кроме того, окружности, имеющей общий центр с данной окружностью и удвоенный радиус, то она определится пересечением этих двух окружностей.

Обратно, если точка O' такова, что $AO' = AO$, то точка T , середина OO' , есть точка прикосновения касательной, проведённой через A к окружности с центром O и радиусом OT , в силу свойств равнобедренного треугольника.

Исследование. Будем исходить, например, из второго способа построения. Для существования решения необходимо, чтобы две ок-

ружности, определяющие точку O' , пересекались, иначе говоря (п. 71), чтобы расстояние их центров заключалось между суммой и разностью их радиусов. Это даёт, если обозначить через R радиус данной окружности:

$$AO \leq 2R + AO; \quad (1)$$

и, кроме того,

$$AO \geq AO - 2R, \quad (2)$$

или

$$AO \geq 2R - AO \quad (3)$$

(смотря по тому, будет ли AO больше или меньше $2R$).

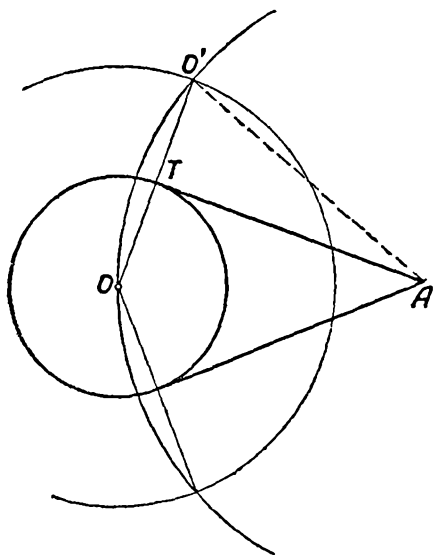
Неравенства (1) и (2), очевидно, выполняются сами собой. Неравенство (3) может быть записано в виде $2AO \geq 2R$ или $AO \geq R$.

Таким образом, задача невозможна, если точка A нахо-

дится внутри окружности. Если точка A лежит вне окружности, имеются два решения, так как окружности пересекаются в двух точках. Наконец, если точка A находится на окружности, то окружности, которые определяют точку O' , касаются друг друга, и имеется только одно решение, касательная в точке A , или, скорее, два слившихся в одно решения. Действительно, на основании сказанного ранее (п. 72), если точка A неограниченно приближается к окружности, то обе точки касания, а следовательно, и обе касательные, стремятся совпасть.

92. Теорема. Две касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны и образуют равные углы с диаметром, проходящим через эту точку (черт. 99). Этот диаметр перпендикулярен к хорде, соединяющей точки касания.

Действительно, обе точки касания симметричны друг с другом относительно OA (черт. 99), так как они определяются пересечением двух окружностей, имеющих центры на этой прямой (п. 68).



Черт. 98.

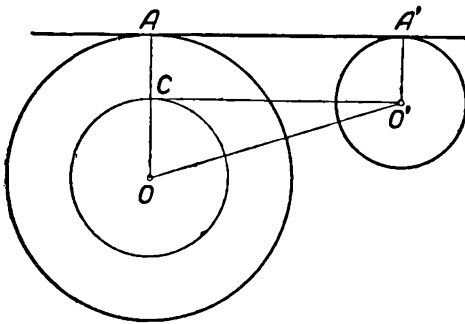
93. Построение 18. Построить общие касательные к двум данным окружностям.

Пусть требуется построить общие касательные к двум данным окружностям O и O' , имеющим радиусы R и R' . Эти общие касательные могут быть двоякого рода: они могут быть *внешними* (черт. 100), т. е. такими, что обе окружности лежат по одну сторону от касательной, или *внутренними* (черт. 101), когда обе окружности лежат по обе стороны от касательной.

1°. Общие внешние касательные. Предположим, что задача решена, и пусть AA' — искомая касательная (черт. 100), A и A' — точки касания, так что OA и $O'A'$ перпендикулярны к AA' .

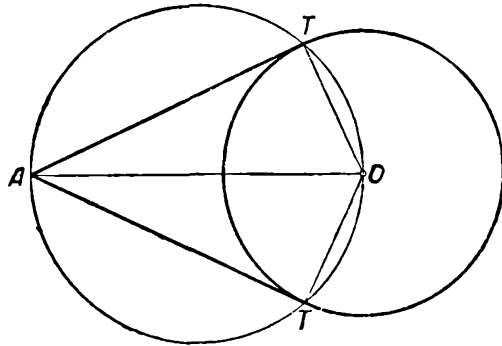
Пусть через точку O' проведена прямая $O'C$, параллельная AA' , до пересечения с OA в точке C . Эту точку C мы и собираемся найти.

С этой целью заметим, что четырёхугольник $CA'O'O'$ есть прямоугольник, так что $AC = R'$ и, следовательно, $OC = R - R'$ ¹⁾. Таким



Черт. 100.

касательная в точке A к окружности O является действительно общей касательной, так как, опуская из точки O' на эту прямую перпендикуляр $O'A'$ и пользуясь равенством $OC = R - R'$, получим $O'A' = AC = OA - OC = R'$.



Черт. 99.

образом, точка C принадлежит окружности, которую мы можем построить, так как мы знаем её центр O и радиус, равный разности данных радиусов.

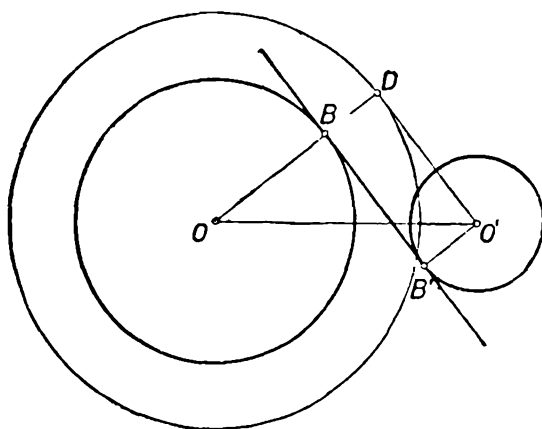
Далее прямая CO' касается этой окружности, так как угол OCO' — прямой. Мы приходим, таким образом, к построению 17.

Поскольку точка C определена, продолжение радиуса OC даст точку A . Касательная

¹⁾ Мы предполагаем для определённости, что за окружность O принята большая из двух окружностей. Но это предположение, которое мы всегда вправе сделать, в данном случае несущественно: если бы оно не было выполнено, то мы имели бы $OC = R' - R$.

Задача возможна только (п. 91), если $OO' \geq R - R'$, иначе говоря (п. 70), если окружности лежат одна вне другой, касаются друг друга внешним образом, пересекаются между собой или касаются друг друга внутренним образом. В первых трёх случаях задача имеет два решения, так как из точки O' можно провести две касательные к окружности OC , в четвёртом случае — только одно решение, которое можно рассматривать как два слившихся решения, так как обе касательные, проведённые из точки O' к окружности OC , сливаются в одну.

2°. Общие внутренние касательные. Пусть BB' — общая внутренняя касательная (черт. 101), B и B' — точки касания. Через



Черт. 101.

точку O' проведём прямую $O'D$, параллельную касательной, до пересечения в точке D с радиусом OB . Четырёхугольник $DBB'O'$ — прямоугольник, так что $BD = R'$, и точка D лежит на окружности с центром O и радиусом $R + R'$. Мы построим эту окружность и через точку O' проведём к ней касательную. Когда точка D таким образом определена, пересечение радиуса OD с данной окружностью O

определит точку B . Касательная в B есть общая касательная, как в этом можно убедиться, повторяя первоначальное рассуждение в обратной последовательности.

Задача возможна только, если $OO' \geq R + R'$, иначе говоря, если окружности расположены одна вне другой или касаются друг друга внешним образом. В первом случае задача имеет два решения, во втором случае — одно решение (иначе говоря, два слившихся решения).

Итак:

Две окружности, лежащие одна вне другой, имеют две внешние общие касательные и две внутренние.

Две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, имеют две общие внешние касательные и одну внутреннюю (касательную в точке их прикосновения).

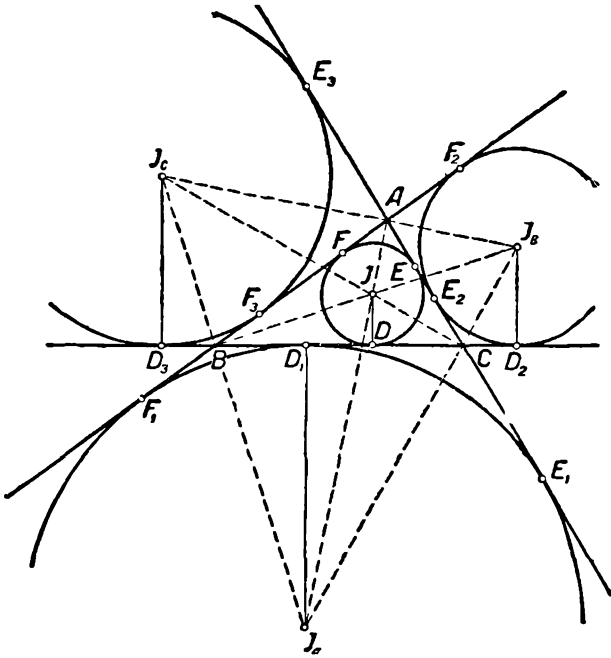
Две пересекающиеся окружности имеют две общие внешние касательные.

Две окружности, касающиеся друг друга внутренним образом, имеют одну общую внешнюю касательную (касательную в точке их прикосновения).

Две окружности, лежащие одна внутри другой, не имеют общих касательных.

94. Построение 19. *Построить окружности, касающиеся трёх данных прямых.*

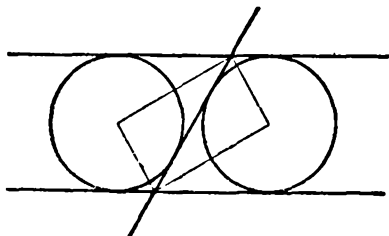
Задача сводится к следующей: найти точки, одинаково отстоящие от трёх прямых. Окружность, имеющая одну из таких точек своим центром и расстояние этой точки до каждой из трёх прямых — своим радиусом, отвечает условиям задачи. Но геометрическое место точек, одинаково отстоящих от двух пересекающихся прямых, состоит из двух биссектрис углов, которые эти прямые образуют между собой.



Черт. 102.

Предположим сначала, что данные прямые попарно пересекаются и не проходят через одну и ту же точку, так что они образуют треугольник (черт. 102); в этом треугольнике мы должны построить биссектрисы внутренних и внешних углов. Нам известно из предыдущего, что: 1) биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке, 2) биссектриса всякого внутреннего угла пересекается с биссектрисами внешних углов, к нему не прилежащих, в одной точке. Четыре определённые таким образом точки (точка пересечения внутренних биссектрис и три вершины треугольника, образованного биссектрисами внешних углов) будут, следовательно, искомыми точками, и притом единственными.

Первая из окружностей, которые имеют центры в этих четырёх точках, расположена внутри треугольника. Она называется *вписанной окружностью*; вообще, кривая называется *вписанной* в многоугольник, когда она касается всех его сторон. Три другие окружности, точно так же касающиеся всех сторон треугольника, но лежащие вне треугольника, называются *вневыписанными*; каждая из них расположена



Черт. 103.

внутри одного из углов треугольника, но отделена от вершины этого угла противоположной стороной, как это видно на чертеже.

Если три прямые пересекаются в одной точке, то в этом случае задача, собственно говоря, не имеет решения, так как из одной точки можно провести к окружности только две касательные. Предыдущее построение даёт круг,

обращающийся в точку — точку пересечения данных прямых.

Если две из прямых параллельны, а третья их пересекает (черт. 103), то биссектрисы углов, образованных этой последней линией с двумя первыми, попарно параллельны. В этом случае получаются только две окружности, расположенные по обе стороны от секущей.

Наконец, если три данные прямые параллельны, решения вовсе не существует, потому что к окружности можно провести только две касательные, параллельные данному направлению.

УПРАЖНЕНИЯ.

73. Построить окружность данного радиуса:
 - 1) проходящую через две данные точки;
 - 2) проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой;
 - 3) касающуюся двух данных прямых;
 - 4) касающуюся данной прямой и данной окружности.
74. Построить окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и в то же время касающуюся данной окружности.
75. Провести между двумя данными прямыми (или окружностями) отрезок данной длины и данного направления.
76. Провести к данной окружности касательную, на которой данная прямая отсекает отрезок данной длины.
77. Построить треугольник, зная сторону, противолежащий угол и высоту (рассмотреть два случая: когда данная высота опущена на данную сторону и когда данная высота опущена на другую сторону).
78. Разделить отрезок на три равные части, пользуясь теоремой п. 56 о медианах треугольника.
79. Построить треугольник, зная:
 - 1) две стороны и медиану (рассмотреть два случая, когда данная медиана выходит из середины одной из данных сторон и когда она выходит из общей вершины этих сторон);
 - 2) сторону и две медианы (два случая);
 - 3) три медианы.
80. Построить треугольник, зная его сторону, высоту и медиану (пять случаев).

81. Построить треугольник, зная его угол, высоту и медиану (пять случаев).

82. Построить треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме или разности двух других сторон.

83. Та же задача для случая, когда дан угол, прилежащий к данной стороне.

84. Построить треугольник по углу, высоте и периметру (два случая).

85. Построить треугольник по стороне, разности прилежащих углов и по сумме или разности двух других сторон.

86. Построить биссектрису угла между двумя прямыми, считая, что эти прямые невозможно продолжить до точки их пересечения (в пределах чертежа).

Теоремы о касательных к окружности (п. 92).

87. В четырёхугольнике, описанном около окружности (и таком, что окружность заключена внутри его), сумма двух противоположных сторон равна сумме двух других сторон. Обратно, всякий выпуклый четырёхугольник, в котором суммы противоположных сторон равны, может быть описан около окружности (доказать).

Если неизвестно, лежит ли окружность внутри данного описанного четырёхугольника или нет, то всегда можно утверждать, что сумма двух надлежащим образом выбранных сторон равна сумме двух других (доказать). Рассмотреть обратную теорему.

88. Окружность, касающаяся трёх сторон выпуклого четырёхугольника и расположенная с той же стороны от каждой из этих сторон, что и внутренняя область четырёхугольника, пересекает или не пересекает четвёртую сторону, в зависимости от того, будет ли сумма этой стороны и стороны, противоположной ей, больше или меньше суммы двух других сторон (доказать).

88а. Если две точки лежат вне окружности, то прямая, их соединяющая, будет лежать вне окружности или её пересекать, смотря по тому, будет ли расстояние между двумя точками заключено между суммой и разностью касательных, проведённых к окружности из этих точек, или нет (доказать).

89. Отрезок, отсекаемый двумя неподвижными касательными к окружности на подвижной касательной, виден из центра под постоянным углом (доказать).

Рассмотреть случай, когда обе неподвижные касательные параллельны между собой.

90. Если две неподвижные касательные к окружности пересечены подвижной касательной, точка касания которой находится на меньшей из двух дуг, определяемых точками касания неподвижных касательных, то треугольник, образованный этими тремя касательными, имеет постоянный периметр (доказать).

Как изменится эта формулировка, когда подвижная касательная будет иметь точку прикосновения на большей из двух дуг, образуемых неподвижными касательными?

90а. Если a, b, c — три стороны треугольника ABC (черт. 102); p — полупериметр ($2p = a + b + c$); D, E, F — точки прикосновения вписанной окружности; D_1, E_1, F_1 ; D_2, E_2, F_2 ; D_3, E_3, F_3 — точки прикосновения внеписанных окружностей, лежащих соответственно внутри углов A, B, C , то отрезки, отсекаемые этими точками прикосновения на сторонах, имеют следующие величины:

$$\begin{aligned} AE &= AF = CD_2 = CE_2 = BD_3 = BF_3 = p - a; \\ BF &= BD = AE_3 = AF_3 = CE_1 = CD_1 = p - b; \\ CD &= CE = BF_1 = BD_1 = AF_2 = AE_2 = p - c; \\ AE_1 &= AF_1 = BF_2 = BD_2 = CD_3 = CE_3 = p. \end{aligned}$$

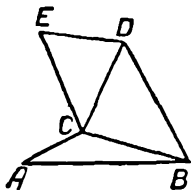
91. Описать из вершин данного треугольника, как из центров, три окружности, попарно касающиеся друг друга.

ГЛАВА VI.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ФИГУР.

95. Мы определили выше (п. 20), какие две фигуры называются равными и имеющими одинаковое направление вращения. Мы знаем (п. 50), что если две точки одной из таких фигур совпадают с соответственными им точками другой фигуры, то обе фигуры совпадают между собой. Иначе говоря, *нельзя поместить фигуру F' , равную данной фигуре F и имеющую с ней одинаковое направление вращения¹⁾, двумя различными способами так, чтобы две точки A' и B' этой фигуры (соответственные двум данным точкам A и B фигуры F) имели наперёд заданное положение.*

Мы можем также по этим данным (т. е. зная положение точек A' и B' , соответственных точкам A и B) *определить точку C' , соответствующую любой третьей данной точке C фигуры F .*



Черт. 104.

В самом деле, для этого достаточно построить треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC (построение 4), выбирая то из двух возможных положений третьей вершины, которое соответствует двум треугольникам, имеющим одинаковое направление вращения.

Так как такое построение можно выполнить для каждой точки первой фигуры, то мы имеем, очевидно, возможность решить следующую задачу (по крайней мере для фигур, состоящих из конечного числа точек и прямых).

Задача. Построить плоскую фигуру F' , равную данной фигуре F (и имеющую с ней одинаковое направление вращения), зная точки, соответственные двум её данным точкам.

Следует заметить, что ничто не обязывает нас строить каждую следующую искомую точку, исходя всё время непосредственно из данных точек A' и B' .

Напротив, можно получить точку, соответствующую произвольной точке фигуры F , пользуясь тем треугольником, который эта точка образует не с данными точками, а с двумя другими уже построенными точками²⁾.

Таким образом, можно построить фигуру, равную $ABCDE$ (черт. 104), строя последовательно три треугольника, равные треугольникам ABC , BCD , CDE .

96. Операция, которую мы назвали *поступательным перемещением*, преобразует любую фигуру в фигуру, ей равную и имеющую

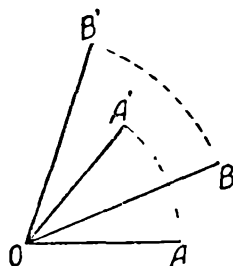
¹⁾ Ясно, что без последней оговорки ничего не помешало бы нам, напротив, заменить фигуру F' фигурой, ей симметричной относительно прямой, соединяющей эти две точки.

²⁾ Мы узнаем впоследствии, что совершенно так же приходится поступать при съёмке планов (см. Геометрия в пространстве, книга X, п. 590).

с ней одинаковое направление вращения. Это перемещение можно рассматривать, как получающееся непрерывным скольжением фигуры в её плоскости. Для этого достаточно выполнять поступательное перемещение непрерывно, начиная с перемещения, равного нулю (при котором преобразованная фигура совпадает с первоначальной), и кончая тем перемещением, которое фактически должно быть выполнено над данной фигурой.

При этом непрерывном перемещении *все точки описывают прямые линии, параллельные между собой и направленные в одну и ту же сторону*.

97. Вращением (поворотом) называется перемещение, при котором каждая точка перемещаемой фигуры поворачивается около некоторой неподвижной точки, называемой *центром вращения*, в определённом направлении на один и тот же угол, который характеризует *величину вращения* и называется *углом поворота*. Иначе говоря, если дана произвольная точка A первоначальной фигуры F , то мы получим соответствующую ей точку A' перемещённой фигуры F' , соединяя точку A с центром вращения, строя (в направлении вращения) угол AOA' , равный углу поворота, и откладывая на второй стороне этого угла отрезок OA' , равный отрезку OA (черт. 105).



Черт. 105.

Мы видим, что вращение вполне определяется своим центром, углом поворота и направлением.

Фигура F' , которая получается из фигуры F с помощью любого вращения, равна фигуре F . Чтобы это доказать, возьмём какие-нибудь две точки A и B (черт. 105) фигуры F , и пусть A' и B' — точки, им соответственные. Угол $A'OB'$ равен углу AOB (и имеет с ним одинаковое направление). Действительно, предположим для определённости, что угол AOB имеет направление, совпадающее с направлением вращения¹⁾ (черт. 105). Заменяя сторону OB стороной OB' , мы увеличиваем этот угол AOB на угол, равный углу поворота, но мы его уменьшаем на ту же величину, заменяя сторону OA стороной OA' .

Следовательно, треугольники AOB и $A'OB'$ равны и имеют одинаковое направление вращения, как имеющие по равному углу, заключённому между соответственно равными сторонами ($OA=OA'$; $OB=OB'$). Так как это имеет место для любой точки B , то равенство двух фигур доказано.

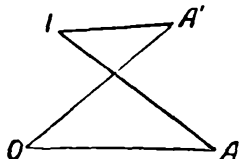
Вращение можно осуществить непрерывным скольжением фигуры в её плоскости, так как можно предполагать, что угол поворота изме-

¹⁾ Напомним, что мы рассматриваем угол AOB как описываемый прямой, вращающейся от OA к OB (п. 20). Поэтому всегда можно считать, что имеет место сделанное предположение, обозначая через OA ту сторону угла, которая будет первой, если считать по направлению рассматриваемого вращения.

няется непрерывно от значения, равного нулю, до того значения, которое он должен окончательно иметь. При этом движении каждая точка описывает дугу, имеющую своим центром центр вращения. Все эти дуги соответствуют равным центральным углам.

98. Теорема. В двух равных фигурах, которые получаются одна из другой с помощью вращения около точки O (черт. 106),

1) соответствующие друг другу направления на двух соответственных прямых образуют между собой угол, равный углу поворота и одного с ним направления;



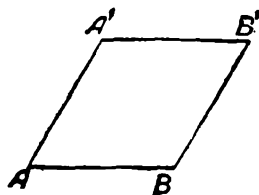
Черт. 106.

2) центр вращения, любые две соответственные точки A и A' и точка пересечения I каких-либо двух соответственных прямых, проходящих через точки A и A' , представляют собой четыре точки, лежащие на одной окружности.

1°. Первая часть теоремы справедлива, по определению, для двух соответственных прямых, проходящих через центр вращения; следовательно, она будет справедлива и для любых соответственных прямых, потому что каждую из них можно заменить параллельной ей прямой, направленной в ту же сторону и проходящей через центр вращения.

2°. Каждая из точек O , I служит вершиной угла, который равен углу поворота и стороны которого проходят через точки A и A' . Следовательно, все четыре точки принадлежат геометрическому месту вершин углов, обладающих этими свойствами, а это геометрическое место есть окружность¹⁾.

99. Частным случаем вращения является тот, при котором угол поворота равен двум прямым, или 180° . В этом случае точку A' , соответствующую точке A , можно получить, соединяя точку A с точкой O (центром вращения) и откладывая на продолжении отрезка AO от точки O отрезок OA' , равный OA . Точка A' , определяемая этим построением, называется *симметричной* с точкой A относительно точки O . Таким образом, в геометрии на плоскости симметрия относительно точки и вращение на 180° около этой точки представляют тождественные между собой операции.



Черт. 107.

100. Если в двух равных фигурах, имеющих одинаковое направление вращения, два соответственных отрезка AB и $A'B'$ (черт. 107) параллельны между собой и направлены в одну и ту же сторону, то эти две фигуры можно совместить между собой с помощью поступательного перемещения.

В самом деле, так как четырехугольник $ABB'A'$ — параллелограмм, то отрезки AA' и BB' будут параллельны и равны между собой и на-

¹⁾ В силу п. 82а. Прим. ред. перевода.

правлены в одну и ту же сторону; следовательно, поступательное перемещение AA' совмещает точки A и B с их соответственными точками, что влечёт за собой полное совмещение обеих фигур.

Если в двух равных фигурах, имеющих одинаковое направление вращения, точка O совпадает со своей соответственной точкой, то обе фигуры можно совместить между собой с помощью вращения около этой точки.

Действительно, если A и A' — две произвольные соответственные точки, то вращение на угол AOA' около точки O совмещает точку A с точкой A' , в то время как точка O попрежнему совпадает со своей соответственной точкой.

101. Мы видели (п. 20), что две равные фигуры, имеющие противоположные направления вращения, не могут быть совмещены без того, чтобы одна из них не вышла из своей плоскости. Напротив, две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, всегда могут быть совмещены между собой с помощью перемещения в их плоскости, а именно с помощью *поступательного перемещения, сопровождаемого вращением*. Действительно, если A и A' — две соответственные точки обеих фигур, то поступательное перемещение AA' , выполненное над первой фигурой, совместит между собой эти две точки, после чего достаточно будет вращения около точки A' (см. предыдущий пункт), чтобы совместить обе фигуры.

Замечая, что поступательное перемещение не изменяет направления прямой, мы заключаем отсюда, что *любые две соответственные прямые двух равных фигур, имеющих одинаковое направление вращения, образуют между собой постоянный угол*; таким образом, можно говорить об *угле между двумя фигурами*.

102. Можно доказать, что из двух только что указанных операций (поступательного перемещения и вращения) необходимой является только одна. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, могут быть всегда совмещены между собой либо с помощью одного поступательного перемещения, либо с помощью одного вращения около надлежащим образом выбранной точки.*

Эта точка называется *центром вращения* (обеих фигур).

Пусть A и B — две точки первой фигуры, A' и B' — соответственные им точки второй фигуры. Мы достигнем совмещения обеих фигур, если нам удастся совместить отрезки AB и $A'B'$.

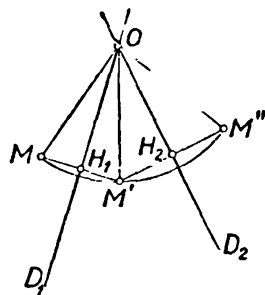
1°. Если прямые AB и $A'B'$ параллельны между собой и направлены в одну и ту же сторону (черт. 107), то фигуры получают одна из другой с помощью поступательного перемещения.

2°. Предположим теперь, что этого не будет. Посмотрим, можно ли одну из двух фигур получить из другой с помощью вращения. Угол поворота нам известен: он равен углу между двумя фигурами, например углу между прямыми AB и $A'B'$ (черт. 108). Мы должны, следовательно, найти такую точку O , чтобы поворот около неё на этот угол совместил бы точку A с точкой A' . Эта задача сводится

что три точки M , M' , M'' лежат на одном и том же общем перпендикуляре к прямым D_1 и D_2 . Кроме того, если предположить для определённости, что точка M' находится между прямыми D_1 и D_2 , то отрезок MM'' , равный сумме отрезков MM' и $M'M''$ (черт. 109), в два раза больше отрезка H_1H_2 , который представляет собою сумму отрезков $M'H_1$ и $M'H_2$.

Это заключение будет иметь силу и в том случае, если точка M' находится вне двух параллельных прямых D_1 и D_2 : отрезок MM'' будет при этом разностью отрезков MM' и $M'M''$, а отрезок H_1H_2 — разностью отрезков $M'H_1$ и $M'H_2$. Следовательно, поступательное перемещение, представляемое отрезком, перпендикулярным к двум данным прямым и вдвое большим, чем H_1H_2 , совмещает произвольную точку фигуры F с соответствующей ей точкой фигуры F'' .

2°. Предположим, что две оси симметрии пересекаются в точке O (черт. 110), и пусть M , M' , M'' — снова три соответственные точки трёх фигур F , F' , F'' , причём точки M и M' симметричны относительно прямой D_1 , а точки M' и M'' — относительно прямой D_2 . Очевидно, что три точки M , M' , M'' лежат на одной окружности с центром O . Кроме того, угол MOM'' , равный сумме или разности углов MOM' и $M'OM''$, в два раза больше угла между прямыми D_1 и D_2 , который можно рассматривать как сумму или разность углов, образованных прямой OM' с прямыми D_1 и D_2 . Вращение, указанное в условии теоремы, совмещает, таким образом, каждую точку M с соответствующей ей точкой M'' .



Черт. 110.

Примечание. Две последовательные симметрии относительно одной и той же прямой взаимно уничтожаются, так как при этом каждая точка возвращается в её первоначальное положение.

Следствие. Обратно, всякое поступательное перемещение можно заменить двумя последовательными симметриями относительно двух прямых, перпендикулярных к направлению перемещения, причём одну из этих прямых можно выбрать произвольно.

Всякое вращение можно заменить двумя последовательными симметриями относительно двух прямых, проходящих через центр вращения, причём одну из этих прямых можно выбрать произвольно.

В самом деле, выбрав произвольно первую ось симметрии, достаточно взять за вторую ось симметрии в случае поступательного перемещения — прямую, параллельную первой оси и отстоящую от неё на расстоянии, равном половине величины данного поступательного перемещения, а в случае вращения — прямую, проходящую через центр вращения и образующую с первой осью симметрии угол, равный половине угла поворота.

103. Теорема. Последовательные поступательные перемещения или вращения, выполненные в любом числе, можно заменить либо одним поступательным перемещением, либо одним вращением.

Эта замена называется сложением данных перемещений; полученное окончательное перемещение называется результирующим перемещением.

Достаточно уметь сложить два перемещения; действительно, если бы их было три, то мы сложили бы сначала два первых, а затем сложили бы полученное перемещение с третьим; так же следовало бы продолжать и далее, если бы число данных перемещений было больше трёх.

Два последовательных поступательных перемещения преобразуют произвольный отрезок в отрезок, ему параллельный и направленный в ту же сторону, и потому эквивалентны одному поступательному перемещению (п. 100). Следовательно, нам достаточно рассмотреть только случай сложения поступательного перемещения и вращения (причём поступательное перемещение может или предшествовать вращению, или следовать за ним) и случай сложения двух вращений.

Возьмём, например, первый случай, предполагая для определённости, что поступательное перемещение выполнено первым. Данное поступательное перемещение можно разложить на две симметрии относительно двух прямых D_1 и D_2 и точно так же данное вращение — на две симметрии относительно прямых D_1' и D_2' , так что нам придётся выполнить последовательно всего четыре симметрии относительно прямых D_1 , D_2 , D_1' , D_2' . Но так как D_2 — произвольная прямая, перпендикулярная к направлению поступательного перемещения, а D_1' — произвольная прямая, проходящая через центр вращения, то мы можем совместить обе эти прямые с перпендикуляром к направлению поступательного перемещения, проведённым через центр вращения.

При этом две симметрии относительно этих двух прямых уничтожатся, и останутся только две симметрии относительно прямых D_1 и D_2' , которые (на основании предыдущей леммы) равносильны одному вращению или одному поступательному перемещению.

Если бы требовалось сложить два вращения, то мы взяли бы как за прямую D_2 , так и за прямую D_1' прямую, соединяющую оба данные центра вращения. Таким образом, теорема доказана для всех случаев.

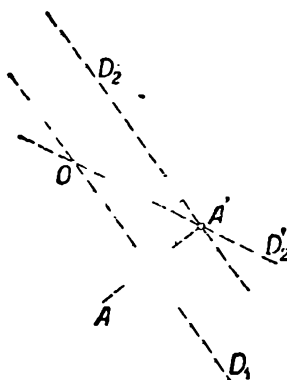
Теорему п. 102 можно рассматривать как следствие теоремы, которую мы только что доказали, так как любое перемещение плоской фигуры можно

получить с помощью одного поступательного перемещения, сопровождаемого вращением, а именно (если через A и A' обозначить какие-либо две соответственные точки первоначальной и перемещённой фигуры) поступательного перемещения AA' , сопровождаемого вращением около точки A' , на угол, равный углу между двумя фигурами (черт. 111). Прямые D_2 и D_1' совпадают в этом случае с перпендикуляром к прямой AA' в точке A' ; следовательно, прямая D_1 будет перпендикуляром в середине отрезка AA' , а прямую D_2' мы получим из D_2 , повергивая её на угол, равный половине угла поворота. Точка пересечения прямых D_1 и D_2' определяет центр вращения, и мы видим, что это построение вполне согласуется с тем, которое было дано выше; действительно, проводя касательную ¹⁾ к дуге, построенной на отрезке AA' как на хорде и вписывающей угол, равный половине угла поворота, мы получим перпендикуляр к прямой D_2' .

104. Теорема. Если неизменяемая фигура перемещается в своей плоскости, то в каждый момент времени нормали к траекториям всех точек проходят через одну точку (если они все не параллельны между собой), которая называется мгновенным центром вращения.

Не рассматривая случая, когда все нормали к траекториям различных точек M , N , P ,... подвижной фигуры параллельны, мы предположим, что две из них, например нормали в точках M и N , пересекаются в точке O (черт. 112).

Рассмотрим второе положение подвижной фигуры, близкое к первому; новые положения точек M , N , P ,... пусть будут M' , N' , P' ,... Перпендикуляры, восстановленные в серединах отрезков MM' , NN' , PP' ,... , проходят через общую точку O_1 , центр того вращения, которое совместило бы первое положение фигуры со вторым. Если теперь предположить, что второе положение неограниченно приближается к первому, то середина



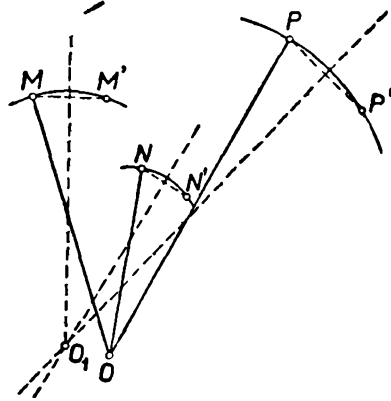
Черт. 111.

¹⁾ В точке A' . Прим. ред. перевода.

отрезка MM' будет иметь своим пределом точку M , а прямая MM' — касательную в точке M к траектории этой точки; перпендикуляр, восстановленный в середине MM' , будет стремиться при этом к нормали к этой траектории. Точно так же перпендикуляр, восстановленный в середине NN' , будет стремиться к нормали в точке N . Точка O_1 имеет, следовательно, своим предельным положением точку O , так что нормали к траекториям точек P, \dots , представляющие собою предельные положения перпендикуляров, восстановленных в серединах отрезков PP', \dots , проходят через эту точку O ¹⁾.

Следствие. Если мы умеем найти касательные к траекториям двух точек движущейся неизменяемой фигуры, то мы сможем найти касательную и к траектории любой точки фигуры.

Действительно, перпендикуляры к двум известным касательным к траекториям определяют мгновенный центр вращения и, следовательно, позволяют провести нормаль к траектории любой точки.



Черт. 112.

УПРАЖНЕНИЯ.

92. Если неизменяемая фигура перемещается таким образом, что две из её прямых проходят каждая через неподвижную точку, то существует бесчисленное множество прямых этой фигуры, каждая из которых при её перемещении также вращается около неподвижной точки.

Всякая другая прямая подвижной фигуры остаётся касательной к неподвижной окружности. Центр вращения двух любых положений фигуры лежит всё время на некоторой неподвижной окружности (доказать).

93. Если даны три равные фигуры F_1, F_2, F_3 , имеющие одинаковое направление вращения, и если определить три центра вращения этих фигур, взятых попарно, то требуется доказать, что углы треугольника, имеющего своими вершинами эти три точки, равны половинам углов между этими фигурами, взятыми попарно, или дополнительным углам этих половин.

94. Сложить два вращения около двух различных центров, имеющих один и тот же угол поворота, но противоположные направления.

95. Две равные фигуры, имеющие противоположные направления вращения, всегда могут быть совмещены между собой:

¹⁾ Мы допускали здесь в качестве аксиом такого рода предложения: если переменная точка M_1 имеет своим предельным положением определённую точку M и если переменное направление D_1 имеет своим предельным положением направление D , то прямая, проведённая через точку M_1 по направлению D_1 , имеет своим предельным положением прямую, проведённую через точку M и параллельную D . Если две прямые D_1, D'_1 имеют предельными положениями D, D' , то точка пересечения D_1 и D'_1 стремится к точке пересечения D и D' и т. д. В действительности эти предложения представляют собою теоремы, которые должны быть доказаны. Но мы не приводим их доказательств, так как они не могут быть изложены с достаточной простотой, не опираясь на такие сведения о пределах, которые излагаются в курсах исчисления бесконечно малых.

- 1) бесчисленным множеством способов с помощью трёх симметрий;
- 2) бесчисленным множеством способов с помощью поступательного перемещения, сопровождаемого одной симметрией, или с помощью одной симметрии, сопровождаемой поступательным перемещением;
- 3) одним и только одним способом с помощью поступательного перемещения, сопровождаемого одной симметрией, или с помощью одной симметрии, сопровождаемой поступательным перемещением, если ось симметрии параллельна направлению перемещения.

96. Построить равнобедренный треугольник, вершины которого лежат соответственно на трёх данных параллельных прямых или на трёх данных концентрических окружностях.

97. Найти на данной окружности дугу, равную данной дуге и такую, чтобы прямые, соединяющие её концы соответственно с двумя данными точками, были бы параллельны между собой.

Найти на данной окружности дугу, равную данной дуге и такую, чтобы прямые, соединяющие её концы соответственно с двумя данными точками, образовали между собой данный угол.

ЗАДАЧИ КО ВТОРОЙ КНИГЕ.

98. Если соединить какую-либо точку окружности M с точками прикосновения A и B касательных, проведённых через определённую точку P плоскости, и через точку P провести прямую, параллельную касательной в точке M , то доказать, что прямые MA , MB отсекают на этой прямой отрезок, длина которого не зависит от положения точки M , и что этот отрезок делится в точке P пополам.

99. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, вписанный в круг, и M — точка дуги BC . Доказать, что отрезок MA равен $MB + MC$.

100. Через три вершины равнобедренного треугольника проведены три прямые так, что биссектрисы углов, которые каждая из них образует с высотой, выходящей из той же вершины, параллельны. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке, лежащей на круге, описанном около треугольника.

101. Середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот, заключённых между каждой из вершин и точкой пересечения высот, представляют собой девять точек, лежащих на одной окружности (*круг девяти точек*). Центром этой окружности служит середина отрезка, который соединяет точку пересечения высот данного треугольника с центром описанного круга; её радиус равен половине радиуса описанного круга (доказать). Вывести отсюда предложение, данное выше, в упражнении 70.

101а. Во всяком треугольнике центр окружности, проходящей через центры трёх вневписанных кругов, лежит в точке пересечения радиусов каждого из этих кругов, проведённых в точку его касания с соответствующей стороной, или, иначе, центр этой окружности симметричен с центром вписанного круга относительно центра описанного круга. Её радиус вдвое больше радиуса описанного круга (доказать).

102. Если в каком-либо треугольнике из основания каждой высоты опустить перпендикуляры на две стороны треугольника, выходящие с данной высотой из одной вершины, то основания этих перпендикуляров представляют собой шесть точек, лежащих на одной окружности (доказать).

103. В треугольнике ABC перпендикуляр, восстановленный в середине стороны BC , и биссектриса угла A пересекаются на описанном круге. Их точка пересечения равноудалена от точек B и C , от центра вписанного круга и от центра вневписанного круга, расположенного внутри угла A (доказать).

Доказать аналогичную теорему для биссектрисы внешнего угла при A . Вывести отсюда, что сумма радиусов вневписанных кругов равна радиусу вписанного круга, сложенному с удвоенным радиусом описанного круга.

103а. Построить треугольник, зная длины высоты, медианы и биссектрисы, выходящих из одной вершины, считая от этой вершины до точек пересечения с противоположной стороной.

104. Две касательные к окружности и хорда, соединяющая точки их касания, отсекают равные отрезки на перпендикуляре, проведенном через произвольную точку этой хорды, к прямой, соединяющей эту точку с центром (доказать).

105. На трёх сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA' , CAB' , ABC' и проведены отрезки AA' , BB' , CC' . Доказать:

- 1) что эти отрезки равны между собой;
- 2) что эти отрезки пересекаются в такой точке, из которой три стороны треугольника видны под одним и тем же углом;
- 3) что если эта точка находится внутри треугольника, то сумма её расстояний до трёх вершин треугольника равна длине каждого из отрезков AA' , BB' , CC' (см. задачу 99).

106. Круги, описанные около четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, проходят через одну точку [доказать эту теорему: 1) непосредственно, 2) пользуясь упражнением 72]. Центры этих кругов лежат на одной окружности, также проходящей через ту же точку (доказать).

107. Если продолжить стороны вписанного четырёхугольника до их пересечения, то биссектрисы углов, образованных продолжениями этих сторон, взаимно перпендикулярны. Они соответственно параллельны биссектрисам углов, образованных диагоналями того же четырёхугольника (доказать).

Сформулировать и доказать обратную теорему.

107а. Две произвольно взятые окружности пересечены двумя произвольными прямыми; хорды, соединяющие попарно точки пересечения обеих прямых с первой окружностью, пересекают хорды, соединяющие попарно точки пересечения тех же прямых со второй окружностью, в четырёх точках одной окружности (доказать).

108. Дан треугольник ABC ; найти геометрическое место таких точек M , чтобы перпендикуляры к прямым AM , BM , CM , проведенные соответственно через вершины A , B , C , пересекались в одной точке.

109. Найти геометрическое место вершин прямоугольников, рассматриваемых в упражнении 26 и задаче 41, если данный параллелограмм рассматривать как шарнирный (п. 46а).

110. На двух взятых последовательно отрезках AB , BC одной прямой линии описываются две произвольные, но равные между собой окружности. Эти окружности пересекаются в точке B и в некоторой второй точке, геометрическое место которой и требуется найти.

111. Пусть OA и OB — два произвольных взаимно перпендикулярных радиуса круга O . Через точки A и B проводят прямые, соответственно параллельные двум данным взаимно перпендикулярным прямым. Найти геометрическое место точек пересечения этих двух прямых, если прямой угол AOB вращается около центра круга.

112. Две окружности, каждая из которых касается данной прямой в определенной точке, изменяются, оставаясь всё время касательными между собой. Найти геометрическое место их точек касания.

113. Найти геометрическое место вершин прямого угла неизменяемого прямоугольного треугольника, если две другие его вершины скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым.

114. Построить прямую, на которой две данные окружности отсекают хорды данной длины.

115. Вписать в данную окружность треугольник, стороны которого были бы параллельны данным прямым или две стороны которого были бы параллельны данным прямым, а третья сторона проходила бы через данную точку.

116. Даны прямая XU и две точки A и B ; найти на прямой такую точку M , чтобы угол AMX был вдвое больше угла BMU .

117. Построить пятиугольник (или вообще многоугольник с нечётным числом сторон), зная середины его сторон.

Что будет в случае многоугольника с чётным числом сторон?

118. Построить трапецию по четырём её сторонам.

Общее, построить четырёхугольник по четырём сторонам и углу между продолжениями двух его противоположных сторон¹⁾.

119. Пересечь стороны AB и AC треугольника ABC прямой данного направления, которая отсекала бы на этих сторонах равные отрезки, считая соответственно от вершин B и C .

120. Построить общий перпендикуляр к двум данным параллельным прямым, который был бы виден из данной точки под данным углом.

121. Даны окружность, две точки P и Q этой окружности и прямая. Найти на окружности такую точку M , чтобы прямые MP и MQ отсекали на данной прямой отрезок IK данной длины.

121a. Решить ту же задачу, если вместо длины отрезка IK дана середина этого отрезка.

122. Построить квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки. Может ли эта задача допускать бесчисленное множество решений?

Найти в этом случае геометрическое место центров квадратов, удовлетворяющих поставленному условию.

123. Каким условиям должны удовлетворять длины сторон шарнирного четырёхугольника $ABCD$ (п. 46а, примечание 3°), для того чтобы определённая его вершина B представляла собой шарнир, обладающий полной свободой вращения, т. е. чтобы величина угла при этой вершине четырёхугольника была совершенно произвольной? Показать, что угол при противоположащей вершине D не будет в этом случае, вообще говоря, вполне произвольным. В каком случае последнее предложение допускает исключение?

¹⁾ Относительно этого и следующих упражнений см. Прибавление А, п. 284.

ГЛАВА I.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ.

105. Известно, что *пропорцией* называется равенство двух отношений и что две величины называются *пропорциональными*, если их значения соответствуют друг другу таким образом, что отношение двух каких-либо значений первой равно отношению соответствующих значений второй. Так, два отрезка AB , CD называются пропорциональными отрезкам $A'B'$, $C'D'$, если имеет место равенство

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

106. В предыдущем равенстве $\frac{AB}{CD}$ обозначает отношение двух отрезков AB и CD ; однако мы будем применять здесь и в дальнейшем соглашение, установленное в п. 18, и, выбрав произвольно, но раз навсегда единицу длины, заменим самые отрезки числами, которые их измеряют: таким образом, $\frac{AB}{CD}$ означает $\frac{\text{мера } AB}{\text{мера } CD}$. Мы имеем право так поступить, так как такой заменой мы отнюдь не изменили величины отношения, что следует из приведённой уже теоремы (п. 17, 2°).

Мы можем применять вследствие этого к отношению отрезков свойства, доказываемые в курсах арифметики для отношения чисел, как, например, следующие:

Отношение не изменяется, если умножить или разделить оба его члена на одно и то же число.

Чтобы перемножить два отношения, перемножают их предыдущие и их последующие члены.

В ряде равных отношений сумма предыдущих членов так относится к сумме последующих, как один из предыдущих относится к своему последующему.

Точно так же к пропорциям, составленным из отрезков, мы сможем применять свойства пропорций, составленных из чисел, как, например, следующие:

В каждой пропорции:

- 1) произведение крайних членов равно произведению средних;
- 2) можно переставить крайние или средние члены;
- 3) сумма (или разность) членов первого отношения относится к одному из них как сумма (или разность) членов второго отношения к соответствующему члену второго отношения.

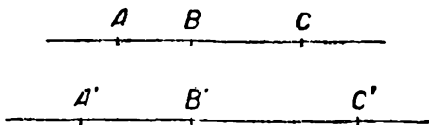
Обратно, каждое из равенств, полученных таким образом, влечёт за собою первоначальную пропорцию.

Так, равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ эквивалентно следующим:

$$ad = bc, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

т. е. каждое из этих равенств влечёт за собою все остальные.

В частности, если известно, что три точки прямой A, B, C (черт. 113) следуют одна за другой в том же порядке, как три точки прямой A', B', C' , то пропорции



Черт. 113.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \\ \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

эквивалентны друг другу.

Напомним также, что, зная три члена пропорции, можно найти неизвестный член: пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ даёт, если предположить, что известны a, b и c :

$$d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Этот член d называется *четвёртым пропорциональным* к количествам a, b, c .

Очевидно, что в двух пропорциях, у которых три соответствующих члена общие, четвёртые члены равны между собой.

107. Говорят, что число b есть *среднее пропорциональное* (или *среднее геометрическое*) между двумя другими числами a и c , если можно написать пропорцию, у которой крайние члены равны a и c , а оба средних члена равны b :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$b^2 = ac,$$

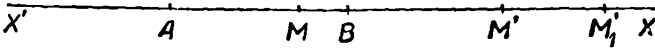
так что для того, чтобы найти *среднее пропорциональное* между двумя числами a и c , нужно извлечь квадратный корень из произведения этих двух чисел. Число c называется иногда *третьим пропорциональным* к числам a и b .

Разумеется, согласно предыдущим условиям мы скажем, что отрезок b есть *среднее пропорциональное* или *среднее геометрическое* между двумя другими отрезками a и c , если число, измеряющее b , есть *среднее пропорциональное* между числами, измеряющими отрезки a и c , т. е. если из трёх чисел (или, что то же самое, из

трёх отрезков) можно составить пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

108. *Существует точка, и притом только одна, которая делит данный отрезок в данном отношении.*



Черт. 114.

В самом деле, пусть даны: отрезок AB (черт. 114) и отношение r . Надо найти такую точку M , что $\frac{AM}{MB} = r$; это равенство можно написать в виде пропорции:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{r}{1},$$

а эта пропорция эквивалентна пропорции:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{r}{1+r},$$

которая верна для одного и только одного значения AM :

$$AM = AB \cdot \frac{r}{1+r}.$$

Определённый, таким образом, отрезок меньше AB . Откладывая его на AB от точки A , получим точку M , удовлетворяющую данному условию.

109. Рассмотрим точку M , которая перемещается по отрезку AB от точки A к точке B . Отношение $\frac{AM}{MB}$ всё время возрастает, так как возрастает числитель, в то время как знаменатель убывает. Это отношение согласно предыдущему предложению может принять вообще любое данное значение, в частности сколь угодно малое (если точка M достаточно близка к A) и сколь угодно большое (если точка M достаточно близка к B). Короче говоря, это отношение, начиная от 0, всё время возрастает и притом неограниченно, если точка M перемещается из A в B .

110. Изучим теперь отношение $\frac{AM'}{BM'}$, когда точка M' (черт. 114) находится на продолжении отрезка AB . Отношение $\frac{AM'}{BM'}$ называется при этом отношением, в котором точка M' делит отрезок AB *внешним* образом.

Существует точка, и притом только одна, которая делит внешним образом данный отрезок в данном отношении, при условии, что это отношение отлично от 1.

В самом деле, пусть требуется найти на продолжении AB такую точку M' , для которой отношение $\frac{AM'}{BM'}$ было бы равно какому-либо данному числу r . Предположим для определённости, что $r > 1$; в данном случае мы должны искать точку M' на продолжении отрезка AB за точку B . Пропорция $\frac{AM'}{BM'} = \frac{r}{1}$ эквивалентна пропорции

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{r}{r-1};$$

которой удовлетворяет одно и только одно значение AM' :

$$AM' = AB \cdot \frac{r}{r-1}.$$

Этот отрезок больше AB (так как $\frac{r}{r-1}$ больше 1). Откладывая его от точки A в направлении AB , мы получим точку M' , которая отвечает условию вопроса. Если бы отношение r было меньше 1, то аналогичное рассуждение дало бы

$$AM' = AB \cdot \frac{r}{1-r};$$

отрезок, который, будучи отложен от точки A в направлении, противоположном направлению отрезка AB , даёт точку M' . Предложение, таким образом, доказано.

Рассмотрим точку M' , которая, выходя из точки B , беспредельно удаляется в направлении BX (черт. 114). Отношение $\frac{AM'}{BM'}$ больше 1. Если точка, удаляясь, переходит из положения M' в положение M'_1 , то это отношение приближается к 1, так как мы переходим от отношения $\frac{AM'}{BM'}$ к отношению $\frac{AM'_1}{BM'_1}$, прибавляя одну и ту же величину $M'M'_1$ к обоим членам. К тому же это отношение может принимать все значения (большие 1), в частности сколь угодно большие значения (если точка M' достаточно близка к B) и значения, сколь угодно близкие к 1 (если точка M' достаточно удалена).

Короче говоря, отношение $\frac{AM'}{BM'}$, начиная с бесконечности, всё время уменьшается и стремится к 1, если точка M' движется от точки B и неограниченно удаляется в направлении BX .

Точно так же мы убедимся, что если точка M' движется от A и неограниченно удаляется в направлении AX' (черт. 114), то отношение $\frac{AM'}{BM'}$, начиная от нуля, всё время возрастает и стремится к 1.

111. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две точки C и D (черт. 115), которые делят, одна внутренним образом, другая внешним образом, один и тот же отрезок AB в одном и том же отношении, называются гармонич-

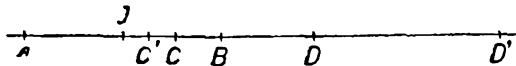
чески сопряжёнными относительно концов этого отрезка (говорят ещё, что они *делят гармонически* этот отрезок).

Если отрезок CD делит гармонически отрезок AB , то и обратно, последний отрезок делит гармонически первый, так как из пропорции $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ перестановкой средних членов получается:

$$\frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB}.$$

Любая точка, взятая на данном отрезке AB или на одном из его продолжений, имеет гармонически сопряжённую точку относительно концов данного отрезка, за исключением середины I отрезка AB (так как отношение $\frac{AI}{IB}$ равно 1)¹⁾.

Два отрезка, которые делят друг друга гармонически, частично заходят друг на друга (это значит, что ни один из двух отрезков не лежит целиком ни внутри, ни вне другого).



Черт. 115.

112. Напротив, два отрезка CD , $C'D'$, которые делят гармонически один и тот же третий отрезок AB , лежат целиком либо один вне другого, либо один внутри другого.

В самом деле, если отношения $\frac{CA}{CB}$ и $\frac{C'A}{C'B}$ таковы, что одно из них больше 1, другое меньше 1, то отрезки CD , $C'D'$ являются внешними один относительно другого: они расположены по разные стороны от середины I отрезка AB . Если это не так (черт. 115) и если, например, оба отношения, о которых мы только что говорили, больше 1, то оба отрезка CD и $C'D'$ лежат по одну сторону от точки I и оба содержат точку B . Но рассуждения пп. 109—110 доказывают, что отношение $\frac{AM}{MB}$ приближается к 1, если удаляться от точки B в том или ином направлении (по крайней мере не переходя через точку I). Следовательно, тот из двух отрезков, который соответствует отношению, более близкому к 1, содержит второй отрезок внутри себя.

113. Основная теорема. Любые две секущие пересекаются параллельными прямыми на пропорциональные части.

¹⁾ Точку, гармонически сопряжённую с точкой I , следует рассматривать как удаляющуюся в бесконечность. Под этими словами мы понимаем, что отношение $\frac{AM}{BM}$ стремится к 1, т. е. к значению $\frac{AI}{IB}$, если точка M неограниченно удаляется.

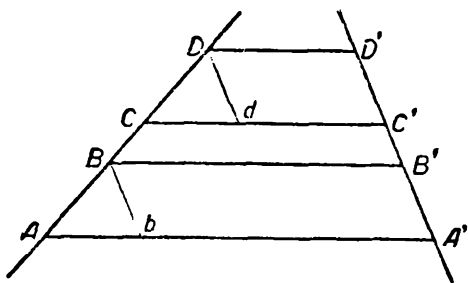
Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — две секущие, пересечённые параллельными прямыми AA' , BB' , CC' , DD' . Точки A' , B' , C' , D' следуют друг за другом в том же порядке, как и точки A , B , C , D (в противном случае две из прямых AA' , BB' , CC' , DD' пересекались бы).

Я утверждаю, что имеет место равенство $\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$.

Мы будем различать два случая:

1°. Если отрезки AB и CD равны между собой (черт. 116), то отрезки $A'B'$ и $C'D'$ также равны между собой.

Действительно, проведём через точку B прямую Bb , параллельную $A'B'$, до её пересечения с AA' в точке b , а через точку D — прямую Dd , параллельную той же прямой, до её пересечения с CC' в точке d .



Черт. 116.

Если $AB = CD$, то два треугольника Abb и CDd равны между собой, так как стороны AB и CD равны между собой и углы того и другого треугольника, примыкающие к этим сторонам, также равны друг другу как соответственные; следова-

тельно, имеем: $Bb = Dd$. Но Bb и Dd соответственно равны $A'B'$ и $C'D'$, как это видно из параллелограммов $BbA'B'$ и $DdC'D'$.

2°. *Общий случай*¹⁾. Пусть A , B , C , D — произвольные точки; докажем, что значения обоих отношений $\frac{CD}{AB}$ и $\frac{C'D'}{A'B'}$, взятые с точ-

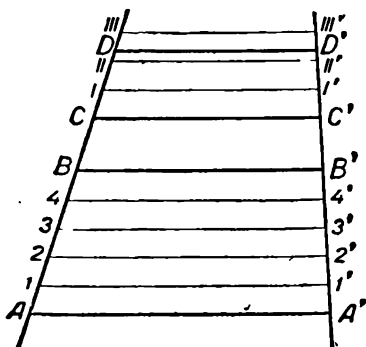
ностью до $\frac{1}{n}$, равны, каково бы ни было n .

Пусть, например, $n=5$; разделим AB на пять равных частей точками I , 2 , 3 , 4 (черт. 117) и предположим, что пятая часть отрезка AB содержится в отрезке D больше, чем 2 раза, но меньше, чем 3 раза; пусть I , II , III — конечные точки трёх отрезков, равных пятой части AB и последовательно отложенных на прямой CD от точки C , так что точки I и II лежат между C и D (точка II может совпасть также с D), точка III — по ту сторону точки D .

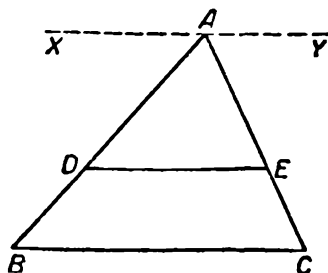
¹⁾ Доказательство может считаться законченным, если опираться на следующую теорему, которую мы уже приводили: две величины пропорциональны, если: 1) одному и тому же значению первой соответствует всегда одно и то же значение второй и 2) сумме двух значений первой величины соответствует сумма двух соответствующих значений второй.

Первое условие в данном случае выполняется, как это доказано в тексте (1°), второе условие, очевидно, также выполняется в силу того, что соответственные точки следуют на прямых $ABCD$ и $A'B'C'D'$ в одном и том же порядке. В тексте мы воспроизводим доказательство общей теоремы, применяя это доказательство к данному случаю.

Через все эти точки 1, 2, 3, 4, I, II, III проводим прямые, параллельные прямым AA' , BB' , CC' , DD' , до пересечения в точках I' , $2'$, $3'$, $4'$, I' , II' , III' с прямой $A'B'C'D'$. Мы разделили, таким образом, отрезок $A'B'$ на пять равных частей и отложили три раза одну из этих частей от точки C' в направлении $C'D'$ (1°). Точки I' , II' находятся в интервале $C'D'$, а точка III' — по ту сторону точки D'



Черт. 117.



Черт. 118.

(в силу замечания, сделанного в самом начале доказательства). Теорема доказана.

114. Теорема. Прямая DE , параллельная одной из сторон треугольника ABC , делит две другие стороны AB и AC на пропорциональные части (черт. 118).

Действительно, если мы проведём через вершину A прямую XY , параллельную BC , то согласно предыдущей теореме параллельные BC , DE , XY делят секущие AB , AC на пропорциональные части.

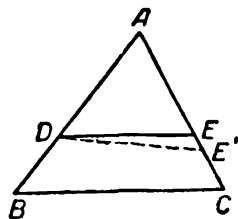
Примечание. Прямая, о которой идёт речь, может делить каждую из сторон треугольника внутренним образом или внешним образом; однако она делит обе стороны треугольника одинаковым образом.

Обратная теорема. Если прямая делит две стороны треугольника на пропорциональные части, то она параллельна третьей стороне.

Пусть DE — прямая, которая делит стороны AB и AC на пропорциональные части (черт. 119).

Проведём через точку D прямую, параллельную BC , и пусть E' — точка, где эта параллельная пересекает AC . Отношение $\frac{AE'}{EC}$ равно

отношению $\frac{AD}{DB}$ (по предыдущей теореме) и, следовательно, отноше-



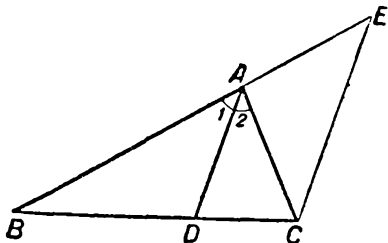
Черт. 119.

нию $\frac{AE}{EC}$ (по условию). Следовательно, точки E и E' совпадают (п. 108), и прямая DE параллельна EC .

115. Теорема. Во всяком треугольнике:

1) биссектриса любого угла делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам;

2) биссектриса внешнего угла делит противоположную сторону внешним образом на две части, также пропорциональные прилежащим сторонам.



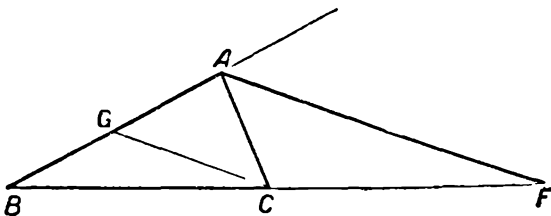
Черт. 120.

1°. Пусть AD — биссектриса угла A треугольника ABC (черт. 120). Я хочу доказать, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

С этой целью проведём прямую CE , параллельную AD , до пересечения в точке E с AB . Тогда в треугольнике BAD , пересечённом прямой CE , параллельной AD , будем иметь: $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$.

Но треугольник ACE имеет при вершинах E и C равные углы, как равные соответственно двум половинам — $\angle 1$ и $\angle 2$ угла A ($\angle E = \angle 1$ как соответственные, $\angle C = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие); следовательно, этот треугольник — равнобедренный, и в предыдущей пропорции можно заменить AE через AC , откуда и следует теорема.

2°. Биссектриса AF внешнего угла A (черт. 121) треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке F (если треугольник — не равнобедренный). Мы хотим доказать, что $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.



Черт. 121.

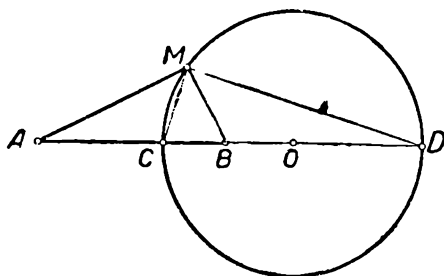
Доказательство вполне аналогично предыдущему. Проведём через точку C прямую CG , параллельную AF , и заметим, что: 1) параллельные прямые CG и AF дают пропорцию $\frac{BF}{CF} = \frac{BA}{GA}$ и 2) треугольник ACG — равнобедренный (как имеющий в точках C и G углы, соответственно равные двум половинам внешнего угла при вершине A и, следовательно, равные между собой), что позволяет заменить AG через AC .

Примечание. Мы видим, что биссектриса угла треугольника и биссектриса прилежащего внешнего угла делят гармонически противоположную сторону.

Обратная теорема. 1°. Если прямая, выходящая из вершины треугольника, делит внутренним образом противоположную сторону на части, пропорциональные двум прилежащим сторонам, то она является биссектрисой угла при вершине.

2°. Если прямая, выходящая из вершины треугольника, делит внешним образом противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то она является биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Так как имеется только одна точка (п. 108), которая делит внутренним образом сторону BC (черт. 120) на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то эта точка и есть основание биссектрисы угла A . Точно так же имеет-ся лишь одна точка (п. 110), которая делит внешним образом сторону BC (черт. 121) на части, пропорциональные прилежащим сторонам; эта точка и есть основание биссектрисы внешнего угла A .



Черт. 122.

116. Теорема. Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся между собой в данном отношении (отличном от 1), есть окружность.

Пусть A и B (черт. 122) — данные две точки; требуется найти геометрическое место таких точек M , чтобы отношение $\frac{MA}{MB}$ было равно данному числу m .

Существуют две точки этого геометрического места, одна C на отрезке AB , другая D на его продолжении. Это те точки, о существовании которых мы знаем из пп. 108—110. Пусть затем M есть какая-либо точка искомого геометрического места точек. Прямая MC , которая делит отрезок AB на части CA и CB , пропорциональные отрезкам MA и MB , есть биссектриса угла при M треугольника AMB . Прямая MD , которая делит внешним образом сторону AB этого треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, есть биссектриса внешнего угла при точке M . Эти две прямые взаимно перпендикулярны (п. 15 а), и точка M , следовательно, принадлежит окружности O , описанной на CD , как на диаметре (п. 78).

Обратно, предположим, что точка M лежит на окружности O . Проведём через точку M прямую MA' , симметричную с MB относительно MC , и пусть A' — точка, в которой она пересекает прямую AB . Так как прямые MC и MD — биссектрисы угла $A'MB$ и его попо-лнительного угла, то точка A' гармонически сопряжена с точкой B относительно концов отрезка CD (п. 115, примечание); поэтому она совпадает с точкой A . Так как прямые MC и MD — биссектрисы угла

AMB и его дополнительного угла, то имеет место зависимость

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = m.$$

Следствие. Если разделить гармонически диаметр окружности точками A и B , то отношение расстояний любой точки окружности до двух точек A и B постоянно.

УПРАЖНЕНИЯ.

124. На двух определённых прямых откладывают от двух определённых точек A и B , соответственно лежащих на этих прямых, два отрезка AM и BN , которые изменяются пропорционально друг другу, и через точки M и N проводят прямые, соответственно параллельные двум другим данным прямым. Найти геометрическое место точек пересечения построенных таким образом прямых.

125. Две секущие, выходящие из одной точки окружности, делят гармонически диаметр, перпендикулярный к прямой, соединяющей их необщие концы (доказать).

126. В какой области плоскости расположены такие точки, отношение расстояний которых до двух данных точек A и B больше заданного числа (пп. 112, 71)?

127. Найти точку, расстояния которой от вершин треугольника пропорциональны заданным числам.

Эта задача, если она возможна, имеет вообще два решения. Доказать, что две точки, отвечающие условию, лежат на одном и том же диаметре круга, описанного около данного треугольника, и делят гармонически этот диаметр.

128. Через общую точку A двух окружностей проводят произвольную секущую, которая вторично пересекает окружности в точках M и M' . Найти геометрическое место точек, делящих отрезок MM' в данном отношении (упр. 65).

ГЛАВА II.

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

117. **Определение.** Два треугольника называются *подобными*, когда они имеют равные углы и их соответственные стороны пропорциональны.

Примечание. Два равных треугольника тем самым подобны. Два треугольника, подобные одному и тому же третьему, подобны между собой; в частности, если два треугольника подобны, то любой треугольник, равный первому, подобен второму.

Лемма. *Всякая прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с двумя другими его сторонами треугольник, подобный первому.*

Пусть DE — прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC (черт. 123). Я утверждаю, что новый треугольник ADE подобен треугольнику ABC .

Прежде всего углы обоих треугольников попарно равны, так как угол при вершине A — общий, и углы D и B , E и C равны как соответственные.

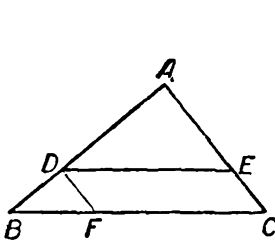
Во-вторых, мы имеем (п. 114): $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ и нам остаётся только доказать, что общее значение этих двух отношений равно значению отношения $\frac{DE}{BC}$.

Для этого проводим через точку D прямую DF , параллельную AC , так, чтобы получить параллелограмм $DECF$.

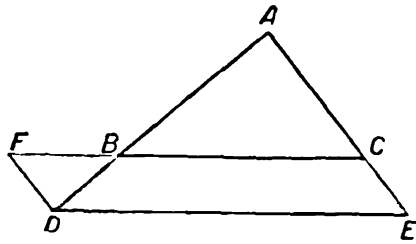
Прямая DF делит стороны BA и BC на пропорциональные части; следовательно, имеем:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB}.$$

Примечание. Прямая DE может быть внутренней по отношению к треугольнику (черт. 123) или внешней (черт. 124 и 125), что не изменяет доказательства.



Черт. 123.



Черт. 124.

Однако в случае, данном на чертеже 125, необщие углы обоих треугольников, лежащие против соответственных сторон, равны между собой не как соответственные, а как внутренние накрестлежащие.

118. Следующие предложения, известные под названием *признаков подобия треугольников*, дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы два треугольника были подобны.

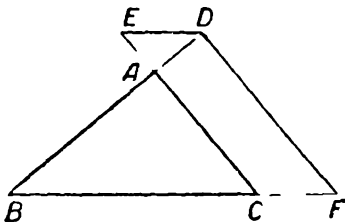
Первый признак подобия. Два треугольника подобны, если они имеют по два угла, соответственно равных друг другу.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — треугольники, в которых $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$ (черт. 126). Я откладываю на AB отрезок $AD = A'B'$ и провожу через точку D параллель DE к стороне BC . Треугольник ADE подобен ABC (по предыдущей лемме); кроме того, он равен $A'B'C'$, как имеющий с ним соответственно равные углы и равную сторону.

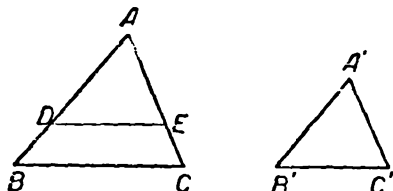
Второй признак подобия. Два треугольника подобны, если они имеют по равному углу, заключённому между пропорциональными сторонами.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — треугольники, у которых $\angle A = \angle A'$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (черт. 126). Отложим на стороне AB отрезок $AD = A'B'$ и проведём параллель DE к стороне BC . Треугольник ADE подобен треугольнику ABC . Он равен треугольнику $A'B'C'$, как имеющий с ним равный угол ($\angle A = \angle A'$), заключённый между соответственно равными сторонами. Действительно, AD равна $A'B'$ по построению, и из двух пропорций $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (условие) и $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, имеющих по три общих члена, следует, что $A'C' = AE$.

Третий признак подобия. Два треугольника подобны, если три стороны одного пропорциональны сторонам другого.



Черт. 125.



Черт. 126.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — треугольники, в которых $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Отложим на AB отрезок $AD = A'B'$ и проведём параллель DE к стороне BC . Треугольник ADE , подобный треугольнику ABC , равен треугольнику $A'B'C'$, так как их стороны соответственно равны; действительно, $AD = A'B'$ по построению, а из пропорций $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ и $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ (предыдущий пункт), имеющих по три равных члена соответственно с пропорциями, данными в условии теоремы: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ и $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, следует, что $AE = A'C'$ и $DE = B'C'$.

Примечание. Определение подобных треугольников содержит пять условий: три выражаются равенством соответственных углов, два — пропорциональностью сторон.

Следствие III п. 44 показывает, что можно опустить одно из трёх первых условий, что сводит общее число условий к четырём.

Но признаки подобия, которые мы рассматривали, позволяют заключить, что достаточно двух (надлежащим образом выбранных) условий из числа пяти первоначальных.

119. Теорема. Два треугольника, стороны которых соответственно параллельны или перпендикулярны, подобны.

Действительно, в данном случае углы обоих треугольников соответственно или равны или попарно дополнительные (п. 43), так что (если ABC и

$A'B'C'$ — данные треугольники) имеем:

$$\begin{array}{lll} A = A' & \text{или} & A + A' = 2d, \\ B = B' & \text{или} & B + B' = 2d, \\ C = C' & \text{или} & C + C' = 2d \end{array}$$

Три равенства второго столбца не могут быть одновременно верны, иначе общая сумма углов в двух треугольниках была бы равна шести прямым, а не четырём. Два из тех же равенств также не могут существовать одновременно; например, нельзя иметь в одно и то же время $A + A' = 2d$ и $B + B' = 2d$, так как в таком случае общая сумма углов равнялась бы $4d + C + C'$. Следует поэтому взять по крайней мере два равенства из первого столбца, и таким образом треугольники имеют по два соответственных равных угла (первый признак подобия).

120. Теорема. Два прямоугольных треугольника подобны, если отношение одного из катетов к гипотенузе одно и то же в обоих треугольниках.

Действительно, мы можем поступить как в п. 118 и построить третий треугольник, подобный первому и имеющий ту же гипотенузу, что и второй. Второй и третий треугольники имеют, таким образом, ещё и по равному катету и будут равны по второму признаку равенства прямоугольных треугольников.

Примечание. Кроме этого признака подобия можно, конечно, применять к прямоугольным треугольникам признаки подобия произвольных треугольников. Например, два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу (первый признак подобия произвольных треугольников) или если их катеты пропорциональны (второй признак подобия треугольников).

121. Теорема. Пучок прямых, проходящих через одну точку, отсекает на двух параллельных прямых пропорциональные отрезки.

Пусть, например, SAA' , SBB' , SCC' (черт. 127) — три прямые, проходящие через одну точку, которые пересекают обе параллельные прямые ABC и $A'B'C'$.

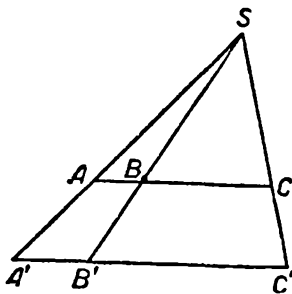
Из подобия треугольников SAB и $SA'B'$ (п. 117) имеем:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{S'B'}$$

и из подобных треугольников SBC и $S'B'C'$:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{SB}{S'B'}$$

откуда следует пропорциональность отрезков $A'B'$ и $B'C'$ отрезкам AB и BC .



Черт. 127.

Примечание. Каждые два отрезка, соответствующие друг другу, направлены либо в одну и ту же сторону, либо в противоположные стороны, в зависимости от того, лежит ли точка S вне обеих параллельных прямых или между ними.

Обратная теорема. Если три прямые отсекают на двух параллельных прямых пропорциональные отрезки (причём каждые два соответственных отрезка направлены в одну и ту же сторону или каждые два соответственных отрезка направлены в противоположные стороны), то эти три прямые либо проходят через одну точку, либо параллельны между собой.

Если отрезки соответственно равны и направлены в одну сторону, то прямые параллельны (п. 46, вторая обратная теорема).

Итак, пусть AA' , BB' , CC' — прямые, которые отсекают на параллельных ABC и $A'B'C'$ пропорциональные отрезки, так что имеют место равенства

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC},$$

причём если отрезки обеих прямых направлены в одну сторону, то общее значение трёх отношений отлично от 1. Это ограничение делает невозможным (п. 46) параллельность прямых AA' и BB' ; следовательно, они пересекаются в некоторой точке S .

Соединив затем S с C , мы видим, что эта прямая пересечёт прямую $A'B'C'$ в точке C'_1 , которая обязательно совпадает с C' , так как имеем:

$$\frac{A'C'_1}{B'C'_1} = \frac{AC}{BC} \text{ (по предыдущей теореме)} = \frac{A'C'}{B'C'} \text{ (по условию)}.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

129. Через точку пересечения диагоналей трапеции проводят прямую, параллельную основаниям. Доказать, что непараллельные стороны и точка пересечения диагоналей определяют на этой прямой два равных отрезка.

130. Пусть $a = AB$, $b = CD$ — основания трапеции $ABDC$. Одну из её непараллельных сторон делят в отношении $\frac{EA}{EC} = \frac{m}{n}$ и проводят через точку E прямую, параллельную основаниям. Доказать, что отрезок этой параллели, заключённый внутри трапеции, равен $\frac{m \cdot CD + n \cdot AB}{m + n}$. Рассмотреть случай, когда E — середина стороны AC .

131. Если из вершин треугольника и точки пересечения медиан опустить перпендикуляры на прямую, лежащую вне треугольника, то последний из этих перпендикуляров есть среднее арифметическое трёх первых (см. предыдущее упражнение).

132. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проводят произвольную секущую, которая пересекает диагональ BD в точке E и прямые BC и CD — в точках F и G . Доказать, что AE есть среднее пропорциональное между EF и EG .

133. Найти геометрическое место точек, которые делят в данном отношении отрезки, отсекаемые сторонами данного угла на параллельных прямых данного направления.

134. Найти геометрическое место точек, из которых две данные окружности видны под равными углами ¹⁾.

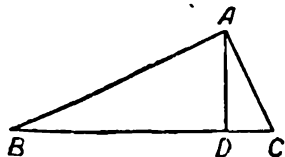
ГЛАВА III.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ.

122. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Ортогональной проекцией* (или ради сокращения просто *проекцией*) точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Проекцией отрезка на прямую называется отрезок, концами которого служат проекции концов данного отрезка.

123. Пусть ABC (черт. 128) — прямоугольный треугольник с прямым углом при A . Из этой вершины опустим на гипотенузу высоту AD . Между различными элементами фигуры, таким образом полученной, существуют некоторые соотношения, с которыми мы теперь и познакомимся.



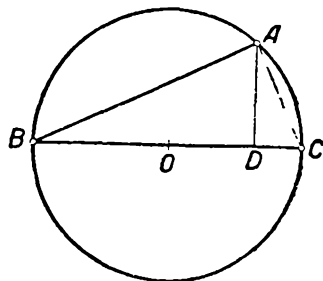
Черт. 128.

Теорема. *В прямоугольном треугольнике каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.*

Так, AB есть среднее пропорциональное между BD и BC . Действительно, прямоугольные треугольники ABD и ABC подобны как имеющие общий угол при B (п. 120, примечание). Сторонам AB и BD первого треугольника соответствуют стороны BC и AB второго, так что имеем равенство:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \text{ или } AB^2 = BD \cdot BC.$$

Следствие. *Всякая хорда круга есть среднее пропорциональное между диаметром и её проекцией на диаметр, проходящий через один из её концов* (черт. 129).



Черт. 129.

Действительно, этот диаметр и данная хорда являются гипотенузой и катетом одного и того же прямоугольного треугольника (п. 73, следствие II).

Примечание. Подобные треугольники ABD и ABC (черт. 128, 129) дают ещё:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } AB \cdot AC = BC \cdot AD.$$

¹⁾ Угол, под которым окружность видна из определённой точки, есть угол, образованный касательными, проведёнными к этой кривой из данной точки.

Таким образом, *произведение катетов прямоугольного треугольника равно произведению гипотенузы на соответствующую высоту*.

124. Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

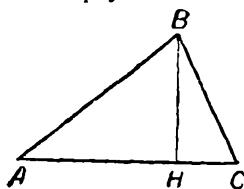
Мы видели, что имеет место равенство $AB^2 = BC \cdot BD$.

Та же теорема, применённая к катету AC , даёт $AC^2 = BC \cdot CD$. Складывая почленно, имеем:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + CD) = BC^2.$$

Примечание. Эта теорема служит для вычисления какой-либо стороны прямоугольного треугольника, если заданы две другие.

Так, например, пусть требуется вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 м и 4 м. Единицей длины взят метр; квадрат числа, измеряющего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел 3 и 4, измеряющих катеты. Эта сумма равна числу $3^2 + 4^2 = 25$, квадратный корень из которого 5; гипотенуза будет равна 5 м.



Черт. 130.

Пусть ещё требуется вычислить один из катетов прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна 10 м и другой катет равен 7 м. Квадрат искомой стороны, сложенный с $49 (= 7^2)$, должен дать $100 (= 10^2)$; этот квадрат, таким образом, будет равен $100 - 49 = 51$. Квадратный корень из 51 (т. е. 7,14 — с точностью до одной сотой) даёт длину искомой стороны в метрах.

125. Теорема. В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между двумя отрезками, на которые он рассекает гипотенузу.

Действительно, треугольники ABD и ACD (черт. 128) подобны, как имеющие взаимно перпендикулярные стороны. Отрезки BD , AD , таким образом, пропорциональны отрезкам AD , CD .

Следствие. В круге перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между двумя отрезками, на которые он рассекает диаметр.

126. Теорема. Разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону.

В треугольнике ABC (черт. 130) спроектируем вершину B в точку H прямой AC .

Равенства

$$AB^2 = AH^2 + BH^2,$$

$$BC^2 = CH^2 + BH^2$$

дают после почленного вычитания:

$$AB^2 - BC^2 = AH^2 - CH^2.$$

Теорема. Во всяком треугольнике:

1) квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон и проекции на неё другой стороны;

2) квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон и проекции на неё другой стороны.

1°. Пусть в треугольнике ABC (черт. 130) BC — сторона, лежащая против острого угла A . Опустим из точки B перпендикуляр BH на прямую AC . Имеем (по предыдущей теореме)

$$BC^2 = AB^2 + CH^2 - AH^2.$$

Но так как CH есть разность между AC и AH , то можно заменить¹⁾ CH^2 через $AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2$.

Таким образом, получаем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH.$$

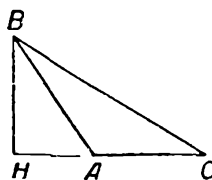
2°. Пусть в треугольнике ABC (черт. 131) BC — сторона, лежащая против тупого угла A . Опустим из точки B перпендикуляр BH на прямую AC . Имеем снова:

$$BC^2 = AB^2 + CH^2 - AH^2.$$

Так как CH — сумма отрезков AC и AH , то можно заменить¹⁾ CH^2 через $AC^2 + 2AC \cdot AH + AH^2$.

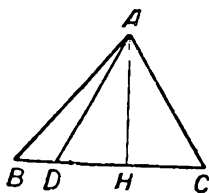
При этом получим:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH.$$



Черт. 131.

Следствие. Угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли квадрат стороны, лежащей против этого угла, меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.



Черт. 132.

127. Теорема Стюарта. Если даны треугольник ABC и на его основании точка D , лежащая между точками B и C , то имеем равенство:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

Опустим из точки A (черт. 132) на BC перпендикуляр AH и предположим для определенности, что точка H лежит с той же стороны от точки D , как и вершина C . Применив обе теоремы предыдущего пункта: одну — к треугольнику ACD , другую — к треугольнику ABD , получим:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DH,$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH.$$

¹⁾ Мы предполагаем здесь известными формулы, дающие квадрат суммы или разности двух чисел: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

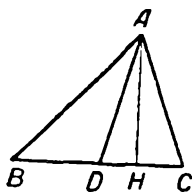
Умножим эти два равенства: первое на BD , второе на DC и сложим их почленно.

Член $2 \cdot BD \cdot DC \cdot DH$, который встречается один раз со знаком $-$, другой раз со знаком $+$, исчезает, и мы получим:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot (BD + DC) + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC = \\ = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC.$$

128. Вычисление длин замечательных линий треугольника.

Пусть ABC — произвольный треугольник, стороны которого BC , CA , AB соответственно измеряются числами (по предположению данным)



Черт. 133.

a , b , c . Поставим себе задачей вычислить медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

1°. Медианы. Пусть AD — медиана, выходящая из вершины A (черт. 133). В равенстве, полученном при помощи предыдущей теоремы, следует заменить BC , CA , AB соответственно через a ,

b , c ; CD и BD — через $\frac{a}{2}$. Можно все члены ра-

венства разделить на a , и мы получим:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Итак, *полусумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату половины третьей стороны, сложенному с квадратом соответствующей медианы.*

128а. С другой стороны, если в равенствах (п. 127)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DH, \quad AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH$$

заменить снова BC , CA , AB через a , b , c ; DC и BD — через $\frac{a}{2}$ и если вычесть почленно первое равенства из второго, то получим:

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot DH.$$

Итак, *разность квадратов двух сторон треугольника равна удвоенному произведению третьей стороны и проекции на эту сторону соответствующей медианы.*

Следствие. Геометрическое место точек A , разность квадратов расстояний которых до двух определённых точек B и C постоянна, есть перпендикуляр к прямой BC .

Действительно, если разность $AB^2 - AC^2$ постоянна, то проекция H точки A на прямую BC есть определённая точка.

129. 2°. Биссектрисы. Обозначим теперь через AD биссектрису угла A (черт. 134). Точка D разделит BC пропорционально сторо-

нам AB и AC , так что будем иметь:

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c} \quad \text{или} \quad BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{и} \quad CD = \frac{ab}{b+c}.$$

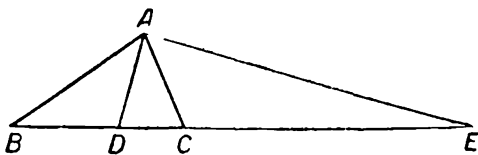
Заменим в соотношении, полученном на основании теоремы п. 127, BD и CD их выражениями и одновременно BC , CA , AB — их значениями; мы получим, разделив на a ,

$$\frac{bc^2}{b+c} + \frac{b^2c}{b+c} - AD^2 = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c},$$

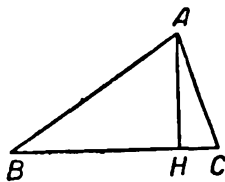
откуда

$$AD^2 = \frac{bc^2 + b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}.$$

Пусть теперь AE — биссектриса внешнего угла при A (черт. 134); предположим для определённости, что AB больше AC , так что точка E , которая делит внешним образом сторону BC пропорционально сторонам AB и AC , лежит на продолжении стороны BC за точку C .



Черт. 134.



Черт. 135.

Имеем:

$$\frac{BE}{c} = \frac{CE}{b} = \frac{BC}{c-b} = \frac{a}{c-b}$$

или

$$BE = \frac{ac}{c-b} \quad \text{и} \quad CE = \frac{ab}{c-b}.$$

Мы применим теорему п. 127 к треугольнику ABE и к точке C , взятой на основании BE . Заменяя BC , CA , AB , BE и CE их значениями и разделив на a , имеем:

$$\frac{bc^2}{c-b} + AE^2 - \frac{b^2c}{c-b} = \frac{ac}{c-b} \cdot \frac{ab}{c-b},$$

откуда

$$AE^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - \frac{bc^2 - b^2c}{c-b} = bc \cdot \frac{a^2 - (c-b)^2}{(c-b)^2}.$$

130. 3°. Высоты. Опустим из вершины A высоту AH (черт. 135). Из двух углов B и C по крайней мере один острый. Предположим для определённости, что острым будет угол B . Можно применить теорему

п. 126 к стороне $AC = b$, лежащей против этого угла, и записать:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$$

или

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Но из прямоугольного треугольника AHB имеем:

$$AH^2 = c^2 - BH^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

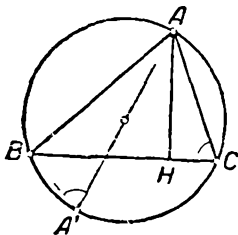
Это равенство, правая часть которого есть разность двух квадратов, может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} AH^2 &= \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) = \\ &= \frac{(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2} = \\ &= \frac{[b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2]}{4a^2}. \end{aligned}$$

Но каждый из множителей в числителе правой части представляет собою разность квадратов. Предыдущая формула может быть, таким образом, ещё записана в виде:

$$AH^2 = \frac{(b - a + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b + c)}{4a^2}.$$

Если обозначить через p половину периметра треугольника, так что $a + b + c = 2p$, то величины $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$ будут соответственно равны $2p - 2a$, $2p - 2b$, $2p - 2c$ и .



Черт. 136.

$$AH^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}.$$

Если, с другой стороны, выполнить умножение $[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]$, то можно записать:

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2} [4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2] = \frac{1}{4a^2} (2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

130а. Теорема. Произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанного круга.

В треугольнике ABC (черт. 136) пусть AH — высота, опущенная из вершины A , AA' — диаметр описанного круга. Треугольники AHC и ABA' — прямоугольные, один с прямым углом при вершине H , другой с прямым углом при вершине B ; они имеют по равному острому углу ($\angle A' = \angle C$, как опирающиеся на одну и ту же дугу AB); следова-

тельно, эти треугольники подобны и дают:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AA'} \quad \text{или} \quad AB \cdot AC = AH \cdot AA'.$$

Пользуясь найденным выше значением отрезка AH , можно получить из этой теоремы следующее выражение для радиуса описанной окружности R :

$$R = \frac{AA'}{2} = \frac{bc}{2AH} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

135. Произведение отрезков, отсекаемых подвижной касательной к кругу на двух параллельных касательных к тому же кругу, есть величина постоянная (доказать).

136. Обратная величина квадрата высоты прямоугольного треугольника равна сумме обратных величин квадратов катетов (доказать).

137. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон.

138. Разность между суммой квадратов расстояний произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин параллелограмма и суммой квадратов расстояний той же точки до двух других его вершин есть величина постоянная (доказать). Рассмотреть случай прямоугольника.

139. Сумма квадратов четырёх сторон четырёхугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверённым квадратом отрезка, соединяющего середины диагоналей (доказать).

140. Если A, B, C — вершины треугольника, G — точка пересечения медиан, M — произвольная точка плоскости, то имеем:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$

(доказать).

141. Найти геометрическое место точек, квадраты расстояний которых до двух постоянных точек, соответственно умноженные на данные числа, имеют данную сумму или разность. Доказать этим путём теорему п. 116.

142. Найти геометрическое место точек, квадраты расстояний которых до трёх данных точек, соответственно умноженные на три данных числа, имеют постоянную сумму. Рассмотреть ту же задачу для случая, когда вместо трёх точек дано произвольное число точек.

143. Квадрат биссектрисы угла треугольника равен произведению сторон, её заключающих, уменьшенному на произведение отрезков, на которые она отсекает третью сторону (доказать).

Сформулировать и доказать аналогичную теорему для биссектрисы внешнего угла.

144. Из формул для медианы и для биссектрисы (пп. 128, 129) вывести неравенства, указанные в упражнениях 11 и 18.

145. Если медиана треугольника есть среднее пропорциональное между сторонами b и c , которые её заключают, то квадрат, построенный на разности этих сторон, имеет своей диагональю третью сторону треугольника.

146. Через внутреннюю точку круга проведены под прямым углом две хорды. Доказать, что сумма квадратов двух противоположных сторон четырёхугольника, вершинами которого служат концы этих хорд, равна квадрату диаметра.

147. Произведение расстояний любой точки окружности до двух противоположных сторон четырёхугольника, вписанного в эту окружность, равно произведению расстояний этой же точки до двух других сторон или до двух диагоналей (доказать).

Как изменится формулировка этой теоремы, если две противоположные стороны обратятся в касательные?

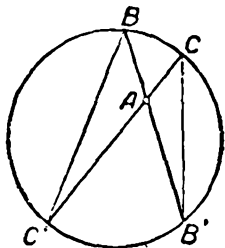
ГЛАВА IV.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В КРУГЕ. РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ.

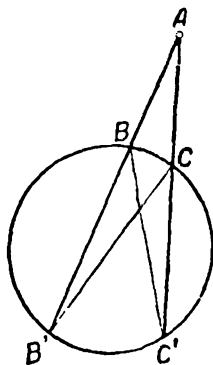
131. Теорема. Если через точку A , взятую в плоскости данной окружности, провести к этой окружности секущие, то произведение расстояний от точки A до двух точек пересечения каждой секущей с окружностью есть величина постоянная.

Будем различать два случая:

1°. Точка A лежит внутри окружности (черт. 137). Пусть через эту точку проведены секущие BAB' и CAC' . Соединим точку B с точкой C' и точку C с точкой B' . Треугольники ABC' и ACB' подобны, как имеющие равные углы. В самом деле, у них углы A равны как вертикальные и $\angle B' = \angle C'$, так как оба измеряются



Черт. 137.



Черт. 138.

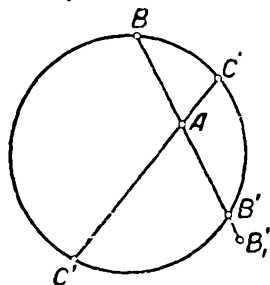
половиной дуги BC . Пропорциональность сторон даёт $\frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$, откуда, приравняв произведение крайних произведению средних, имеем:

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC'.$$

2°. Точка A лежит вне окружности (черт. 138). Пусть ABB' и ACC' — две секущие, проходящие через эту точку. Соединим снова точки C и B' , B и C' . Треугольники ABC' и ACB' опять подобны, как имеющие равные углы. В самом деле, у них угол A — общий и $\angle B' = \angle C'$, так как оба измеряются половиной дуги BC . Пропорциональность сторон даёт, как и выше: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$, откуда следует доказываемое предложение.

131а. Обратная теорема. Если на двух прямых BAB' и SAC' , проходящих через точку A (черт. 139), взять такие четыре точки B, B', C, C' , что произведение $AB \cdot AB'$ равно произведению $AC \cdot AC'$ (причём точка A либо лежит на продолжении обоих отрезков BB' и CC' , либо лежит на самих отрезках), то эти четыре точки лежат на одной окружности.

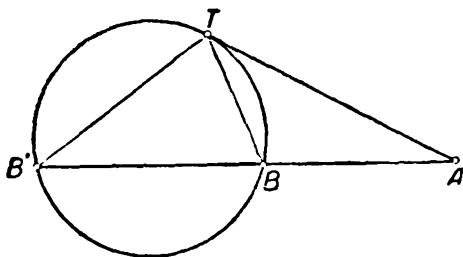
В самом деле, три точки B, C, C' , не лежащие на одной прямой, определяют окружность, и эта окружность пересекает прямую BAB' в некоторой точке B_1' , так что $AB \cdot AB_1' = AC \cdot AC'$. Сравнение этого равенства с условием теоремы $AC \cdot AC' = AB \cdot AB'$ показывает, что $AB_1' = AB'$. Следовательно, точка B_1' совпадает с точкой B' .



Черт. 139.

132. Теорема. Если через точку, лежащую вне окружности, провести касательную и секущую, то касательная есть средняя пропорциональная между всей секущей и её внешней частью.

В самом деле, пусть ABV' — секущая, AT — касательная (черт. 140). Следует повторить без всякого изменения доказательство теоремы



Черт. 140.

п. 131 (2°), заменив лишь две буквы C и C' буквой T .

Мы имеем в данном случае также пример того, что касательная (п. 67) должна рассматриваться как прямая, имеющая с окружностью две общие точки, слившиеся в точке касания.

Обратная теорема.

Если отложить на прямой ABV' от точки A в

одном направлении отрезки AB и AV' и на другой прямой, выходящей из той же точки A , отрезок AT , представляющий собою среднее пропорциональное между AB и AV' , то три точки B, V', T лежат на окружности, касающейся прямой AT в точке T .

В самом деле, окружность BVT имеет с прямой AT общую точку T ; если бы она имела ещё одну общую точку T' (черт. 141), то имело бы место (п. 131) равенство:

$$AB \cdot AV' = AT \cdot AT'.$$

Это равенство при сравнении с условием $AB \cdot AV' = AT^2$ показывает, что точка T' necessarily совпадёт с точкой T .

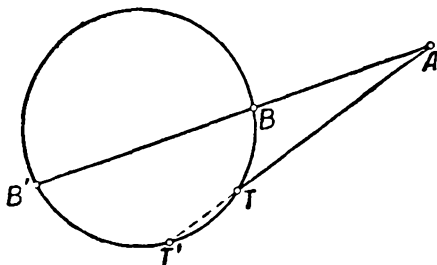
133. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Степенью точки A относительно окружности называется произведение отрезков какой-либо секущей, выходящей из этой точки, считая отрезки от точки A до точек пересечения

с окружностью (произведение это согласно п. 131 не зависит от направления секущей); это произведение берётся со знаком $+$, если точка A лежит вне окружности, и со знаком $-$, если она лежит внутри окружности.

Если точка лежит вне окружности, то степень точки равна квадрату касательной, проведённой через эту точку.

134. *Степень точки A относительно окружности с центром O равна разности квадратов расстояния OA и радиуса.*

В самом деле, примем за секущую ABB' прямую OA . Отрезки AB и AB' представляют собою: один сумму, другой — разность отрезка OA и радиуса; их произведение, следовательно, равно разности квадратов этих двух величин.



Черт. 141.

Если принять во внимание знак степени, то степень всегда равна $d^2 - R^2$ (где d — расстояние OA , R — радиус).

135. *Если две окружности пересекаются под прямым углом, то квадрат радиуса каждой из них равен степе-*

ни её центра относительно другой окружности, и обратно.

Если окружности O и O' (черт. 142) пересекаются в точке A под прямым углом, то касательная к окружности O' в этой точке есть OA и степень точки O относительно окружности O' равна OA^2 .

Обратно, если степень точки O относительно окружности O' равна OA^2 , то OA — касательная к окружности и обе окружности ортогональны.

136. *Геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень относительно двух данных окружностей, есть прямая, перпендикулярная к линии центров.*

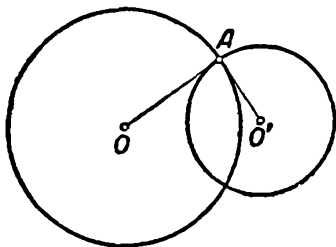
Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.

Пусть даны две окружности с центрами O и O' (черт. 143) и радиусами R и R' .

Если точка M имеет одну и ту же степень относительно этих двух окружностей, то мы имеем: $OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$; это равенство можно переписать в виде $OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$, откуда и следует (п. 128а) заключение теоремы.

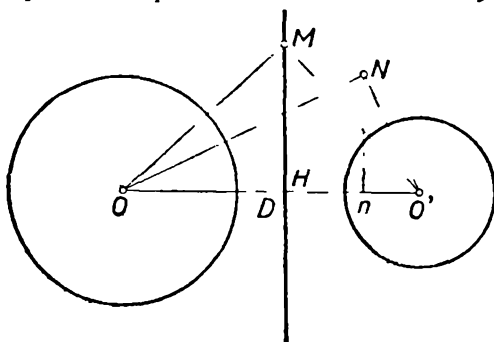
Согласно п. 128а расстояние между точкой пересечения H радикальной оси с линией центров и серединой D расстояния между центрами даётся формулой: $2DH \cdot OO' = R^2 - R'^2$.

Примечания: 1°. Предыдущее доказательство справедливо, если одна из окружностей имеет радиус, равный нулю, и, следовательно,



Черт. 142.

обращается в свой центр. Таким образом, *геометрическое место точек, степень которых относительно данной окружности равна квадрату их расстояния до данной точки, есть прямая, перпендикулярная к прямой, соединяющей данную точку с центром окружности.*



Черт. 143.

Эту прямую можно назвать *радикальной осью окружности и точки*.

2°. Две концентрические окружности не имеют радикальной оси¹⁾.

3°. Разность степеней какой-либо точки относительно двух окружностей равна удвоенному произведению расстояния этой точки до радикальной оси и рас-

стояния между центрами (черт. 143).

В самом деле, пусть N — заданная точка, n — её проекция на OO' . Разность степеней этой точки относительно обеих окружностей будет:

$$ON^2 - R^2 \sim (O'N^2 - R'^2) = ON^2 - ON'^2 - (R^2 - R'^2).$$

Но мы имеем:

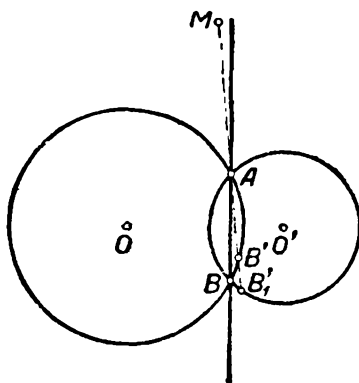
$$ON^2 - O'N^2 = 2Dn \cdot OO' \\ \text{и } R^2 - R'^2 = 2DH \cdot OO',$$

откуда, вычитая, получаем:

$$ON^2 - O'N^2 - (R^2 - R'^2) = \\ = 2Hn \cdot OO'.$$

137. Если две окружности пересекаются, то радикальной осью служит прямая, соединяющая точки пересечения.

В самом деле, понятно, что любая точка прямой AB (черт. 144) принадлежит геометрическому месту точек, имеющих одну и ту же степень относительно обеих окружностей. Обратно, из предыдущего вытекает, что любая точка M этого геометрического места принадлежит прямой AB . Это можно усмотреть и непосредственно, если соединить точку M с точкой A : если бы эта прямая пересекла



Черт. 144.

¹⁾ Радикальную ось двух концентрических окружностей можно рассматривать как лежащую в бесконечности. Действительно, если при постоянной разности $R^2 - R'^2$ точки O и O' неограниченно приближаются друг к другу, то длина отрезка DH обращается в бесконечность.

обе окружности в двух новых, различных между собою точках B' и B_1' , то обе степени $MA \cdot MB'$ и $MA \cdot MB_1'$ были бы различны.

Точно так же, если две окружности касаются друг друга, то радикальная ось есть их общая касательная.

138. Радикальная ось двух окружностей (по крайней мере, часть этой оси, внешняя относительно обеих окружностей) есть геометрическое место центров окружностей, которые пересекают две данные окружности под прямым углом.

Действительно, центр одной из таких окружностей имеет одну и ту же степень относительно двух данных окружностей, а именно квадрат радиуса окружности.

Радикальная ось делит общую касательную на две равные части.

139. Теорема. Радикальные оси трёх окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной и той же точке или параллельны.

Действительно, точка пересечения двух из трёх радикальных осей имеет одну и ту же степень относительно трёх окружностей, следовательно, она принадлежит и третьей радикальной оси. Эта точка называется радикальным центром трёх окружностей. Если это — внешняя точка, то она служит центром окружности, которая пересекает все три окружности под прямым углом.

Примечание. Если две радикальные оси совпадают, то предыдущее рассуждение доказывает, что третья совпадает с первыми. Три окружности имеют одну и ту же радикальную ось. Каждая окружность, ортогональная к двум из трёх данных окружностей, ортогональна и к третьей.

УПРАЖНЕНИЯ.

148. В плоскости даны: окружность и две точки A и B ; через точку A проводят различные секущие ANM , которые пересекают окружность в точках M и N .

Доказать, что окружность, проходящая через точки M и N и точку B , проходит через другую неподвижную точку.

149. Геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно данных двух окружностей равно данному числу, есть окружность, которая с двумя первыми окружностями имеет одну и ту же радикальную ось (доказать). Вывести отсюда геометрическое место точек упражнения 128.

150. Параллельно стороне BC треугольника проведена секущая DE , которая пересекает сторону AB в точке D и сторону AC — в точке E . Показать, что радикальной осью двух окружностей, диаметрами которых служат соответственно BE и CD , всегда является высота треугольника ABC , проведённая через точку A .

151. Пусть D и D' — две точки на стороне BC треугольника, E и E' — две точки на стороне CA , F и F' — две точки на стороне AB . Если известно, что существуют окружность, проходящая через точки D, D', E, E' , окружность, проходящая через точки E, E', F, F' , и окружность, проходящая через точки F, F', D, D' , то отсюда следует, что шесть точек D, D', E, E', F, F' лежат на одной окружности (доказать).

152. В каком случае различные окружности, ортогональные к двум данным окружностям O и O' , пересекают линию центров OO' ? Показать, что все они пересекают её в этом случае в одних и тех же двух точках

(пределных точках Понселе), а именно в тех точках, которые имеют с данными окружностями одну и ту же радикальную ось.

153. Через точки A и B проведена какая-либо окружность и через точки C и D , лежащие на одной прямой с первыми, — другая окружность, также произвольная. Доказать, что общая хорда этих двух окружностей проходит через одну неподвижную точку.

154. Если радикальный центр трёх окружностей лежит внутри этих окружностей, то он служит центром окружности, которая каждой из данных окружностей делится на две равные части (доказать).

ГЛАВА V.

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ.

140. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть выбрана точка S , которая называется *центром подобия* (или *центром гомотетии*), и число k , которое называется *коэффициентом подобия*; точкой, *гомотетичной* какой-либо точке M , называется точка M' , которая получается, если соединить точку M с точкой S прямой линией и отложить на этой прямой от точки S в направлении SM (черт. 145) или в противоположном направлении (черт. 145а) такой отрезок SM' , что имеет место равенство $\frac{SM'}{SM} = k$.

Гомотетия называется *прямой*, если отрезок SM' откладывается в ту же сторону, как и SM (черт. 145), и *обратной*, если оба эти отрезка направлены в противоположные стороны (черт. 145а).

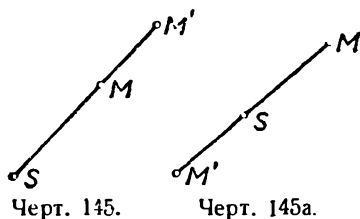
Фигура, гомотетичная (или перспективно-подобная, или подобная и подобно расположенная) какой-либо фигуре F , есть фигура, образованная совокупностью точек M' , гомотетичных точкам, образующим фигуру F .

Примечания: 1°. *Центр гомотетии есть точка, сама себе гомотетичная; это — единственная точка, которая обладает данным свойством* (за исключением, конечно, случая, когда гомотетия прямая и коэффициент подобия равен 1; в этом случае любая точка совпадает со своей гомотетичной).

2°. Симметрия относительно точки (п. 99) есть частный случай обратной гомотетии.

141. **Теорема.** В двух гомотетичных системах точек отрезок, соединяющий две какие-либо точки одной из систем, и отрезок, соединяющий соответственные им точки другой, всегда параллельны, и их отношение равно коэффициенту подобия; они направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны, смотря по тому, будет ли гомотетия прямой или обратной.

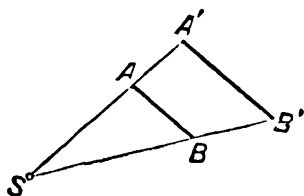
Действительно, пусть A и B — две точки первой фигуры, A' и B' — точки, им гомотетичные (черт. 146), S — центр гомотетии, k — коэффи-



ент подобия. Пропорция $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k$ показывает (п. 114, обратная теорема), что отрезки $A'B'$ и AB параллельны, а подобие треугольников $SA'B'$ и SAB — что отношение этих отрезков равно отношению SA' к SA .

Следствия: I. *Фигура, гомотетичная прямой линии, есть прямая линия.*

Действительно, если точка B перемещается по прямой AB , причём последняя остаётся неподвижной, то точка B' описывает прямую, проходящую через A' и параллельную AB .



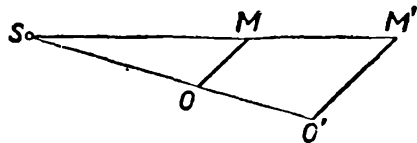
Черт. 146.

II. *Фигура, гомотетичная окружности, есть окружность, причём их центры — гомотетичные точки.*

Действительно, если точка B перемещается так, что её расстояние от определённой точки A остаётся постоянным, то точка B' опишет окружность с центром в A' и радиусом $A'B' = k \cdot AB$.

III. *Фигура, гомотетичная данному треугольнику, есть треугольник, подобный первому.*

142. Обратная теорема. Если на плоскости, в которой лежат две системы точек, существуют две такие точки O и O' , что отрезок, соединяющий точку O с какой-либо точкой M первой системы, и отрезок, соединяющий точку O' с соответственной точкой M' второй системы, всегда параллельны и имеют данное отношение (причём оба отрезка всегда направлены либо в одну и ту же сторону, либо всегда направлены в противоположные стороны), то эти две системы гомотетичны.



Черт. 147.

Для того чтобы эта теорема была верна во всех случаях, необходимо считать прямо-гомотетичными и такие две системы, в которых отрезки OM и $O'M'$ равны и направлены в одну и ту же сторону, т. е. две системы, которые равны между собой и получаются одна из другой с помощью поступательного перемещения.

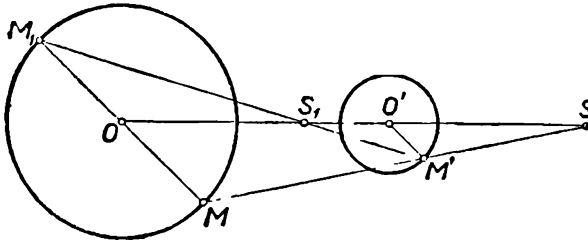
Пусть M и M' — две какие-либо соответственные точки (черт. 147). Соединим M с M' . Если эта прямая параллельна OO' , то четырёхугольник $OMM'O'$ — параллелограмм и $OM = O'M'$; обе системы получатся одна из другой с помощью поступательного перемещения. В противном случае прямая MM' пересекает OO' в точке S , которая неподвижна, т. е. не зависит от выбора пары точек M, M' ; действительно, эта точка делит отрезок OO' в данном отношении k (внешним образом, если отрезки OM и $O'M'$ направлены в одну и ту же сторону, и внутренним образом, если они направлены в противополож-

ные стороны) вследствие подобия треугольников SOM и $SO'M'$. Далее, вследствие подобия тех же треугольников имеем:

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{O'M'}{OM} = k.$$

143. Следствие. *Две любые окружности можно рассматривать как гомотетичные и притом двумя различными способами.*

Действительно, если O и O' — центры этих окружностей, то концы M и M' двух соответственно параллельных радиусов, направленных в одну и ту же сторону, удовлетворяют условию предыдущей теоремы и описывают две прямо-гомотетичные фигуры (черт. 148); точно так же концы M_1 и M' двух параллельных радиусов, направленных в противо-



Черт. 148.

положные стороны, служат соответственными точками двух обратногомотетичных фигур: в обоих случаях коэффициент подобия равен отношению радиусов.

Следовательно, две окружности имеют два *центра подобия*¹⁾ — S, S_1 ; один, соответствующий прямой гомотетии, называется *внешним*, другой, соответствующий обратной гомотетии, — *внутренним*. Центры подобия делят гармонически отрезок, соединяющий центры окружностей, так как каждый из центров подобия делит его в отношении, равном отношению радиусов.

Точки касания внешней общей касательной прямо-гомотетичны, так как радиусы, проведенные в эти точки, параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Точно так же точки касания внутренней общей касательной обратногомотетичны.

Далее, *общие внешние касательные (если они существуют) пересекаются во внешнем центре подобия; внутренние общие касательные (если они существуют) — во внутреннем центре подобия.*

Если окружности касаются друг друга, то точка касания есть один из центров подобия.

¹⁾ Впрочем, две равные окружности не имеют внешнего центра подобия; их можно рассматривать как прямо-гомотетичные только благодаря тому обобщению этого понятия, которое было дано в предыдущем пункте.

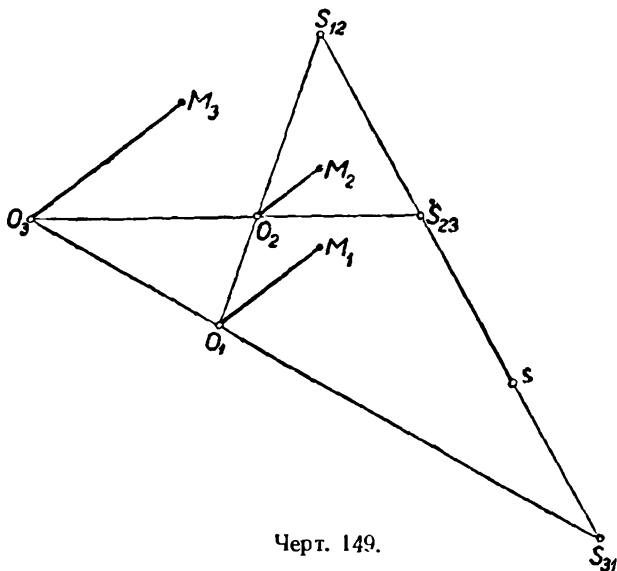
Примечание. Две окружности не могут быть гомотетичными более чем двумя различными способами.

Действительно, если имеет место гомотетия, то центры окружностей соответствуют друг другу (п. 141, следствие II) и соответственные радиусы параллельны.

В зависимости от того, будут ли они направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны, мы будем иметь ту или иную из двух гомотетий, установленных выше.

144. Теорема. *Две фигуры, гомотетичные третьей, гомотетичны между собой, и три центра подобия лежат на одной прямой.*

Пусть фигуры F_2 и F_3 (черт. 149) гомотетичны одной и той же фигуре F_1 ; пусть O_2 и O_3 — точки, соответствующие в фигурах F_2 и F_3 некоторой определённой точке O_1 фигуры F_1 ; M_2 и M_3 —



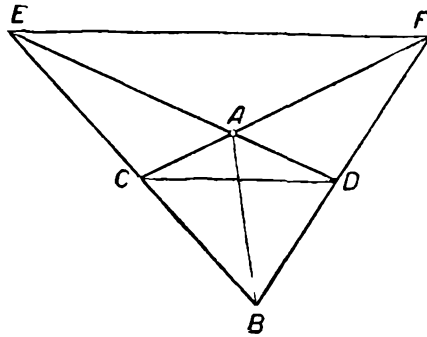
Черт. 149.

точки, соответствующие произвольной точке M_1 фигуры F_1 . Отрезки O_2M_2 и O_3M_3 параллельны, так как они оба параллельны O_1M_1 ; они либо всегда направлены в одну и ту же сторону (если они оба направлены в ту же сторону, как и O_1M_1 , или оба — в противоположную O_1M_1 , т. е. если гомотетии (F_1, F_2) и (F_1, F_3) одного и того же рода), либо всегда направлены в противоположные стороны (если две исходные гомотетии различного рода); наконец, их отношение постоянно, так как из равенств $\frac{O_2M_2}{O_1M_1} = k$ и $\frac{O_3M_3}{O_1M_1} = k'$ следует, что $\frac{O_3M_3}{O_2M_2} = \frac{k'}{k}$. Итак, две фигуры F_2 и F_3 действительно гомотетичны между собой, причём гомотетия будет прямой, если две исходные гомотетии одного рода, и обратной, если эти гомотетии различного рода.

Пусть теперь S_{23} — центр гомотетии фигур F_2 и F_3 , S_{31} — центр гомотетии фигур F_1 и F_3 , S_{12} — центр гомотетии фигур F_1 и F_2 ; я утверждаю, что эти точки лежат на одной прямой. Действительно, точка S_{23} , рассматриваемая как принадлежащая фигуре F_2 , сама себе соответствует в фигуре F_3 ; она имеет в качестве соответственной в фигуре F_1 некоторую точку s . Прямая sS_{23} пройдёт через точку S_{31} (как соединяющая соответственные точки фигур F_1 и F_3) и через точку S_{12} (как соединяющая соответственные точки фигур F_1 и F_2).

Примечание. Мы видим, что если три фигуры попарно гомотетичны, то из трёх гомотетий прямыми будут или одна или все три ¹⁾.

145. Три окружности C_1 , C_2 , C_3 можно рассматривать как фигуры попарно гомотетичные и притом четырьмя различными способами; действительно (п. 143), можно выбрать произвольно прямую или обратную гомотетию между окружностями C_1 и C_2 и между окружностями C_1 и C_3 (что составляет четыре возможных сочетания); гомотетия между окружностями C_2 и C_3 определяется двумя первыми гомотетиями. Применяя предыдущую теорему, мы видим, что *три внешние центра подобия лежат на одной прямой; точно так же лежат на одной прямой каждый внешний центр подобия с двумя внутренними центрами подобия, ему не соответственными*. Четыре прямые, таким образом определённые, называются *осями подобия*: одна из них — *внешняя ось подобия*, три другие — *внутренние*; они попарно пересекаются в шести центрах подобия.



Черт. 150.

Определения: *Полным четырёхсторонником* называется (черт. 150) фигура, которая получится, если продолжить противоположные стороны обыкновенного четырёхугольника до их пересечения. Полный четырёхсторонник имеет 6 вершин: A, B, C, D, E, F (черт. 150), попарно противоположных. *Диагональю* полного четырёхсторонника называется всякая прямая, соединяющая две противоположные вершины, так что полный четырёхсторонник $ABCDEF$ имеет три диагонали — AB, CD и EF .

Согласно этим определениям *оси подобия трёх окружностей образуют полный четырёхсторонник, имеющий своими диагоналями три линии центров*.

146. Определение. Две фигуры называются *подобными* между собой, если их можно расположить таким образом, чтобы они были гомотетичными.

¹⁾ Так как либо из трёх соответственных отрезков O_1M_1 , O_2M_2 и O_3M_3 два направлены в одну сторону, а третий — в противоположную, либо все три отрезка направлены в одну сторону. *Прим. ред. переведа.*

Две дуги круга, которым соответствуют равные центральные углы, будут, например, подобными фигурами.

Теорема. Дви подобных многоугольника имеют равные углы и их соответственные стороны пропорциональны.

Действительно, рассмотрим эти два многоугольника в том положении, в котором они гомотетичны; при этом их углы будут соответственно равны, так как их соответственные стороны параллельны и направлены в одну и ту же сторону или параллельны и направлены в противоположные стороны (в зависимости от того, будет ли гомотетия прямой или обратной); отношение любых двух соответственных сторон равно коэффициенту подобия.

Следствие. Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

Это вытекает из пропорциональности сторон на основании следующей арифметической теоремы: в последовательности равных отношений сумма предыдущих членов относится к сумме последующих, как один из предыдущих к своему последующему.

147. Обратная теорема. Если углы двух многоугольников, взятые в последовательном порядке в обоих многоугольниках, соответственно равны между собой и каждые два соответственных угла имеют одинаковое направление или каждые два угла имеют противоположное направление, а соответственные стороны многоугольников пропорциональны, то эти многоугольники подобны.

Пусть два многоугольника $P(ABCDE)$ и $P'(A'B'C'D'E')$ удовлетворяют условиям теоремы, так что мы имеем

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D', \angle E = \angle E'$$

$$\text{и} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}.$$

Построим многоугольник P_1 , гомотетичный многоугольнику P относительно произвольной точки, выбрав коэффициент подобия равным общему значению отношений $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$ и т. д. Мы получим, таким образом, новый многоугольник $P_1(A_1B_1C_1D_1E_1)$, углы которого соответственно равны углам многоугольника P' (и имеют либо все то же самое направление, либо противоположное направление) и стороны которого равны сторонам многоугольника P' . Я утверждаю, что многоугольник P_1 равен многоугольнику P' .

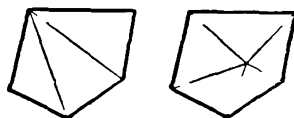
Прежде всего можно предположить, что равенство углов имеет место с сохранением направления (иначе мы заменили бы многоугольник P' многоугольником, симметричным ему относительно некоторой прямой). При этих условиях наложим многоугольник P' (не изменяя его направления вращения) на P_1 так, чтобы сторона $A'B'$ совпала с равной ей стороной A_1B_1 . Равенство углов B_1 и B' по величине и по направлению показывает, что сторона $B'C'$ пойдёт по направлению B_1C_1 , и так как эти два отрезка равны, то они совпадут. Далее мы точно

так же докажем, что сторона $C'D'$ совпадает с C_1D_1 и т. д. Таким образом, оба многоугольника совпадают.

Примечание. Два четырёхугольника могут иметь соответственно равные углы, не будучи подобными, например: квадрат и прямоугольник. Равным образом для подобия двух четырёхугольников недостаточно пропорциональности их сторон, так же как для равенства четырёхугольников недостаточно (п. 46а, примечание 3°) равенства их сторон (см. ниже Прибавление А, п. 281, а также том II, Прибавление F).

148. Всякий многоугольник можно разбить на треугольники и притом бесчисленным множеством способов. Действительно:

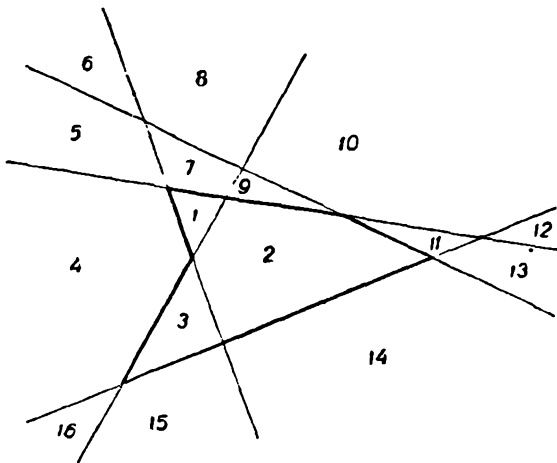
1°. Если многоугольник выпуклый, то можно соединить одну из его вершин со всеми остальными (черт. 151) или какую-либо внутреннюю его точку со всеми вершинами.



Черт. 151.

2°. Если многоугольник невыпуклый (черт. 152), то его можно разбить на выпуклые многоугольники (которые в свою очередь могут быть разбиты на треугольники, как уже было указано).

С этой целью продолжаем неограниченно все стороны многоугольника и тем самым разбиваем плоскость на некоторое число областей (например на черт. 152 области перенумерованы от 1 до 16) таких, что нельзя пересечь какую-либо сторону или её продолжение, не



Черт. 152.

перейдя из одной области в другую, и обратно. Каждая из этих областей лежит целиком внутри или целиком вне многоугольника (так как от какой-либо одной точки этой области можно перейти к какой-либо другой её точке, не пересекая ни самих сторон ни их продолжений). Таким образом, многоугольник состоит из совокупности тех областей, которые будут по отношению к нему внутренними (на

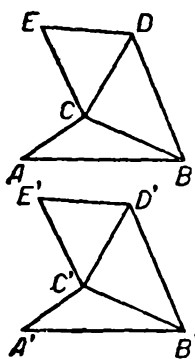
чертеже 152 эти области перенумерованы от 1 до 3). Эти области по определению будут выпуклыми многоугольниками.

149. Теорема. Два подобных многоугольника могут быть разбиты на подобные треугольники, расположенные одинаковым образом.

Действительно, достаточно, расположив оба многоугольника так, чтобы они были гомотетичны, и разбив один из них на треугольники, разбить другой на треугольники, гомотетичные первым.

Обратная теорема. Два многоугольника, которые могут быть разбиты на подобные треугольники, одинаковым образом расположенные, подобны.

Прежде всего два многоугольника, составленные из соответственно равных треугольников, расположенных одинаковым образом, равны между собою. Действительно, пусть ABC, BCD, CDE и т. д. (черт. 153) —



Черт. 153.

треугольники, составляющие первый многоугольник P ; $A'B'C', B'C'D', C'D'E'$ и т. д. — треугольники, соответственно равные первым и расположенные одинаковым образом, которые составляют второй многоугольник P' . Если мы построим на $A'B'$, как на основании, многоугольник, равный P (п. 95), пользуясь треугольниками ABC, BCD, CDE , то мы получим как раз многоугольник P' .

Теперь, если два многоугольника образованы из подобных треугольников, расположенных одинаковым образом, с коэффициентом подобия¹⁾ k , то, построив многоугольник, гомотетичный первому многоугольнику, с тем же коэффициентом подобия k , мы получим многоугольник, равный (в силу того, что было сказано выше) второму многоугольнику.

150. Теорема. Если на отрезках, соединяющих некоторую точку O с каждой точкой M фигуры F , построить подобные между собой треугольники, имеющие одинаковое направление вращения, то третьи вершины M' этих треугольников образуют фигуру F' , подобную F .

Действительно, если повернуть фигуру F около точки O на угол, равный углу $МOM'$, то получится фигура, равная фигуре F и гомотетичная фигуре F' относительно центра O .

Обратная теорема. Если даны две подобные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, то всегда существует такая точка, что треугольники, имеющие вершинами эту точку и две какие-либо соответственные точки, все подобны между собою.

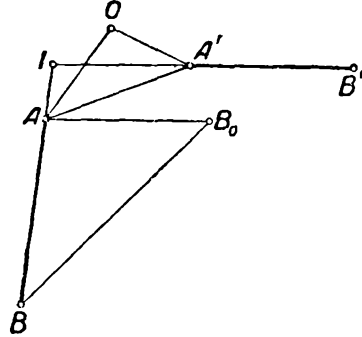
Если повернуть одну из фигур около этой точки на надлежащий угол, то она будет гомотетична другой фигуре относительно той же точки.

Пусть F и F' — две подобные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, так что F' гомотетична некоторой фигуре F_1 , равной фигуре F и имеющей с нею одинаковое направление вращения. Отсюда

¹⁾ Коэффициент подобия k будет необходимо одним и тем же для двух смежных треугольников, так как два смежных треугольника имеют в той и другой фигуре по общей стороне; следовательно, он будет одним и тем же для всех треугольников.

прежде всего следует, что два соответственных отрезка AB и $A'B'$ (черт. 154) обеих фигур образуют между собою постоянный угол (который можно назвать *углом между двумя фигурами*), так как этим свойством обладают две равные фигуры F и F_1 , и все прямые линии фигуры F' параллельны соответствующим прямым фигуры F_1 . Так как эти отрезки, кроме того, пропорциональны, то, проведя через точку A отрезок AB_0 , равный и параллельный $A'B'$ и направленный с ним в одну сторону, мы получим треугольник ABB_0 , подобный некоторому определённому треугольнику T и имеющий с ним одинаковое направление вращения, независимо от положения точек A и B .

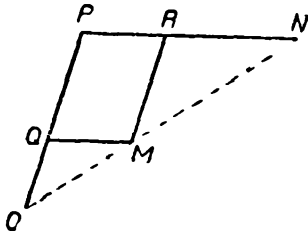
Теперь найдём точку, которая сама себе соответствует, если её рассматривать один раз как принадлежащую фигуре F , другой раз как принадлежащую фигуре F' . Пусть такой точкой будет точка O . Если мы повторим предыдущее построение и примем за точку A точку O ,



Черт. 154.

то точка B_0 совпадёт с точкой B' , так что треугольник OBB' будет подобен треугольнику T и иметь с ним одинаковое направление вращения; существует одна и только одна точка, удовлетворяющая этому условию¹⁾.

Обратно, если, выбрав точку O , как только что было указано, рассматривать её как принадлежащую фигуре F , то соответственная ей точка в фигуре F' будет лежать на прямой, соответственной BO , а эта последняя будет как раз прямой $B'O$ (так как она образует с BO угол, равный углу между двумя фигурами), и притом от точки B' на расстоянии, равном $B'O$ (так как отношение $\frac{B'O}{BO}$ равно коэффициенту подобия обеих фигур). Точка O совпадёт, таким образом, со своей соответственной.



Черт. 155.

Вследствие этого все треугольники, такие как треугольник OBB' , подобны треугольнику T ; если теперь повернуть фигуру F около точки O на угол, равный углу между обеими фигурами, то она будет гомотетичной фигуре F' , при этом точка O будет центром гомотетии.

Примечание. Оба угла AOA' и BOB' должны быть равны углу между прямыми AB и $A'B'$; следовательно, если продолжить эти последние до точки их пересечения I , то можно найти точку O , как точку пересечения окружностей, описанных около треугольников AIA' и BIB' .

150а. Теорема. Пусть $PRMQ$ — параллелограм, O и N — две точки, взятые соответственно на продолжениях соседних сторон FQ и PR и лежащие на одной прямой с вершиной M , противоположной P (черт. 155).

Если параллелограм $PRMQ$ изменяется так, что длины его сторон

¹⁾ Построение этой точки указано далее (п. 152).

остаются постоянными (шарнирный параллелограм), причём отрезки PO и PN также остаются постоянными, и одна из трёх точек O , M , N остаётся неподвижной, то две другие описывают фигуры, гомотетичные друг другу.

Прежде всего четырёхугольник $PRMQ$ останется параллелограмом, если длины его сторон остаются постоянными, так как всегда имеем $PQ=RM$ и $PR=QM$. Кроме того, точки O , M , N останутся на одной прямой. Действительно, так как эти точки в первоначальном положении фигуры лежат на одной прямой, то имеем $\frac{MR}{OP} = \frac{NR}{NP}$. Это равенство остаётся справедливым при деформации, так как длины, входящие в эту пропорцию, постоянны. Следовательно, обратно, треугольники MRN и OPN постоянно подобны (как имеющие равные углы при R и P , заключённые между пропорциональными сторонами), и потому углы PNO и RNM всегда равны между собою.

Наконец, отношение $\frac{OM}{MN}$ постоянно, оно равно $\frac{PR}{RN}$. Таким образом теорема доказана.

На этой теореме основано устройство *пантографа* — прибора, предназначенного для воспроизведения фигуры с увеличением или без увеличения её размеров; при этом OQP , PRN , MQ и MR — твёрдые стержни, соединённые один с другим шарнирами в точках M , P , Q и R . Закрепляют одну из трёх точек O , M , N ; в одной из двух других точек находится карандаш; третья точка описывает контур фигуры, которую требуется воспроизвести.

УПРАЖНЕНИЯ.

155. Вписать в треугольник квадрат.

156. Данную точку A соединяют с произвольной точкой B окружности с центром O . Найти геометрическое место точки пересечения прямой AB с биссектрисой угла AOB .

157. На стороне OX данного угла HOY взята произвольная точка M , и на отрезке OM , как на диаметре, построена окружность; затем построена окружность, касающаяся первой окружности и сторон OX и OY . Найти геометрическое место точки касания обеих окружностей.

158. Точка пересечения G медиан треугольника лежит на прямой, которая соединяет центр описанного круга с точкой пересечения высот и делит отрезок между этими точками внутренним образом в отношении 1:2 (доказать). (Показать, что эта точка G — центр гомотетии двух треугольников ABC и $A'B'C'$, которые встречаются в доказательстве п. 53.)

159. Даны коэффициенты подобия трёх гомотетичных фигур, взятых попарно. Найти отношение, в котором один из центров гомотетии делит отрезок, соединяющий два других.

160. Даны две параллельные прямые и точка O , лежащая в их плоскости. Через эту точку проводят произвольную секущую, которая пересекает параллельные прямые в точках A и A' . Найти геометрическое место конца A'' перпендикуляра к секущей, проведённого через точку A' и имеющего длину, равную OA .

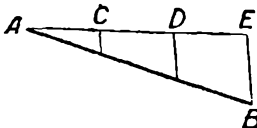
161. Пусть F и F' — две подобные (но не равные) фигуры, имеющие противоположные направления вращения. Доказать, что можно найти две различные фигуры F'' , каждая из которых симметрична с F относительно некоторой прямой и одновременно гомотетична F' относительно некоторой точки, лежащей на этой прямой; в обоих случаях центр подобия будет один и тот же, но из двух соответствующих гомотетий одна будет прямой, другая — обратной.

162. На каждом из отрезков, соединяющих две соответственные точки двух подобных фигур, имеющих одинаковое направление вращения, строят треугольник, подобный данному треугольнику T и имеющий с ним одинаковое направление вращения; или делят отрезок, соединяющий эти две точки, в постоянном отношении. Третьи вершины построенных таким образом треугольников или точки деления образуют фигуру, подобную двум первым (доказать).

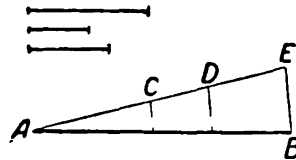
ГЛАВА VI. ПОСТРОЕНИЯ.

151. Построение 1. *Разделить отрезок на части, пропорциональные данным отрезкам, или на равные части.*

Способ первый (черт. 156). Пусть требуется разделить отрезок AB , положим, на три равные части. Проводим через точку A произвольную прямую и откладываем на ней от точки A три равных



Черт. 156.



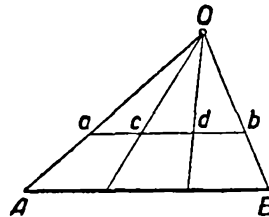
Черт. 157.

отрезка AC , CD , DE . Достаточно затем соединить точки B и E прямой линией и провести через точки C и D прямые, параллельные этой прямой.

Эти параллельные прямые разделят отрезок AB на три равные части (п. 113).

Если требуется разделить отрезок AB на части, пропорциональные трём данным отрезкам, откладываем отрезки AC , CD , DE , соответственно равные заданным отрезкам (черт. 157).

Способ второй (черт. 158) Пусть требуется разделить отрезок AB на три равные части. На произвольной прямой ab , параллельной AB , откладываем равные отрезки ac , cd , db и соединяем точки A и a , B и b прямыми, которые пусть пересекутся в точке O ; прямые Oc и Od делят отрезок AB на три равные части (п. 121).



Черт. 158.

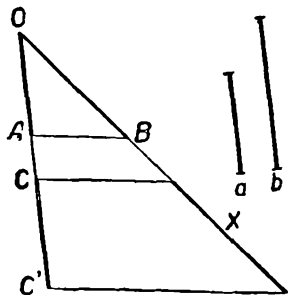
Если требуется разделить отрезок AB на части, пропорциональные трём данным отрезкам, то выбираем отрезки ac , cd , db , соответственно равные этим отрезкам.

Построение 2. *Найти отрезок, четвёртый пропорциональный к данным трем отрезкам.*

Построение вполне аналогично предыдущему.

Способ первый (черт. 159). Пусть даны три отрезка — a , b и c , и пусть требуется найти такой отрезок x , что $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Откладываем на обеих сторонах OA и OB произвольного угла от вершины O отрезки a и b ; затем откладываем отрезок c , безразлично где именно, на стороне OA (на чертеже CC'). Прямые, параллельные AB , проведённые через конечные точки отрезка c , определяют на стороне OB искомый четвёртый пропорциональный отрезок.



Черт. 159.

Чтобы проводить только одну параллельную, следует совместить один из концов отрезка c с точкой O или с точкой A .

Предоставляем читателю применить и к данной задаче способ второй, указанный для предыдущего построения.

152. Построение 3. Построить на данном отрезке треугольник, подобный данному треугольнику.

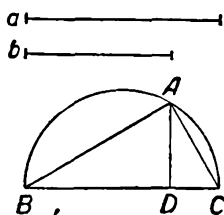
Пусть даны треугольник ABC и отрезок $A'B'$. Откладываем отрезок AD , равный $A'B'$ на стороне AB ; проводя через точку D прямую DE , параллельную BC (черт. 160), до пересечения в точке E со стороной AC , строим на отрезке $A'B'$, как на основании, треугольник, равный треугольнику ADE (п. 86, построение 4).

Это построение даёт, очевидно, решение следующей задачи.

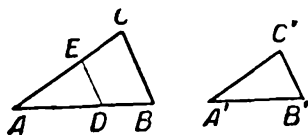
Задача. Даны две точки A и B фигуры F и соответственные им точки A' и B' подобной фигуры F' ; найти точку, соответствующую какой-либо третьей точке фигуры F .

В частности повторное применение данного построения позволяет выполнить следующее построение.

Построение 3а. Построить на данном отрезке многоугольник, подобный данному многоугольнику.



Черт. 161.



Черт. 160.

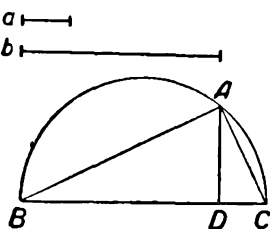
153. Построение 4. Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя данными отрезками.

Мы указали три теоремы, приводящие к среднему пропорциональному (пп. 123, 125, 132). Каждая из этих трёх теорем даёт способ решения поставленной задачи.

Способ первый (черт. 161). Откладываем на какой-либо прямой от одной и той же точки в одном и том же направлении два отрезка BD и BC , равные данным отрезкам a и b (обозначая через BD меньший из построенных отрезков), и будем рассматривать отрезок BC как гипотенузу пря-

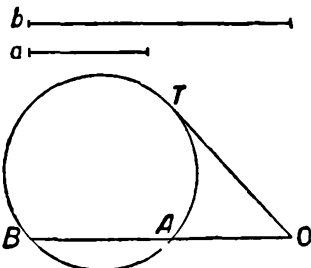
моугольного треугольника, а отрезок BD — как проекцию одного из катетов на гипотенузу. Для этого достаточно поместить вершину A прямого угла в точке пересечения перпендикуляра к BD , проведённого через точку D , с окружностью, построенной на BC как на диаметре. Если точка A , таким образом, определена, то AB — средний пропорциональный отрезок (п. 123).

Способ второй (черт. 162). Откладываем на какой-либо прямой от одной и той же точки D в противоположных направлениях два отрезка DB и DC , равные данным отрезкам a и b , и будем рассматривать их как проекции катетов на гипотенузу. Для этого достаточно поместить точку A , вершину прямого угла, в точке пересечения перпендикуляра к BD , проведённого через точку D , с окружностью, построенной на BC как на диаметре. Если точка A , таким образом, определена, то AD — искомый средний пропорциональный отрезок (п. 125).



Черт. 162.

Способ третий (черт. 163). Пусть требуется найти отрезок, средний пропорциональный между двумя отрезками a и b . Откладываем на какой-либо прямой от одной и той же точки O в одном и том же направлении два отрезка OA и OB , равные отрезкам a и b . Через точки A и B проводим произвольную окружность, к которой в свою очередь проводим из точки O касательную OT ; длина этой касательной и будет искомым средним пропорциональным (п. 132).



Черт. 163.

154. Построение 5. Построить отрезок, квадрат которого был бы равен сумме квадратов двух данных отрезков.

Откладываем два данных отрезка на сторонах прямого угла; искомый отрезок будет гипотенузой построенного таким образом прямоугольного треугольника.

Построение 6. Построить отрезок, квадрат которого был бы равен разности квадратов двух данных отрезков.

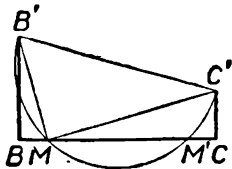
Строим (п. 87а) прямоугольный треугольник, у которого больший отрезок служит гипотенузой, а другой отрезок — катетом; второй его катет будет искомым отрезком.

155. Построение 7. Построить два отрезка, зная их сумму и их произведение.

Пусть требуется найти два отрезка, сумма которых равна данному отрезку $a = BC$ и произведение которых равно произведению двух данных отрезков b и c .

Предположим, что на перпендикулярах, проведённых в концах отрезка BC , отложены в одном и том же направлении два отрезка BB' и CC' , соответственно равные b и c (черт. 164). Искомые два

отрезка, сумма которых равна BC , могут быть представлены отрезками BM и CM , где M — определённая точка отрезка BC . Но, с другой стороны, произведение $BM \cdot CM$ должно быть равно произведению $BB' \cdot CC'$; это равенство может быть записано в виде пропорции $\frac{BM}{BB'} = \frac{CM}{CC'}$ и показывает, что прямоугольные треугольники $B'BM$ и MCC' — подобны. Следовательно, угол $BM B'$, равный соответственно углу $M C C'$, будет углом дополнительным к углу $MC C'$, а потому угол $B' M C'$ — прямой. Таким образом, точка M лежит на окружности, имеющей своим диаметром отрезок $B'C'$.



Черт. 164.

Обратно, если окружность, имеющая своим диаметром $B'C'$, пересекает BC в точке M , то треугольники $B'BM$ и MCC' подобны, так как стороны их взаимно перпендикулярны; таким образом, получается равенство произведений $BM \cdot CM$ и $BB' \cdot CC'$.

Условия возможности построения. Мы взяли произвольные отрезки b и c , но мы можем считать их равными: действительно, не изменяя произведения, можно заменить оба отрезка их средним пропорциональным. Итак, предположим, что $BB' = CC'$; тогда четырёхугольник $BB'C'C$ будет прямоугольником. Середина отрезка $B'C'$ отстоит при этом от отрезка BC на расстоянии, равном BB' , и радиус окружности будет равен половине $B'C'$, или, что то же самое, половине BC . Следовательно, окружность будет пересекать BC , если отрезок BB' равен самой половине BC , другими словами, если данное произведение равно самому большему квадрату половины отрезка BC .

Если точка M — точка, отвечающая условиям вопроса, то, построив фигуру, симметричную с данной относительно середины отрезка BC , или, что одно и то же, повернув отрезок BC так, чтобы точка B совпала с точкой C и точка C — с точкой B , мы получим точку M' , обладающую тем же свойством, что и первая, так как $BM' = CM$ и $BM = CM'$. Мы видим, что обе точки пересечения M и M' окружности, имеющей своим диаметром $B'C'$, с прямой BC симметричны относительно середины BC , в чём можно убедиться непосредственно с помощью п. 63.

Если данное произведение равно квадрату половины BC (в силу предыдущего это наибольшее из возможных значений произведения), то окружность с диаметром $B'C'$ касается BC . Следовательно, точки M и M' совпадают с серединой BC , так что $BM = CM$. Отсюда заключаем, что произведение двух отрезков, сумма которых постоянна, будет наибольшим, если эти отрезки равны.

Примечание. Пусть x — отрезок BM . Имеем $CM = a - x$, и равенство $BM \cdot CM = BB' \cdot CC'$ напишется так:

$$x(a - x) = bc$$

или

$$x^2 - ax + bc = 0.$$

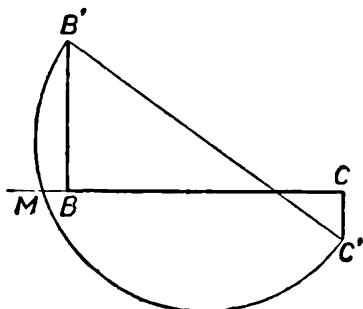
Предыдущее построение позволяет, таким образом, найти отрезок x , удовлетворяющий уравнению

$$x^2 - ax + q = 0,$$

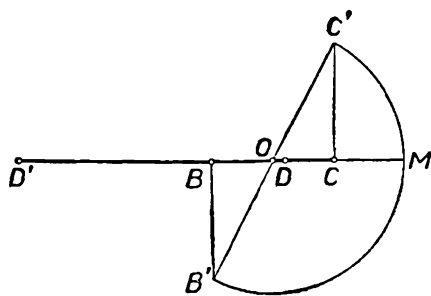
где a — данный отрезок и q — произведение двух данных отрезков.

Построение 8. Построить два отрезка, зная их разность и произведение.

Пусть требуется найти два отрезка, разность которых равна данному отрезку $a = BC$ и произведение которых равно произведению данных отрезков b и c . Предположим, что на перпендикулярах, проведённых в концах отрезка BC , отложены в противоположных направлениях отрезки BB' и CC' , соответственно равные b и c (черт. 165). Так как разность искоемых отрезков равна BC , то искомые отрезки могут быть представлены отрезками BM и CM , где M — точка, взя-



Черт. 165.



Черт. 166.

тая на продолжении BC , и мы должны иметь: $BM \cdot CM = BB' \cdot CC'$. Как и в предыдущем построении, можно доказать, что точка M должна лежать на окружности, описанной на $B'C'$ как на диаметре, и что, обратно, точка пересечения этой окружности с продолжением отрезка BC отвечает условию вопроса.

Так как точки B' и C' расположены по разные стороны отрезка BC , то окружность всегда пересечёт отрезок, а потому задача всегда возможна.

Примечание. Пусть x — меньший из двух найденных отрезков; тогда другой отрезок равен $y = a + x$, равенство же $xy = bc$ может быть записано либо в виде:

$$x(a + x) = bc \text{ или } x^2 + ax - bc = 0,$$

либо в виде:

$$(y - a)y = bc \text{ или } y^2 - ay - bc = 0.$$

Таким образом, мы имеем возможность найти отрезок, удовлетворяющий одному из двух уравнений:

$$\begin{aligned}x^2 + ax - q &= 0, \\y^2 - ay - q &= 0,\end{aligned}$$

где a — данный отрезок и q — произведение двух данных отрезков.

156. Говорят, что отрезок разделён *в среднем и крайнем отношении*, если большая часть отрезка есть среднее пропорциональное между всем отрезком и другой его частью.

Построение 9. Разделить отрезок *в среднем и крайнем отношении*.

Пусть дан отрезок BC (черт. 166), на котором требуется найти такую точку D , чтобы $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD}$. Взяв отношение суммы числителей к сумме знаменателей, получим $\frac{BC}{BD} = \frac{BC + BD}{BC}$.

Мы видим, что отрезки BD и $BC + BD$, разность которых равна BC , дают в произведении BC^2 . Таким образом, мы пришли к предыдущему построению. Необходимо из двух конечных точек отрезка BC провести в противоположных направлениях перпендикуляры BB' и CC' , равные BC , и построить затем на отрезке $B'C'$, как на диаметре, окружность, которая пересечёт продолжение отрезка BC за точкой C в некоторой точке M , так что $BD = CM$ будет искомым отрезком.

Отложим от точки B в направлении, противоположном BC , отрезок BD' , равный BM . Точка D' , полученная таким построением, обладает свойством, вполне аналогичным свойству точки D , а именно отрезок BD' есть *среднее пропорциональное* между отрезками BC и $D'C$.

В самом деле, $BD' = BC + BD$, так что пропорция $\frac{BC}{BD} = \frac{BC + BD}{BC}$ может быть представлена в виде $\frac{BC}{BD} = \frac{BD'}{BC} = \frac{CD'}{BD'}$.

Говорят, что *точка D' делит внешний образ отрезка BC в среднем и крайнем отношении*¹⁾.

Обратно, чтобы точка D' обладала этим свойством, она должна быть выбрана так, как было указано, потому что из пропорции $\frac{BD'}{BC} = \frac{CD'}{BD'}$ получается обратно (составляя отношение разности числителей

к разности знаменателей) $\frac{BD'}{BC} = \frac{BC}{BD' - BC}$, так что BD' служит одним из отрезков, разность которых равна BC , а произведение — BC^2 .

Пусть $BC = a$; предположим, что требуется вычислить BD и BD' . Прежде всего заметим, что в силу равенства отрезков BB' и CC'

¹⁾ Точки D и D' не будут, конечно, гармонически сопряжёнными относительно точек B и C (см. упр. 173).

окружность, построенная на $B'C'$, как на диаметре, имеет центром точку O , середину отрезка BC , так что $OC = \frac{a}{2}$. Теорема о квадрате гипотенузы, применённая к прямоугольному треугольнику OCC' , даёт:

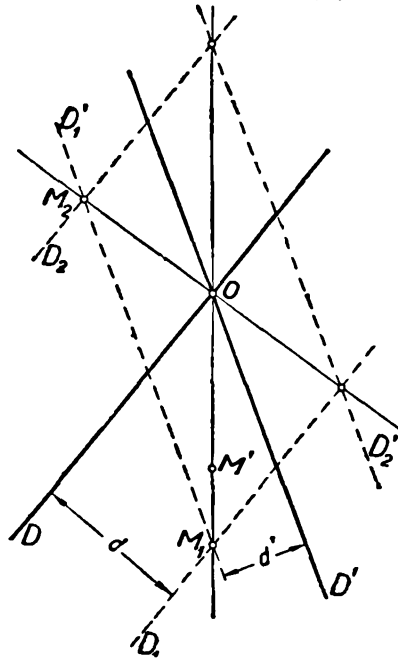
$$OC = OM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, имеем:

$$CM = BD = a \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ и } BM = BD' = a \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

157. Задача. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных прямых равно данному отношению.

Пусть даны две прямые D и D' , которые пересекаются, положим, в точке O (черт. 167); мы ищем геометрическое место точек, расстояния которых от этих двух прямых относятся как данные два отрезка d и d' . Если точка M_1 — одна из точек искомого геометрического места, то любая точка M' прямой OM_1 также принадлежит этому геометрическому месту. Действительно, перпендикуляры, опущенные из точки M_1 на прямые D и D' , и перпендикуляры, опущенные из точки M' на те же прямые, образуют, очевидно, две фигуры, гомотетичные относительно центра гомотетии O . Отсюда следует, что искомое геометрическое место состоит из прямых, проходящих через точку O . Мы можем построить точки этого геометрического места, отыскивая точки, расстояния которых от прямых D и D' соответственно равны d и d' . Мы знаем, что геометрическое место точек, расположенных на расстоянии d от прямой D , состоит из двух прямых D_1 и D_2 , параллельных D ; точно так же геометрическое место точек, расстояния которых от прямой D' равны d' , состоит из двух прямых D'_1 и D'_2 , параллельных D' . Пусть точки M_1 и M_2 — точки пересечения прямых D_1 и D_2 с прямой D'_1 . Прямые OM_1 и OM_2 принадлежат искомому



черт. 167.

геометрическому месту точек. Вместе с тем этими прямыми исчерпывается это геометрическое место; действительно, если точка M' принадлежит геометрическому месту, то прямая OM' пересекает D'_1 в некоторой точке M'_1 , которая, находясь на расстоянии d' от D' , должна находиться на расстоянии d от D и, следовательно, должна совпадать с точкой M_1 или с точкой M_2 .

Если прямые D и D' параллельны, то две точки искомого геометрического места будут лежать на каком-либо общем перпендикуляре к этим прямым¹⁾; это будут две гармонически сопряжённые точки, которые делят этот перпендикуляр в данном отношении. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, проведённых через эти точки параллельно данным прямым.

Построение 10. *Построить точки, расстояния которых от трёх данных прямых имеют данные отношения.*

Сначала строим две прямые, представляющие геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух первых данных прямых равно первому из данных отношений, затем поступаем так же относительно двух других из данных прямых. Таким образом, получаем ещё две новые прямые, которые пересекают построенные ранее в четырёх точках, отвечающих условию задачи.

158. Построение II. *Построить общие касательные к двум окружностям.*

Мы решили эту задачу в п. 93. Предыдущие теоремы позволяют нам дать решение, совершенно отличное от данного выше. В самом деле, достаточно провести два параллельных радиуса так, чтобы определить центры подобия (п. 143), и провести через один из центров подобия касательную к одной из окружностей: она будет касательной и к другой окружности в силу гомотетии обеих окружностей.

Построение 12. *Построить радикальную ось двух окружностей.*

Если две окружности пересекаются или касаются, то достаточно провести только общую секущую или общую касательную.

Если они не пересекаются и не касаются, то строим какую-либо третью окружность, пересекающую две данные. Точка пересечения обеих общих секущих принадлежит (п. 139) искомой радикальной оси. Через эту точку проводим перпендикуляр к линии центров данных окружностей или же повторяем первоначальное построение, чтобы определить вторую точку искомой радикальной оси.

Примечание. Применение предыдущего построения к данной окружности и данной прямой приводит к необходимости допустить, что *радикальная ось окружности и прямой есть сама прямая.*

Это построение применимо также и в том случае, если одна из окружностей обращается в точку, при этом необходимо, чтобы вспомогательная окружность проходила через эту точку.

¹⁾ Случай, когда данное отношение равно единице, представляет исключение. В этом случае имеется только одна точка деления, середина общего перпендикуляра; другая точка удаляется в бесконечность.

Из предыдущего построения непосредственно вытекает способ построения радикального центра трёх данных окружностей, а следовательно (п. 139), и следующее построение.

Построение 13. Построить окружность, ортогональную к трём данным окружностям.

Частными случаями этой задачи являются следующие:

Провести:

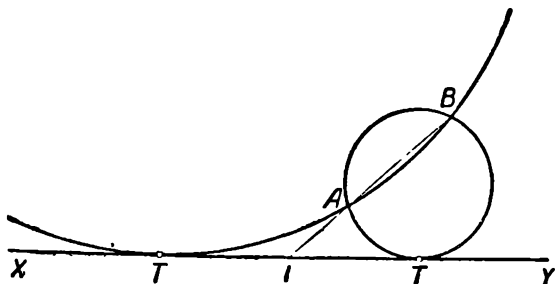
1) через данную точку окружность, ортогональную к двум данным окружностям;

2) через данные две точки окружность, ортогональную к данной окружности.

159. Построение 14. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Даны две точки A и B (черт. 168) и прямая XU ; пусть T — точка касания искомой окружности с прямой XU . Продолжим отрезок AB до пересечения в точке I с прямой XU . Известно, что отрезок IT представляет собой среднее пропорциональное между отрезками IA и IB .

Обратно, если точка T удовлетворяет этому условию, то существует (п. 132) окружность, проходящая через A и B и касающаяся



Черт. 168.

в точке T прямой XU : она определяется построением 13 п. 90.

Так как среднее пропорциональное между IA и IB можно отложить на прямой XU от точки I в двух различных направлениях, то существуют две окружности, удовлетворяющие условию.

Задача, очевидно, возможна только, если точки A и B лежат по одну сторону от XU .

Примечания. 1°. Предыдущий метод неприменим, если прямая AB параллельна прямой XU . Задача имеет в этом случае только одно решение: точка касания есть точка пересечения прямой XU с прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину.

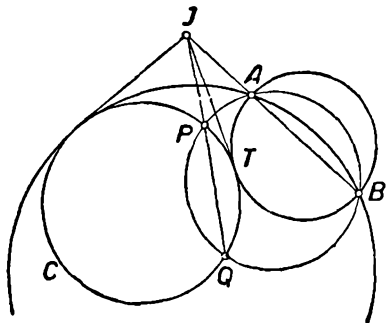
2°. Напротив, этот метод применим и в том случае, когда точки A и B сливаются в одну на данной прямой IA (пересекающей XU в I), другими словами, когда речь идёт об отыскании окружности, касающейся прямой IA в точке A и прямой XU . Точка касания T с прямой XU получается, если отложить в том или другом направлении отрезок $IT = IA$.

Построение 15. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

Пусть даны две точки A и B (черт. 169) и окружность C . Отыскиваем снова точку касания T искомой окружности.

Пусть точка I есть точка пересечения прямой AB с касательной в точке T . Проводим через точки A и B произвольную окружность, которая пересечёт окружность C в точках P и Q . Точка I лежит на прямой PQ (п. 139).

Пересечение прямой AB с прямой PQ определяет точку I ; достаточно провести через эту точку касательные к окружности C . Задача имеет, следовательно, два решения.



Черт. 169.

Условие возможности построения. Необходимо, чтобы точка I лежала вне окружности C . Для этого необходимо и достаточно, чтобы эта точка лежала на продолжении отрезка PQ , другими словами, лежала бы вне вспомогательной окружности. Это будет иметь место, когда точки A и B будут находиться обе на одной из двух дуг, определяемых точками P и Q на этой окружности,

т. е. когда точки A и B будут обе внутренними или обе внешними относительно данной окружности.

Здесь можно сделать то же замечание, что и в предыдущем построении, относительно того случая, когда A и B сливаются в одну точку, лежащую на данной прямой.

УПРАЖНЕНИЯ.

163. Построить отрезок, отношение которого к данному отрезку равно отношению квадратов двух данных отрезков.

164. Найти отрезок, отношение квадрата которого к квадрату данного отрезка равно отношению двух данных отрезков.

165. Через данную точку провести прямую таким образом, чтобы отрезок этой прямой, заключённый между двумя данными прямыми (или между двумя данными окружностями), делился в этой точке в данном отношении.

166. Через точку, лежащую вне окружности, провести секущую, которая делится этой окружностью в среднем и крайнем отношении.

167. Найти точку, из которой видны под равными углами три последовательных отрезка AB , BC , CD одной и той же прямой.

168. Через две точки, лежащие на одном диаметре окружности, провести две равные хорды так, чтобы они имели общий конец.

169. Построить треугольник, зная две его стороны и биссектрису угла, заключённого между ними.

170. Построить треугольник, зная одну его сторону, соответствующую ей высоту и произведение двух других сторон.

171. Построить треугольник, зная его углы и периметр; или его углы и сумму его медиан; или его углы и сумму его высот, и т. д.

172. Построить квадрат, зная разность диагонали и стороны.

173. Чтобы получить точку, гармонически сопряжённую с точкой B относительно концов отрезка DD' (черт. 166, п. 156), достаточно отложить на продолжении отрезка BC за точку C равный ему отрезок (доказать).

Точка, гармонически сопряжённая с точкой D' относительно концов отрезка BC , есть точка, симметричная с точкой D относительно середины отрезка BC (доказать).

Доказать, что окружность, построенная на DD' , как на диаметре, проходит через вершины (отличные от B и C) квадрата, диагональю которого служит BC .

174. Даны прямая и две точки A и B ; найти на этой прямой точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Эта задача решается косвенным путём, который заключается в том, что сначала отыскивают на прямой точку, из которой AB виден под данным углом, и исследуют, какова наибольшая величина данного угла, для которой эта задача возможна.

Так же поступают при решении упражнений 175 и 176.

175. Даны две параллельные прямые. Построить перпендикулярную к ним прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый между данными прямыми, был виден из данной точки под наибольшим углом.

176. Провести через две точки окружность, которая отсекает на данной прямой хорду данной длины.

Найти наименьшую возможную длину этой хорды, если точки лежат по одну и по другую стороны от прямой.

177. Провести через данную точку окружность, имеющую одну и ту же радикальную ось с двумя данными окружностями.

ГЛАВА VII.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

160. Определения: *Правильным многоугольником* называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. *Правильной ломаной линией* называется ломаная, у которой все стороны равны и все углы равны и имеют одинаковое направление.

161. *Теорема. Если разделить окружность на некоторое число n равных частей, то:*

1) *точки деления служат вершинами правильного многоугольника;*

2) *касательные к окружности в этих точках служат сторонами второго правильного многоугольника.*

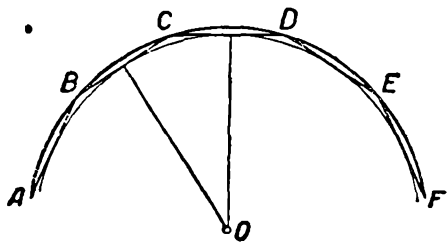
1°. Две последовательные стороны многоугольника, имеющего своими вершинами точки деления, очевидно, симметричны относительно радиуса, проведённого в их общую точку; два последовательных угла этого же многоугольника симметричны относительно радиуса, перпендикулярного к их общей стороне.

2°. Два последовательных угла многоугольника, образованного касательными в точках деления, очевидно, симметричны относительно радиуса, перпендикулярного к их общей стороне; две последовательные стороны этого же многоугольника симметричны относительно радиуса, перпендикулярного к хорде, соединяющей их точки касания.

162. *Обратная теорема. Всякий правильный многоугольник, или, общёе, всякую правильную ломаную, можно вписать в одну окружность и описать около другой окружности.*

Пусть, например, $ABCDEF$ (черт. 170) — правильная ломаная. Опишем около треугольника ABC окружность; центр O этой окружности лежит на прямой, перпендикулярной к отрезку BC и проходящей через его середину. Я утверждаю, что эта окружность пройдет также через точку D . Чтобы это доказать, достаточно заметить, что стороны AB и CD симметричны одна с другой относительно прямой, перпендикулярной к отрезку BC и проходящей через его середину, потому что отрезок, симметричный с BA , совпадает с CD по направлению (в силу равенства углов при B и C) и по величине (так как $BA=CD$). Следовательно, будем иметь $OA=OD$. Точно так же убедимся, что та же самая окружность, описанная около треугольника BCD , проходит через точку E , и так далее.

Кроме того, стороны AB , BC и т. д., как равные хорды построенной окружности, равно отстоят от её центра; следовательно, данную ломаную можно описать около второй окружности с центром O .



Черт. 170.

Радиус этой второй окружности, или расстояние какой-либо стороны до центра, называется *апофемой* правильной ломаной (или правильного многоугольника.)

Примечание. . *Всякий правильный многоугольник с n сторонами может быть наложен на самого себя с помощью вращений (а именно таких, угол которых измеряется целым числом n-х частей окружности) и симметрий (симметрий относительно прямых, перпендикулярных к сторонам многоугольника и проходящих через их середины, и относительно биссектрис его углов).*

163. Мы доказали существование бесчисленного множества правильных многоугольников с каким-либо данным числом сторон n . Докажем, что все эти многоугольники между собою подобны.

Теорема. *Два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон подобны; коэффициент подобия равен отношению их радиусов и отношению их апофем.*

Действительно, два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон, вписанных в две равные окружности, очевидно, равны; они совмещаются, если совместить обе описанные окружности и одну из вершин.

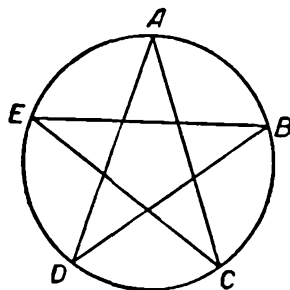
Итак, пусть даны два правильных многоугольника P и P' , вписанных в окружности C и C' . Пересекая радиусы окружности C , проведенные в вершины многоугольника P , окружностью, concentричной с C и равной C' , мы получим правильный многоугольник, гомотетичный многоугольнику P относительно центра окружности C и равный многоугольнику P' .

Примечание. В частности, углы всех правильных многоугольников с одинаковым числом (n) сторон имеют одну и ту же величину.

Легко вычислить эти углы. Так как сумма углов любого из этих многоугольников равна $2nd - 4d$, то каждый из них составит n -ю часть этой величины и будет равен $(2 - \frac{4}{n})d$.

164. Разделив окружность на n равных частей, соединим одну из делящих точек с точкой, отстоящей от неё на p делений, эту последнюю точку — с точкой, отстоящей от неё также на p делений, и т. д. до тех пор, пока мы снова не придём в одну из уже пройденных делящих точек. Если точка P будет первой из тех точек, в которую мы придём во второй раз, то эта точка не может быть отличной от той точки, с которой мы начали; действительно, если бы точка P была концом стороны NP , однажды уже пройденной, то мы пришли бы в точку N во второй раз раньше, чем в точку P .

Фигура, таким образом построенная, представляет собой несобственный¹⁾ многоугольник (п. 21, примечание) и называется *звездчатым правильным многоугольником*. Например, чертёж 171 изображает звездчатый правильный пятиугольник, полученный делением окружности в точках A, B, C, D, E на пять равных частей и соединением этих точек через два деления в порядке $ACEBDA$ ($n=5$; $p=2$).



Черт. 171.

Можно предположить числа n и p взаимно-простыми. В самом деле, если бы эти числа имели общий наибольший делитель d , то всё происходило бы так, как будто бы мы разделили окружность на $\frac{n}{d}$ равных частей и соединили делящие точки через каждые $\frac{p}{d}$ делений.

Если n и p — взаимно-простые числа, то звездчатый многоугольник будет иметь точно n сторон. Действительно, так как каждая сторона содержит p делений, то, построив k сторон, мы пройдем kp делений. Мы вернёмся в исходную точку, когда мы пройдем целое число окружностей, т. е. когда kp — число, кратное n . В арифметике доказывается, что это обстоятельство наступает для некоторых значений k , меньших n , если число p — не взаимно-простое с числом n ; если, наоборот, число p — взаимно-простое с числом n , то это обстоятельство впервые наступает для k , равного n .

Итак, звездчатый многоугольник с n сторонами образуется, если разделить окружность на n равных частей и соединить делящие точки через каждые p делений, где p — любое целое число, взаимно-простое с n и меньшее, нежели n . Однако каждый звездчатый многоугольник получается, таким образом, двумя различными способами. Действительно, если его сторона служит хордой дуги, содержащей p делений, то она

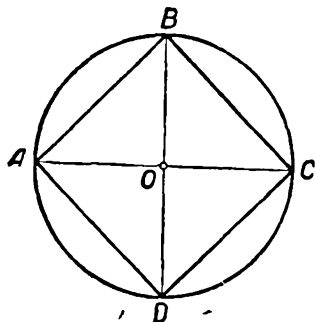
¹⁾ Если p не является делителем числа n ; в противном случае многоугольник — выпуклый. *Прим. ред. перевода.*

же будет и хордой дуги, содержащей $n - p$ делений. Так, например, звездчатый многоугольник, изображённый на чертеже 171, получается соединением делящих точек через каждые два деления или соединением их через каждые три деления. В силу этого следует отбросить половину значений p , если мы хотим получить каждый многоугольник только один раз. Значение $p = 1$ (и, следовательно, также значение $p = n - 1$) соответствует многоугольнику в собственном смысле слова.

Пример. Пусть $n = 15$. Числами меньшими 15 и взаимно-простыми с 15 будут, кроме 1 и 14, числа 2, 4, 7, 8, 11 и 13. При этом нет надобности рассматривать значения $p = 8, 11, 13$, которые соответствуют тем же многоугольникам, которые получаются при значениях $p = 7, 4, 2$.

Таким образом, существует один правильный пятнадцатиугольник в собственном смысле слова и три звездчатых пятнадцатиугольника.

165. Построение правильных многоугольников, вписанных в данную окружность. Если мы умеем вписать в окружность пра-



Черт. 172.

вильный многоугольник, то мы умеем и описать около той же окружности правильный многоугольник с тем же числом сторон.

Этот последний образуется касательными к окружности в вершинах вписанного многоугольника.

Если мы умеем вписать в окружность правильный многоугольник, то мы умеем вписать и правильный многоугольник с удвоенным числом сторон.

Для этого достаточно разделить на две равные части дугу, стягиваемую стороной первого многоугольника.

166. 1°. Квадрат. Чтобы вписать в окружность O (черт. 172) квадрат, достаточно провести два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD : окружность разделится, таким образом, на четыре равные части.

Предыдущее построение позволяет далее построить правильный вписанный восьмиугольник, далее правильный многоугольник с 16, 32, ... и вообще с 2^n сторонами.

Сторона квадрата, вписанного в круг радиуса R , равна $s_4 = R\sqrt{2}$, так как из прямоугольного треугольника AOB (черт. 172) имеем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2R^2.$$

Апофема правильного многоугольника, сторона которого известна, вычисляется по следующему правилу: *квадрат апофемы равен квадрату радиуса описанного круга без квадрата половины стороны*. Это вытекает из того, что апофема, половина стороны и радиус описанного круга образуют прямоугольный треугольник.

Итак, апофема a правильного многоугольника со стороной c , вписанного в круг радиуса R , равна

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Для квадрата эта апофема равна

$$a_4 = \sqrt{R^2 - \frac{c_4^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Она равна половине стороны, что очевидно *a priori*.

167. 2°. Шестиугольник. Теорема. *Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу окружности.* Пусть AB (черт. 173) — сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность с центром O . Я утверждаю, что треугольник OAB равносторонний.

Прежде всего этот треугольник — равнобедренный. С другой стороны, угол при точке O , заключающий между своими сторонами шестую часть окружности, равен $\frac{4}{6}d$, или $\frac{2}{3}d$. Остается,

следовательно, $2d - \frac{2}{3}d = \frac{4}{3}d$ для

суммы углов при A и B . Так как эти два угла равны между собою, то каждый из них равен $\frac{2}{3}d$. Рассматриваемый треугольник равноугольный и, следовательно, равносторонний.

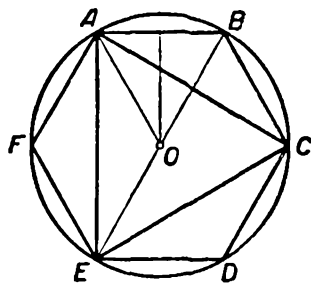
Апофема правильного вписанного шестиугольника равна

$$a_6 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

3°. Равносторонний треугольник. Соединяя через одну вершины шестиугольника, получим вписанный равносторонний треугольник ACE (черт. 173).

Сторона AC этого треугольника, будучи перпендикулярной к радиусу OB , равна удвоенной высоте треугольника AOB , т. е. (так как три высоты равностороннего треугольника равны) удвоенной апофеме шестиугольника, а потому $c_3 = R\sqrt{3}$.

В этом можно ещё убедиться, замечая, что точки B и E диаметрально противоположны (как заключающие между собою $\frac{3}{6}$ части окружности). Следовательно, треугольник ABE — прямоугольный с прямым углом при A , и сторона AE равна удвоенному перпендикуляру, опущенному из середины O отрезка BE на сторону AB .

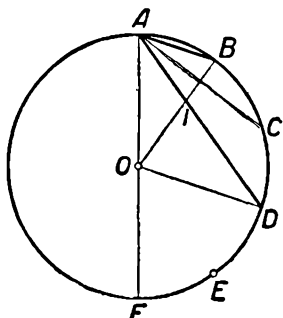


Черт. 173.

Апофема вписанного равностороннего треугольника равна $a_3 = \frac{R}{2}$.

Умея строить вписанный шестиугольник, можно построить вписанные многоугольники с 12, 24, ... и вообще $3 \cdot 2^n$ сторонами.

168. 4°. Десятиугольник. Теорема. Сторона правильного вписанного десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.



Черт. 174.

Пусть AB (черт. 174) — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром O . Угол при O равен $\frac{4}{10}d$, или $\frac{2}{5}d$. Сумма углов A и B треугольника ABO равна, следовательно, $2d - \frac{2}{5}d = \frac{8}{5}d$, и каждый из них равен $\frac{4}{5}d$. Проведём теперь биссектрису AI угла A (I — точка пересечения этой биссектрисы с OB), которая образует с OA и

AB углы в $\frac{2}{5}d$. Угол AIB — внешний угол треугольника AIO , равный сумме двух внутренних не прилежащих к нему углов, равен в данном случае $\frac{4}{5}d$. Отсюда следует, что два треугольника AIB и AIO — равнобедренные и что $AB = AI = OI$. На основании свойства биссектрисы (п. 115) имеем:

$$\frac{OI}{IB} = \frac{OA}{AB}, \quad \text{или} \quad \frac{OI}{IB} = \frac{OB}{OI},$$

что и доказывает теорему.

Следовательно, сторона правильного вписанного десятиугольника определяется построением 9 (п. 156).

Эта сторона равна

$$c_{10} = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

а апофема десятиугольника:

$$a_{10} = \sqrt{R^2 - R^2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

169. Кроме правильного выпуклого десятиугольника, существует правильный звездчатый десятиугольник, который получается, если соединить вершины первого через каждые две его вершины.

Стороны выпуклого десятиугольника и звездчатого десятиугольника можно получить при помощи следующего предложения:

Теорема. Разность сторон обоих правильных вписанных десятиугольников равна радиусу, а их произведение равно квадрату радиуса.

Пусть снова AB (черт. 174) — сторона правильного выпуклого десятиугольника, так что половина окружности AF разделена на пять равных частей точками B, C, D, E . AD — сторона звездчатого десятиугольника; кроме того, прямая AD совпадает с биссектрисой AI угла OAB , так как вписанные углы FAD и DAB отсекают на окружности равные дуги. Радиус OD параллелен AB , так как каждый из внутренних накрестлежащих углов — $\angle ODA$ и $\angle DAB$ — равен углу OAB ; следовательно, треугольники AIB и DIO подобны, и потому треугольник DIO , как и треугольник AIB , — равнобедренный (сравнить п. 168). Отсюда имеем прежде всего:

$$AD - AB = AD - AI = ID = OD.$$

Что касается соотношения

$$AB \cdot AD = AI \cdot AD = OA^2,$$

то оно вытекает из подобия треугольников AIO и AOD , имеющих соответственно равные углы.

Итак, стороны двух правильных десятиугольников соответствуют двум способам деления (внутреннему и внешнему) радиуса в среднем и крайнем отношении (п. 156, построение 9).

Сторона звездчатого десятиугольника равна

$$c_{10}' = R \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

а его апофема:

$$a_{10}' = \sqrt{R^2 - R^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2} = \frac{R}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

170. 5°. Пятиугольник. Соединяя через одну вершины правильного выпуклого десятиугольника, мы получаем правильный выпуклый пятиугольник. Соединяя далее через одну вершины этого правильного пятиугольника, или, что то же, соединяя вершины правильного выпуклого десятиугольника через три, мы получаем звездчатый правильный пятиугольник.

Сторона AC правильного выпуклого пятиугольника равна удвоенной высоте треугольника AOB (черт. 174), выходящей из точки A . Таким образом, её можно вычислить, зная сторону десятиугольника, так как можно вычислить высоты треугольника, три стороны которого известны. Однако проще заметить, что *сторона выпуклого пятиугольника равна удвоенной апофеме звездчатого десятиугольника*. Действительно, в этом можно убедиться либо из равнобедренного треугольника AIO , две высоты которого (т. е. половина стороны выпуклого пятиугольника и апофема звездчатого десятиугольника) равны, либо из прямоугольного треугольника ADF , сторона DF которого равна сто-

роне пятиугольника, а параллель к стороне пятиугольника, проведённая через точку O , — апофеме звездчатого десятиугольника. Следовательно, сторона и апофема правильного выпуклого пятиугольника соответственно равны:

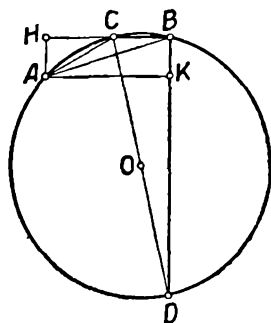
$$c_5 = 2a_{10}' = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ и } a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1).$$

Точно так же убедимся из рассмотрения прямоугольного треугольника ABF , что сторона звездчатого пятиугольника равна удвоенной апофеме выпуклого десятиугольника, т. е.

$$c_5' = \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \text{ а его апофема: } a_5' = \frac{R}{4} (\sqrt{5} - 1).$$

Примечание. Аналогичное рассуждение доказывает вообще, что вычисление стороны и апофемы многоугольника (выпуклого или звездчатого), полученного делением окружности на $2n+1$ равных частей и последовательным соединением делящих точек через каждые p делений, приводится к вычислению апофемы и стороны многоугольника, полученного делением окружности на $4n+2$ равных частей и последовательным соединением делящих точек через каждые q делений, если число q связано с числом p равенством ¹⁾

$$\frac{p}{2n+1} + \frac{q}{4n+2} = \frac{1}{2} \text{ или } 2p + q = 2n + 1.$$



Черт. 175.

171. 6°. Пятнадиугольник. Пусть требуется вписать правильный выпуклый пятнадцатиугольник. Мы сумеем вписать этот многоугольник, если построены шестиугольник

и десятиугольник, с помощью следующей теоремы.

Теорема. Дуга, стягиваемая стороной правильного вписанного пятнадцатиугольника, есть разность дуг, стягиваемых сторонами шестиугольника и десятиугольника.

Действительно, эта дуга равна одной пятнадцатой части окружности, а дробь $\frac{1}{15}$ равна разности $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

Итак, строим в данной окружности с помощью циркуля от одной и той же точки A (черт. 175) хорды AB и AC , равные соответствен-

¹⁾ Это же замечание позволяет, и обратно, свести вычисления, относящиеся к многоугольнику с $4n+2$ сторонами, к вычислениям, относящимся к многоугольнику с $2n+1$ сторонами. Действительно, многоугольник, имеющий $4n+2$ сторон, соответствует нечётному значению q (п. 164); поэтому число $2n+1-q$ будет чётным и соотношение $2p = 2n+1-q$ определяет целое число p , взаимно-простое с $2n+1$, которому в свою очередь соответствует многоугольник с $2n+1$ сторонами; достаточно вычислить сторону и апофему этого последнего многоугольника. Так, выполнение вычислений для пятнадцатиугольников (пп. 174 и 175) даст также и результаты, относящиеся к тридцатиугольникам.

но стороне шестиугольника и стороне десятиугольника. BC будет искомой стороной.

Кроме правильного выпуклого пятнадцатиугольника, существуют три звездчатых пятнадцатиугольника (п. 164), стороны которых стягивают соответственно дуги в $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$ и $\frac{7}{15}$ окружности. Эти дуги, которые, очевидно, можно получить из первого пятнадцатиугольника, получаются, впрочем, построениями, совершенно аналогичными построению выпуклого пятнадцатиугольника.

Дуга, стягиваемая стороной первого звездчатого пятнадцатиугольника, равна разности дуг, стягиваемых стороной звездчатого десятиугольника и стороной шестиугольника.

Дуга, стягиваемая стороной второго звездчатого пятнадцатиугольника, равна сумме дуг, стягиваемых стороной выпуклого десятиугольника и стороной шестиугольника.

Дуга, стягиваемая стороной третьего звездчатого пятнадцатиугольника, равна сумме дуг, стягиваемых стороной звездчатого десятиугольника и стороной шестиугольника.

В самом деле, имеем:

$$\frac{2}{15} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}, \quad \frac{4}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6}, \quad \frac{7}{15} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6}.$$

172. Вообще, если мы умеем вписать правильные многоугольники с m и n сторонами, где числа m и n — взаимно-простые, то мы умеем вписать и правильный многоугольник с mn сторонами.

Действительно, стороны двух известных многоугольников стягивают дуги, соответственно равные одной m -й и одной n -й части окружности. Откладывая x раз подряд первую дугу и отнимая y раз вторую, получаем дугу, стягиваемую стороной искомого многоугольника, если целые числа x и y удовлетворяют равенству

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{1}{mn},$$

или

$$nx - my = 1.$$

Как известно, это равенство невозможно, если m и n имеют общий делитель, но если m и n — числа взаимно-простые, то всегда можно найти два целых числа x и y , которые ему удовлетворяют.

Например, правильные двенадцатиугольники вписываются непосредственно с помощью квадрата и треугольника, так как $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$;

$$\frac{5}{12} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}.$$

В примечании к п. 170 рассматривается частный случай этого положения, когда из двух чисел m и n одно равно двум, а другое — число нечетное.

173. Гаусс доказал, что с помощью линейки и циркуля можно вписать в окружность любой правильный многоугольник, число сторон которого есть простое число вида $2^n + 1$. Таким образом, мы сможем вписать правиль-

ные треугольник ($2+1=3$) и пятиугольник ($2^2+1=5$), далее идут многоугольники с $17 (=2^4+1)$, $257 (=2^8+1)$ и т. д. сторонами¹⁾.

Это предложение в соединении с теми, которые мы ранее доказали, показывает, что можно вписать с помощью линейки и циркуля правильный многоугольник с N сторонами, если число N , разложенное на простые множители, содержит только: 1) простые множители вида 2^n+1 , различные между собой, и 2) множитель 2 в какой-либо степени. Доказывается, обратно, что нельзя вписать многоугольник с помощью линейки и циркуля, если число N не принадлежит к той категории, которую мы определили.

Таким образом, правильный многоугольник с $170 (=2 \cdot 5 \cdot 17)$ сторонами может быть вписан, но не может быть вписан многоугольник с 9 сторонами, так как число 9 хотя и равно степени 2, увеличенной на 1, но оно не есть число простое, с другой стороны, хотя простые его множители, из которых оно составлено ($9=3 \cdot 3$), имеют вид 2^n+1 , но они равны между собою.

174. Чтобы вычислить сторону правильного выпуклого пятнадцатигульника, вписанного в окружность радиуса R , положим, что AB и AC (черт. 175) — соответственно стороны вписанного шестиугольника и десятиугольника, так что BC — искомая сторона. Из точки A опустим на прямую BC перпендикуляр AH ; имеем $BC=BH-CH$.

Но угол ABH , как вписанный угол, опирающийся на дугу AC , равен половине центрального угла, соответствующего стороне десятиугольника, так что отрезок BH равен апофеме выпуклого десятиугольника, вписанного в окружность радиуса AB ; отсюда, так как $AB=R$,

$$BH = \frac{AB}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{R}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Точно так же угол ACH , равный вписанному углу, опирающемуся на дугу ACB (так как оба эти угла — дополнительные углу ACB), равен половине центрального угла; соответствующего стороне правильного шестиугольника, так что CH есть апофема правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса AC , т. е.

$$CH = AC \frac{\sqrt{3}}{2} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно,

$$BC = \frac{R}{4} \left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} \right].$$

Ясно, что последний метод применяется каждый раз, когда требуется решить следующую задачу: *даны хорды двух дуг окружности данного радиуса; найти хорду дуги, равной их разности.*

В частности, чтобы вычислить сторону первого звездчатого пятнадцатигульника, мы повторим то же самое рассуждение, заменяя сторону и апофему выпуклого десятиугольника стороной и апофемой

¹⁾ Пользуясь тем, что сумма одинаковых нечётных степеней делится без остатка на сумму оснований, легко доказать, что для того, чтобы 2^n+1 было простым числом, необходимо, чтобы n было степенью двух (однако это условие недостаточно).

звездчатого десятиугольника. Следовательно, искомая сторона будет равна:

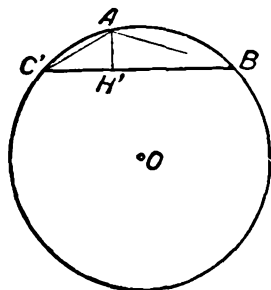
$$\frac{R}{4} \left[(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right].$$

Пусть теперь требуется вычислить сторону второго звездчатого пятнадцатиугольника.

Пусть AB и AC' — стороны шестиугольника и выпуклого десятиугольника, но отложены в данном случае на окружности в противоположных направлениях, так что BC' есть искомая сторона (черт. 176).

Из точки A опустим снова перпендикуляр AH' на BC' . Отрезки BH' и $C'H'$ равны — один апофеме выпуклого десятиугольника, вписанного в окружность радиуса AB , другой — апофеме шестиугольника, вписанного в окружность радиуса AC' . Их сумма BC' будет, таким образом, равна:

$$BC' = \frac{R}{4} \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1) \right].$$



Черт. 176.

Ясно, что так следует поступать каждый раз, *если требуется, зная хорды двух дуг окружности данного радиуса, найти хорду дуги, равной их сумме.*

В частности, мы найдём для стороны третьего звездчатого пятнадцатиугольника значение

$$\frac{R}{4} \left[(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right].$$

175. Можно вычислить апофему пятнадцатиугольника, зная его сторону, но при этом потребуется извлечение нового квадратного корня вместо этого можно получить апофему (без такого извлечения корня) приёмом, аналогичным приёму, использованному для вычисления стороны.

На чертеже 175 мы проводим диаметр CD через точку C . Прямоугольный треугольник BCD показывает нам, как и прежде, что BD равна удвоенной искомой апофеме. Из точки A опускаем перпендикуляр AK на BD . Так как угол ADB равен (как вписанный угол) половине центрального угла, соответствующего стороне шестиугольника, то отрезок DK равен апофеме шестиугольника, вписанного в круг радиуса AD ; следовательно,

$$DK = AD \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ или } DK = \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

так как AD равна удвоенной апофеме правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность.

С другой стороны, угол ABD равен углу ACD , т. е. дополнению половины центрального угла, соответствующего стороне правильного десятиугольника, а следовательно, угол KAB равен половине этого центрального угла; поэтому отрезок BK равен половине стороны десятиугольника, вписанного в круг радиуса AB , т. е.

$$BK = AB \frac{\sqrt{5}-1}{4} = R \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Таким образом, искомая апофема будет:

$$\frac{BD}{2} = \frac{BK + DK}{2} = \frac{R}{8} \left[\sqrt{3} \sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1) \right].$$

Аналогичное рассуждение даёт для апофемы первого звездчатого пятинадцатиугольника значение:

$$\frac{R}{8} \left[\sqrt{3} \sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1) \right];$$

для апофемы второго звездчатого пятинадцатиугольника — значение:

$$\frac{R}{8} \left[\sqrt{3} \sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1) \right];$$

для апофемы третьего звездчатого пятинадцатиугольника — значение:

$$\frac{R}{8} \left[\sqrt{3} \sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1) \right].$$

176. Теорема. Пусть P — периметр правильного описанного около окружности многоугольника, p — периметр правильного вписанного в ту же окружность многоугольника с тем же числом сторон. Если безгранично удваивать число сторон, то P и p стремятся к одному и тому же пределу L .

Пусть $abcd \dots$ (черт. 177) — вписанный в окружность многоугольник и $ABCD \dots$ — описанный многоугольник, стороны которого имеют своими точками касания вершины первого многоугольника. Удвоим число сторон этих многоугольников, деля на две равные части каждую из дуг ab, bc, cd, \dots так, чтобы образовался новый правильный вписанный многоугольник $aebfcg \dots$ и соответствующий новый описанный правильный многоугольник $EFGHKL \dots$ (черт. 177). Поступим с новыми многоугольниками так же, как с первоначальными, и так далее до бесконечности.

Я утверждаю, что периметры p вписанных многоугольников и периметры P описанных многоугольников стремятся к общему пределу.

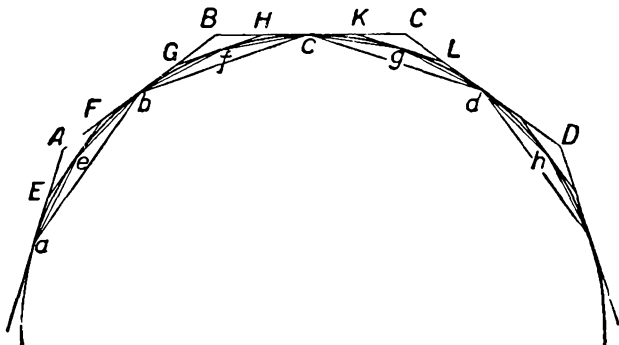
Мы докажем это, основываясь на следующих соображениях.

1°. Периметры p возрастают; например, многоугольник $aebfcg \dots$ имеет больший периметр, чем многоугольник $abcd \dots$, так как последний многоугольник лежит внутри первого.

2°. Периметры P убывают; например, многоугольник $EFGHKL\dots$ имеет меньший периметр, чем многоугольник $ABC\dots$, так как первый многоугольник лежит внутри второго.

3°. Любой периметр p меньше любого периметра P , так как всякий вписанный многоугольник лежит внутри любого описанного многоугольника.

Величина p постоянно возрастает, оставаясь всё время меньше некоторого постоянного значения (именно меньше какого-либо из значений P), и, следовательно, стремится к пределу.



Черт. 177.

Точно так же величина P постоянно убывает, оставаясь всё время больше определённого значения (именно больше какого-либо из значений p), и, следовательно, также стремится к пределу¹⁾.

Оба эти предела равны. Действительно, два правильных многоугольника, вписанный и описанный, с одинаковым числом сторон — подобны, и их периметры относятся, как их апофемы. Апофема описанного многоугольника равна радиусу R данной окружности, так что

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{a},$$

где a обозначает апофему вписанного многоугольника.

Но при неограниченном удвоении числа сторон апофема a стремится к R . Таким образом, предел отношения $\frac{P}{p}$, т. е. отношение обоих предыдущих пределов, равен 1²⁾.

¹⁾ Автор предполагает известными следующие предложения теории пределов:

Если переменная величина возрастает, оставаясь всё время меньше некоторого постоянного числа, то эта величина стремится к некоторому пределу.

Если переменная величина убывает, оставаясь всё время больше некоторого постоянного числа, то эта величина стремится к некоторому пределу. *Прим. ред. перевода.*

²⁾ Автор точно так же предполагает известным следующее предложение: Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов этих величин, если предел второй из них не равен нулю. *Прим. ред. перевода.*

177. Я утверждаю теперь, что *периметр всякого выпуклого многоугольника, вписанного или описанного*¹⁾, *все стороны которого неограниченно убывают, также стремится к пределу L , рассмотренному в предыдущей теореме.*

В частности, этот предел не зависит от выбора исходного правильного многоугольника $abcd\dots$.

Действительно, пусть $a'b'c'\dots$ (черт. 178) — какой-либо вписанный многоугольник, $A'B'\dots$ — выпуклый описанный многоугольник, образованный касательными в точках a' , b' , c' , \dots ; и пусть p' и P' — периметры этих двух многоугольников.

Рассмотренный в предыдущем пункте предел L заключён между p' и P' , так как p' , например, меньше какого-либо из периметров P , рассмотренных в предыдущем пункте и имеющих своим пределом L , так что мы имеем: $p' \leq L$; точно так же находим, что $P' \geq L$.

С другой стороны, прямая OA' пересекает сторону $a'b'$ в её середине H , и из прямоугольных треугольников $Oa'H$ и $Oa'A'$, которые подобны как имеющие общий острый угол, мы имеем:

$$\frac{a'A' + A'b'}{a'b'} = \frac{a'A'}{a'H} = \frac{R}{OH}.$$

Точно так же

$$\frac{b'B' + B'c'}{b'c'} = \frac{R}{OK}$$

где K обозначает середину стороны $b'c'$) и т. д.

Рассмотрим левые части всех этих равенств и возьмём сумму числителей и сумму знаменателей: мы получим, таким образом, отношение, заключённое между наибольшим и наименьшим из первоначальных отношений, так что

$$\frac{P'}{p'} = f,$$

где f заключено между наибольшим и наименьшим из значений $\frac{R}{OH}$, $\frac{R}{OK}, \dots$

Если теперь многоугольник изменяется так, что все его стороны неограниченно уменьшаются, то все расстояния, аналогичные OH , стремятся к R и все отношения $\frac{OH}{R}$, $\frac{OK}{R}$ — к 1. То же самое относится

¹⁾ При этом, однако, предполагается, что окружность расположена внутри описанного многоугольника.

к $\frac{P'}{p'}$ и, следовательно, также к отношениям $\frac{L}{p'}$ или $\frac{P'}{L}$, каждое из которых заключено между 1 и $\frac{P'}{p'}$.

Таким образом, P' и p' стремятся к L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Длина L , общий предел периметров вписанных в окружность и описанных около неё многоугольников, стороны которых неограниченно уменьшаются (существование этого предела нами доказано), называется *длиной окружности*.

178. Теорема. *Длины двух любых окружностей относятся между собою как их радиусы.*

Пусть C, C_1 — длины окружностей радиусов R, R_1 . Впишем в эти окружности два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон. Эти многоугольники подобны; следовательно (п. 146, следствие), их периметры P и P_1 относятся между собой как радиусы окружностей.

Но когда число сторон неограниченно возрастает, отношение $\frac{P}{P_1}$ стремится к отношению $\frac{C}{C_1}$ длин двух окружностей. Итак, теорема доказана.

Следствие. *Отношение длины окружности к диаметру есть число постоянное.*

В самом деле, пропорцию $\frac{C}{C_1} = \frac{R}{R_1}$ можно записать в виде

$$\frac{C}{R} = \frac{C_1}{R_1} \text{ или } \frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}.$$

Отношение длины окружности к диаметру будет, таким образом одно и то же для двух любых окружностей.

Это постоянное число, выражающее отношение длины окружности к диаметру, обозначается греческой буквой π .

Следствие. *Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.*

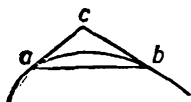
179. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Длина дуги окружности* есть предел, к которому стремится длина выпуклой ломаной, вписанной или описанной, концами которой служат конечные точки дуги и длины всех сторон которой неограниченно уменьшаются.

Существование такого предела доказывается с помощью тех же рассуждений, которые были применены для длины всей окружности. Рассматривают сначала правильную ломаную, вписанную или описанную, число сторон которой неограниченно удваивается; после этого рассматривают произвольную ломаную¹⁾.

¹⁾ Этот способ доказательства можно распространить на любую выпуклую дугу A , т. е. такую дугу, что никакая её часть не пересекается с соответствующей ей хордой. Для этого достаточно, чтобы любому числу m (сколь угодно близкому к 1) можно было поставить в соответствие такую длину ϵ , что для любой части дуги A , концы которой находятся друг от друга на расстоянии, меньшем ϵ , отношение хорды ab к сумме отрезков касательных $ac + bc$ (черт. 179) заключалось между m и 1; это условие (как доказывается в курсах анализа бесконечно-малых) всегда выполняется в силу известных предположений относительно тех кривых, которые прихо-

Любая дуга окружности длиннее соответствующей ей хорды, так как она служит пределом ломаных, которые все длиннее этой хорды и периметры которых возрастают. По аналогичной причине эта дуга короче всякой объемлющей её ломаной, имеющей с ней общие концы ¹⁾.

Отношение дуги окружности к соответствующей хорде стремится к единице, когда дуга стремится к нулю (если окружность остаётся постоянной). Действительно, длина дуги $a'b'$ (черт. 178) заключена между длиной соответствующей хорды и периметром ломаной $a'A'b'$, образованной касательными в её концах; отношение этих двух величин стремится, как мы видели (п. 177), к единице, когда дуга $a'b'$ неограниченно убывает.



Черт. 179.

179а. Две равные дуги имеют одинаковую длину, так как ломаные, служащие для определения их длин, могут быть выбраны соответственно равными друг другу. Сумма двух дуг имеет своей длиной сумму длин этих дуг, так как ломаные, вписанные в каждую из этих дуг, образуют вместе ломаную, вписанную во всю дугу.

Итак, согласно основному положению, на которое мы уже несколько раз ссылались, отношение длин двух дуг одной и той же окружности равно отношению самих дуг (п. 17). В частности эти длины относятся между собой как числа, измеряющие эти дуги в градусах (п. 18а) или в градусах.

Так как длина окружности радиуса R равна $2\pi R$ и эта окружность содержит 360 градусов, то длина дуги в один градус равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$.

Дуга в одну минуту имеет длину в 60 раз меньшую, а именно $\frac{\pi R}{180 \cdot 60}$; дуга в одну секунду — $\frac{\pi R}{180 \cdot 60 \cdot 60}$.

дится рассматривать. При этом (как и в п. 177) отношение периметра вписанной ломаной к периметру соответствующей описанной ломаной необходимо стремится к 1, когда число сторон неограниченно возрастает таким образом, что каждая из них стремится к нулю.

Существование предела доказывается сначала для такой последовательности ломаных, что вершины каждой ломаной принадлежат к числу вершин последующей ломаной (рассуждение, применённое в п. 176); далее переходят к общему случаю, как в п. 177.

Невыпуклую дугу можно разбить на несколько выпуклых дуг.

¹⁾ Это рассуждение, очевидно, распространяется на длины дуг произвольных кривых, определяемые с помощью рассуждений, приведённых в предыдущей сноске. В частности, *прямая линия представляет собой кратчайшее расстояние между двумя точками. Выпуклая дуга (см. предыдущую сноску) короче любой (ломаной или кривой) линии, объемлющей эту дугу и имеющей с ней общие концы.*

Следовательно, длина дуги окружности радиуса R , содержащая m градусов, n минут, p секунд, равна

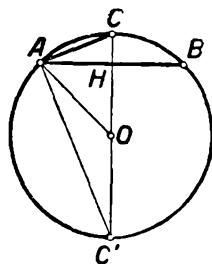
$$\frac{\pi R}{180} \left(m + \frac{n}{60} + \frac{p}{60 \cdot 60} \right).$$

Длина дуги в n градусов равна

$$\frac{\pi R n}{200}.$$

180. Таким образом, мы видим, что можно вычислить длину дуги какой-либо данной окружности, если известно число π .

Вычисление π . Метод периметров. Чтобы вычислить это число, или, что то же самое, чтобы вычислить длину окружности данного радиуса R , мы должны по определению вычислить периметры правильных вписанных многоугольников, число сторон которых неограниченно удваивается. Периметр каждого из этих многоугольников даёт приближённое значение с недостатком искомой длины, причём это значение даёт тем большее приближение, чем больше число сторон. Если одновременно с вычислением периметра вписанного многоугольника мы умеем вычислить периметр соответствующего описанного многоугольника, то мы можем получить, таким образом, приближённое значение с избытком, и разность приближённых значений с избытком и с недостатком даст верхнюю границу ошибки, которую мы допустим, принимая за длину окружности значение одного из двух периметров. Но мы умеем вычислять стороны некоторых правильных вписанных многоугольников, в частности сторону квадрата. Чтобы получить из неё стороны многоугольника с $4 \cdot 2$, $4 \cdot 2^2$, ..., $4 \cdot 2^n$, ... сторонами, достаточно решить следующую задачу.



Черт. 180.

Задача. Зная сторону правильного многоугольника, вписанного в окружность данного радиуса, вычислить сторону правильного многоугольника, вписанного в ту же окружность и имеющего вдвое большее число сторон.

Пусть $AB = c$ (черт. 180) — сторона данного многоугольника, вписанного в круг радиуса $OA = R$.

Деля дугу AB на две равные части радиусом OC , перпендикулярным к хорде AB в её середине H , получаем сторону AC правильного вписанного многоугольника с удвоенным числом сторон.

Теперь имеем из треугольника OAC :

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OH = 2R^2 - 2R \cdot OH = 2R(R - OH);$$

но OH равно $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$. Таким образом, искомая сторона c_1 будет.

$$c_1 = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} \right)}.$$

Отсюда, так как сторона квадрата равна

$$R\sqrt{2}, \text{ а его периметр } 4R\sqrt{2},$$

то сторона правильного вписанного восьмиугольника равна

$$R\sqrt{2-\sqrt{2}}, \text{ а его периметр } 8R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

сторона правильного вписанного шестнадцатиугольника равна

$$R\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}, \text{ а его периметр } 16R\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}},$$

и т. д.

180а. Чтобы получить приближённое значение с избытком длины окружности, достаточно вычислить периметр правильного описанного многоугольника и, следовательно, решить следующую задачу.

Задача. Зная сторону правильного многоугольника, вписанного в окружность данного радиуса R , вычислить сторону правильного описанного около той же окружности многоугольника с тем же числом сторон.

Искомую сторону c' находим непосредственно, замечая, что оба многоугольника подобны и, следовательно, их стороны относятся между собою как их апофемы. Так как апофема описанного многоугольника равна R , а вписанного равна $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$, то искомая сторона получается из пропорции

$$\frac{c'}{c} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}.$$

Мы показали, как вычислить сторону c правильных вписанных многоугольников с всё большим и большим числом сторон; предыдущая пропорция позволяет вычислять стороны соответствующих описанных многоугольников.

181. Можно также, зная сторону c правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса R , получить сразу сторону c_1 и апофему a_1 правильного многоугольника с удвоенным числом сторон, вписанного в ту же окружность (что даёт сторону соответствующего описанного многоугольника без нового квадратного корня), с помощью следующего приёма.

Пусть C' — точка, в которой продолженный радиус OC пересекает окружность (черт. 180); треугольник ACC' — прямоугольный и даёт (п. 123, примечание)

$$AC \cdot AC' = CC' \cdot AH = 2R \cdot \frac{c}{2} = Rc$$

и, с другой стороны,

$$AC^2 + AC'^2 = CC'^2 = 4R^2.$$

Умножим первое равенство на 2 и прибавим его ко второму; получим:

$$AC^2 + AC'^2 + 2AC \cdot AC' = (AC + AC')^2 = 4R^2 + 2Rc.$$

Таким образом,

$$AC + AC' = \sqrt{4R^2 + 2Rc} = 2 \sqrt{R \left(R + \frac{c}{2} \right)}.$$

Если после умножения первого равенства на 2 мы вычтем его из второго, то получим:

$$AC^2 + AC'^2 - 2AC \cdot AC' = (AC' - AC)^2 = 4R^2 - 2Rc.$$

Таким образом:

$$AC' - AC = \sqrt{4R^2 - 2Rc} = 2 \sqrt{R \left(R - \frac{c}{2} \right)}.$$

Складывая и вычитая почленно эти два равенства, получим:

$$AC = \sqrt{R \left(R + \frac{c}{2} \right)} - \sqrt{R \left(R - \frac{c}{2} \right)};$$

$$AC' = \sqrt{R \left(R + \frac{c}{2} \right)} + \sqrt{R \left(R - \frac{c}{2} \right)},$$

что даёт ответ на поставленный вопрос, так как отрезок AC равен иско-
мой стороне c_1 и AC' — удвоенной апофеме a_1 .

Итак, мы знаем теперь, как *вычислить хорду половины каждой из оу-
дуг, которые стягивает данная хорда в окружности данного радиуса.*

182. Вычисление π . Метод равных периметров. Предыдущий метод можно представить в несколько иной форме.

Действительно, задача состоит в вычислении отношения периметра p правильного многоугольника к радиусу R описанного круга и к апо-
феме a , или, что то же, к радиусу вписанного круга, причём это вычисление должно быть выполнено для многоугольников, число стор-
он которых неограниченно возрастает. Но совершенно безразлично, будут ли многоугольники, которые мы последовательно рассматриваем, вписанными в одну и ту же окружность или нет, так как отношения

$\frac{p}{R}$ и $\frac{p}{a}$ зависят только от числа сторон многоугольника (п. 163).

Метод равных периметров заключается в рассмотрении правиль-
ных многоугольников, число сторон которых неограниченно удваивается и которые имеют один и тот же периметр. Таким образом, мы должны сперва решить следующую задачу.

Задача. Зная радиус R и апофему a правильного многоугольни-
ка¹⁾, вычислить радиус R' и апофему a' правильного многоугольника с удвоенным числом сторон, имеющего с первым равный периметр.

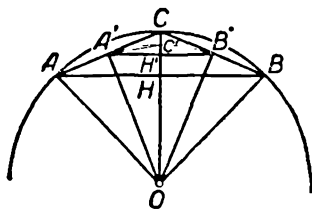
Пусть AB (черт. 181) — сторона правильного многоугольника с n сторонами, вписанного в окружность радиуса $OA = R$. Опустим на AB перпендикуляр $OH = a$ и продолжим его до встречи с окружностью в точке C , середине дуги AB . Соединим точки A и B с точкой C и

¹⁾ Под „радиусом“ правильного многоугольника здесь и далее понимается радиус описанной около него окружности. *Прим. ред. перевода.*

пусть A' и B' будут середины этих двух отрезков, а отрезок $A'B'$ пусть пересекает OC в точке H' .

Отрезок $A'B'$ есть сторона правильного многоугольника с $2n$ сторонами, вписанного в окружность радиуса OA' .

Действительно, так как угол AOB отсекает на окружности радиуса OA дугу, равную одной n -й части окружности, то угол $A'OB'$, который равен его половине (так как угол $A'OC$ равен половине угла AOC и угол $B'OC$ — половине угла BOC), отсекает на окружности радиуса OA' дугу, равную одной $2n$ -й части этой окружности.



Черт. 181.

Этот многоугольник имеет тот же периметр, что и данный.

Действительно, сторона $A'B'$ этого многоугольника, соединяющая середины AC и BC , равна половине первоначальной стороны AB , в то время как число сторон многоугольника удвоено.

Искомые длины R' и a' суть, таким образом, OA' и OH' .

Точка H' есть середина CH , так что имеем:

$$OH' - OH = OC - OH'.$$

Это можно переписать в виде

$$2OH' = OC + OH \quad \text{или} \quad OH' = \frac{OC + OH}{2},$$

т. е. OH' есть среднее арифметическое между OC и OH .

С другой стороны, прямоугольный треугольник $OA'C$ даёт

$$OA' = \sqrt{OC \cdot OH'},$$

т. е. OA' есть среднее геометрическое между OC и OH .

Таким образом, a' вычисляется по формуле

$$a' = \frac{R + a}{2},$$

затем R' по формуле

$$R' = \sqrt{Ra'}.$$

Повторяя эти две операции, получаем значения a и R для многоугольников с числом сторон всё большим и большим. Отношения значений этих двух величин к общему полупериметру многоугольников дают примерные значения $\frac{1}{\pi}$, — первые с недостатком, вторые с избытком, — и при этом всё с большим и большим приближением.

Предположим для упрощения, что общий периметр многоугольников равен удвоенной единице длины, и примем за первый из них квадрат. Апофема этого многоугольника будет равна половине стороны

т. е. $\frac{1}{4}$, а радиус — стороне, делённой на $\sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Приняв $a = \frac{1}{4}$, а $R = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, получим из предыдущих формул значения a' и R' , соответствующие правильному восьмиугольнику, и т. д.

Но, если принять $a = 0$ и $R = \frac{1}{2}$ ¹⁾, то эти формулы дадут $a' = \frac{1}{4}$; $R' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Таким образом, мы приходим к следующему предложению (теорема Ш в а б а).

Теорема. Если составить ряд чисел, первые два числа которого 0 и $\frac{1}{2}$ и каждый член которого попеременно является средним арифметическим и средним геометрическим двух предыдущих, то члены составленного таким образом ряда стремятся к $\frac{1}{\pi}$.

183. Так как числа a и R , последовательные члены предыдущего ряда, представляют собою приближённые значения числа $\frac{1}{\pi}$, — первые с недостатком, вторые с избытком, — то ошибка, которую мы получим, если примем одно из них за приближённое значение $\frac{1}{\pi}$, будет меньше, нежели $R - a$.

Но мы имеем:

$$R' - a' < \frac{R - a}{4}$$

Чтобы это доказать, возьмём снова чертёж 181 и отложим на OC длину $OC' = OA' = R'$. Отрезок CH' даёт $R' - a'$. Но углы $C'A'H'$ и $C'A'C$ равны, так как они измеряются половиною равных дуг $C'B'$ и $A'C'$ окружности OA' (один как вписанный угол, другой как угол, образованный касательной и секущей). Теорема о биссектрисе (п. 115) показывает, что отрезки $H'C'$ и $C'C$ относятся между собою, как $A'H'$ и $A'C$. Следовательно, $H'C'$ меньше половины отрезка $H'C$, равной четверти CH или $\frac{R - a}{4}$.

¹⁾ Эти два числа соответствуют делению окружности на две равные части. Если обозначить точки деления через A и B , то диаметр AB можно рассматривать как сторону правильного многоугольника, имеющего две стороны, периметр которого равен $2AB$. Если принять этот периметр за 2, то радиус R выразится числом $\frac{1}{2}$, а апофема (расстояние стороны от центра) — числом 0.

Но первые два члена последовательности Шваба дают $R - a = \frac{1}{2}$. Таким образом, допущенная ошибка, если принять за приближённое значение $\frac{1}{\pi}$ член, который занимает в этой последовательности $2n$ -е место, меньше

$$\frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

184. Греческий геометр Архимед, который первый определил и вычислил длину окружности, нашёл методом периметров приближённое значение π с избытком с точностью до одной сотой:

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

Можно получить, впрочем, только приближённые значения π и никогда нельзя получить его точного значения, потому что доказано, что это число несоизмеримо, т. е. оно не равно никакому целому числу и никакому дробному числу.

Первые десятичные знаки числа π таковы¹⁾:

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

и числа $\frac{1}{\pi}$:

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098 \dots$$

Часто пользуются для π приближённым значением 3,1416 (с избытком).

Знаменитая задача о квадратуре круга приводит (как мы это увидим позже) к построению отрезка, равного длине окружности, радиус которой дан. Эту задачу нельзя решить, пользуясь только линейкой

¹⁾ Это значение π было получено не теми методами, которые мы указали, а методами, значительно более совершенными, заимствованными из анализа бесконечно-малых. Эти десятичные знаки легко запомнить с помощью следующего стиха, в котором числа букв в отдельных словах дают последовательные цифры числа π :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Приближённое значение $\frac{355}{113}$, дающее число π с точностью до одной миллионной с избытком, было дано Адрианом Мецием.

и циркулем. Эта невозможность, которая ещё не вытекает из несоизмеримости π ¹⁾, также доказана²⁾.

УПРАЖНЕНИЯ.

Правильные многоугольники.

178. Вымостить (т. е. заполнить без пробелов и перекрытий) плоскость правильными многоугольниками, равными между собою. Показать, что эта задача возможна только для трёх видов правильных многоугольников.

179. Построить правильный пятиугольник, зная его сторону.

180. В правильном пятиугольнике две диагонали, не проходящие через одну и ту же вершину, взаимно делятся в среднем и крайнем отношении (доказать).

181. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны сторонам двух правильных десятиугольников, вписанных в одну и ту же окружность, имеет своей гипотенузой сторону равностороннего треугольника, вписанного в ту же окружность (доказать).

182. Доказать то же предложение для выпуклого десятиугольника, шестиугольника и выпуклого пятиугольника; для звездчатого десятиугольника, шестиугольника и звездчатого пятиугольника.

183. Если на сторонах правильного шестиугольника построить вне шестиугольника 6 квадратов, то 12 внешних вершин этих квадратов суть вершины правильного двенадцатиугольника (доказать).

184. Проверить, что два выражения для стороны c_1 , приведённые в пп. 180 и 181, равны между собою.

Длина окружности.

185. Найти радиус окружности, дуга которой в $18^\circ 15'$ равна 2 м.

186. На радиусе OA окружности, как на диаметре, построена вторая окружность. Пусть B и C — точки, в которых обе окружности пересекаются с одним и тем же радиусом, выходящим из центра O первой окружности. Доказать, что дуги AB и AC имеют одну и ту же длину.

187. Если две окружности внутренним образом касаются одной и той же третьей окружности и сумма их радиусов равна радиусу третьей окружности, то дуга последней, заключённая между точками касания, равна сумме дуг внутренних окружностей, заключённых между их точкой пересечения, ближайшей к большей окружности, и теми же точками касания (доказать).

188. Сумма сторон вписанных квадрата и равностороннего треугольника даёт приближённое значение длины половины окружности (предел ошибки: одна сотая радиуса) (доказать).

189. Периметр прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{6}{5}$ диаметра, даёт приближённо значение длины окружности (предел ошибки: одна десятитысячная радиуса) (доказать).

¹⁾ Например, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, и тем не менее очень легко, зная один из этих отрезков, построить другой.

²⁾ Теорема о несоизмеримости π принадлежит Ламберту (1770). Что касается невозможности квадратуры круга, то её доказал Лийдеман в 1882 г., обобщая теоремы, принадлежащие французскому математику Эрмиту.

ЗАДАЧИ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

190. Даны две concentрические окружности; провести прямую, на которой эти окружности отсекают две хорды, из которых одна вдвое длиннее другой.

191. На стороне AB треугольника от точки B отложен отрезок BD , а на продолжении стороны AC за точку C — равный ему отрезок CE . Отрезок DE делится стороной BC внутренним образом в отношении, обратном отношению сторон AB и AC (доказать).

192. Пусть A и A' — точки касания общей касательной к двум окружностям; M и M' — две точки пересечения этих окружностей соответственно с некоторой прямой, параллельной AA' . Найти геометрическое место точек пересечения прямых AM и $A'M'$.

193. Стороны многоугольника остаются соответственно параллельными определённым направлениям, в то время как все вершины, кроме одной, скользят по заданным прямым. Найти геометрическое место последней вершины (упр. 124).

194. Вписать в данный многоугольник другой многоугольник, стороны которого параллельны данным прямым. Может ли эта задача быть неопределённой?

195. Высоты треугольника разделены в данных отношениях и через каждую точку деления проведена прямая, параллельная соответствующей стороне. Найти коэффициент подобия треугольника, построенного таким образом, и первоначального треугольника.

196. Пусть a, b, c — точки, симметричные с какой-либо одной и той же точкой O плоскости относительно середин сторон BC, CA и AB треугольника ABC . Прямые Aa, Bb и Cc пересекаются в одной точке P . Когда точка O перемещается, описывая какую-либо фигуру, точка P описывает фигуру, гомотетичную первой (доказать).

197. Через три вершины треугольника проведены три прямые, проходящие через одну точку O ; затем построены прямые, симметричные с каждой из них относительно биссектрисы того угла треугольника, из вершины которого данная прямая выходит. Доказать, что эти три новые прямые также проходят через некоторую точку O' .

Доказать, что теорема сохраняет силу, если первоначальные прямые, вместо того чтобы проходить через одну точку, будут параллельны и что в этом случае точка O' лежит на окружности, описанной около треугольника.

Вывести из этой теоремы, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

198. $ABCD$ — ромб, описанный около окружности; доказать, что произвольная касательная MN отсекает на смежных сторонах AB и BC отрезки AM и CN , произведение которых постоянно.

199. Если через точку A , взятую в плоскости круга, провести к кругу произвольную секущую $AM'M$, то прямые, соединяющие точки M и M' с одним из концов диаметра, проходящего через A , отсекают на прямой, перпендикулярной к этому диаметру и проходящей через точку A , два отрезка, произведение которых постоянно (доказать).

200. Внутренняя общая касательная двух окружностей делит внешнюю общую касательную (а последняя делит внешним образом первую) на два отрезка, произведение которых равно произведению радиусов (доказать).

Отрезок, отсечённый общими внутренними касательными на общей внешней касательной, имеет ту же середину, что и эта общая внешняя касательная, и ту же длину, что и общая внутренняя касательная (доказать).

201. Прямоугольный треугольник имеет вершиной прямого угла определённую точку A , в то время как две другие вершины B и C остаются постоянно на определённой окружности O . Найти: 1) геометрическое мес-

то середин сторон BC ; 2) геометрическое место проекций точки A на сторону BC .

202. Построить треугольник, зная одну сторону, соответствующую ей высоту и произведение двух других сторон.

203. Построить треугольник, зная две его медианы и высоту (два случая).

204. Вписать в данную окружность равнобедренный треугольник, зная сумму или разность основания и высоты.

205. Вычислить диагонали трапеции, зная четыре её стороны.

206. Даны окружность и две точки A и B ; провести хорду, параллельную AB , так, чтобы прямые, соединяющие её концы соответственно с точками A и B , пересеклись на окружности.

207. Через концы A и B диаметра круга проведены две хорды AC и BD , которые пересекаются в точке P внутри круга. Доказать, что:

$$AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP.$$

208. Через две данные точки A и B проведена произвольная окружность и через данную точку C , лежащую на одной прямой с точками A и B , — касательные к этой окружности. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки касания.

209. Построить три попарно ортогональные окружности, имеющие своими центрами три данные точки.

210. Даны: окружность и на ней две точки A и B ; далее дана произвольная прямая и на ней точка C . Найти на окружности точку M , обладающую тем свойством, что расстояние между точками пересечения прямых MA и MB с данной прямой делится точкой C в заданном отношении.

211. На сторонах AB , AC и BC треугольника ABC , как на основаниях, построены три равнобедренных подобных треугольника ABP , ACQ и BCR ; два первых расположены вне данного треугольника, третий, напротив, по ту же сторону от BC , как и данный треугольник (или обратно). Доказать, что $APRQ$ — параллелограмм.

212. Фигура, оставаясь сама себе подобной, изменяется так, что три прямые, принадлежащие этой фигуре и не проходящие через одну точку, проходят каждая через неподвижную точку. Доказать: 1) что всякая другая прямая той же фигуры точно так же проходит через некоторую неподвижную точку; 2) что любая точка фигуры описывает окружность.

213. Построить четырёхугольник, подобный данному четырёхугольнику, так, чтобы его стороны проходили через четыре данные точки.

Может ли задача быть неопределённой? Найти в этом случае геометрическое место точек пересечения диагоналей различных четырёхугольников, отвечающих условию задачи.

214. Фигура, оставаясь постоянно себе подобной, изменяется так, что три точки этой фигуры описывают каждая прямую линию. Доказать, что некоторая точка этой фигуры остаётся неподвижной. Вывести отсюда, что любая другая точка описывает прямую.

215. Даны две подобные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения; найти геометрическое место таких точек, чтобы, если их рассматривать как принадлежащие первой фигуре, то прямая, которая соединяет их с гомотетичными им точками второй фигуры, проходила через данную точку.

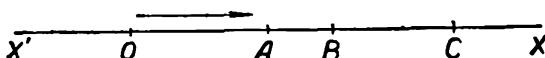
216. Провести через данную точку O секущую MON , которая отсекает на двух данных прямых, считая от двух данных точек A и B этих прямых, два отрезка AM и BN , имеющих данное отношение.

ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

ГЛАВА I. ЗНАКИ ОТРЕЗКОВ.

185. До сих пор мы измеряли прямолинейные отрезки исключительно положительными числами. Однако если приходится сравнивать отрезки, лежащие на одной и той же прямой, то оказывается предпочтительным поставить в соответствие этим отрезкам как положительные, так и отрицательные числа, пользуясь некоторым соглашением, которое мы сейчас установим.

Выберем на рассматриваемой прямой $X'X$ (черт. 182) раз навсегда определённое направление, которое назовём *положительным направлением*, например направление $X'X$, показанное на чертеже стрел-



Черт. 182.

кой. Произвольному отрезку AB мы ставим в соответствие число, измеряющее его длину, взятое со знаком $+$, если этот отрезок имеет положительное направление, и со знаком $-$, если он имеет противоположное направление.

Следует заметить, что знак отрезка существенно зависит от порядка, в котором заданы две его конечные точки, а именно

$$AB = -BA.$$

186. Предыдущее соглашение позволяет писать некоторые соотношения в форме, не зависящей от расположения рассматриваемых точек.

Пусть, например, A , B , C — три точки на одной прямой; отрезок BC равен сумме или разности отрезков AB и AC , смотря по тому, в каком порядке следуют друг за другом три точки. Если отрезки задаются по величине и по знаку, то оба эти соотношения заменяются одним соотношением

$$AB + BC + CA = 0, \quad (1)$$

которое имеет место независимо от расположения данных точек.

Действительно, если, двигаясь по прямой ABC в положительном направлении, мы встречаем эти точки в порядке A , B , C (как на черт. 182), то отрезки AB , AC и BC положительны и мы имеем $AC = AB + BC$, что равносильно соотношению (1).

Но это соотношение не изменится, если переставить две из входящих в него точек; например, переставив B и C , имеем равенство

$$AC + CB + BA = 0,$$

эквивалентное предыдущему; следовательно, предыдущее равенство верно, если порядок точек таков: A, C, B .

Далее известно, что с помощью последовательных перестановок двух элементов можно изменить порядок элементов произвольным образом. Следовательно, равенство (1) верно во всех случаях.

Это равенство непосредственно распространяется на любое число точек, лежащих на одной прямой. Например, пять точек A, B, C, D, E на одной прямой $X'X$ дают равенство

$$AB + BC + CD + DE + EA = 0.$$

Чтобы его доказать, заметим, что искомое равенство доказано для случая трёх точек. Следовательно, достаточно установить, что если это равенство справедливо для некоторого числа точек, то оно справедливо и для числа точек, на единицу большего. Мы можем поэтому предположить, что оно уже доказано для случая четырёх точек, и написать:

$$AB + BC + CD + DA = 0.$$

С другой стороны, три точки A, D, E дают:

$$AD + DE + EA = 0.$$

При почленном сложении обоих равенств два члена DA и AD уничтожаются, и получается искомое равенство.

187. Возьмём на прямой $X'X$ некоторую неподвижную точку O (черт. 182) и будем определять положение какой-либо точки с помощью отрезка OA , данного по величине и по знаку. Этот отрезок называется *абсциссой* точки A относительно *начала* O . Очевидно, что абсолютная величина и знак абсциссы вполне определяют положение точки A .

Если две точки A и B даны своими абсциссами относительно одного и того же начала O , то расстояние AB определяется равенством

$$AB = OB - OA,$$

которое эквивалентно равенству (1) предыдущего пункта.

188. Если точка C взята на прямой AB , то отношение $\frac{CA}{CB}$ отрицательно, если точка C лежит между точками A и B , и положительно, если точка C лежит вне отрезка AB .

Поэтому существует только одна точка, которая делит данный отрезок в определённом отношении, заданном по величине и по знаку. Если точки C и D гармонически сопряжены относительно концов от-

резка AB , то отношения $\frac{CA}{CB}$ и $\frac{DA}{DB}$ равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки.

189. Пусть O — середина отрезка CD (черт. 183), концы которого гармонически сопряжены относительно концов отрезка AB . При этом мы будем иметь:

$$OC^2 = OA \cdot OB.$$

Действительно, определим точки A , B , C и D с помощью их абсцисс относительно начала O . Равенство $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ даёт:

$$-\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{OC - OA}{OB - OC} = \frac{OA - OD}{OB - OD}.$$

Составим одно отношение, взяв сумму предыдущих членов двух последних отношений и сумму их последующих членов, и другое отношение, взяв разности тех же членов. Замечая, что $OD = -OC$, мы получим таким образом:

$$-\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{2OC}{2OB} = \frac{2OA}{2OC}.$$

Итак, мы имеем следующую теорему.

Теорема. Половина прямолинейного отрезка есть среднее пропорциональное между расстояниями середины отрезка до двух точек, делящих его гармонически.

Мы видим, кроме того, что общее значение отношений $\frac{OA}{OC}$ и $\frac{OC}{OB}$ равно общему значению отношений $-\frac{CA}{CB}$ и $\frac{DA}{DB}$.

Обратная теорема. Если от середины O отрезка CD отложить в одном и том же направлении два отрезка OA и OB , имеющие своим средним пропорциональным половину данного отрезка, то точки A и B делят гармонически данный отрезок CD .

Действительно, из равных отношений $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OC}$ получаются с помощью сложения и вычитания предыдущих и последующих членов отношения, им равные:

$$\frac{OA - OC}{OC - OB} = \frac{OA + OC}{OB + OC};$$

отсюда, принимая во внимание равенство $OD = -OC$, имеем:

$$-\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Следствие. Если два отрезка гармонически сопряжены, то окружность, описанная на одном из них, как на диаметре, пересе-

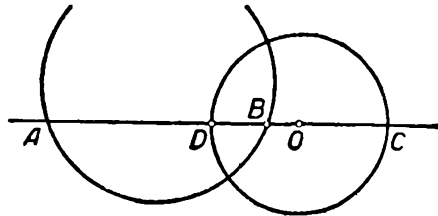
кает под прямым углом любую окружность, проходящую через концы второго отрезка (черт. 183).

Действительно, квадрат радиуса первой окружности равен степени её центра относительно второй окружности.

Обратно, если две окружности пересекаются под прямым углом, то любой диаметр одной окружности делится гармонически другой окружностью.

190. Если две прямые параллельны, то мы выбираем, вообще говоря, одно и то же положительное направление на обеих прямых.

Благодаря этому соглашению мы можем сказать, что отношение отрезков BC и DE , отсекаемых сторонами некоторого угла на двух параллельных секущих, равно по величине и по знаку отношению отрезков AB и AD , которые эти параллельные отсекают на одной из сторон угла (черт. 123, 124 и 125, п. 117).



Черт. 183.

Это равенство было доказано в п. 117 для абсолютных величин отрезков. Кроме того, оба отношения имеют один и

тот же знак: отрезки BC и DE будут иметь одно и то же направление (черт. 123 и 124) или противоположные направления (черт. 125) одновременно с отрезками AB и AD .

Пусть в частности даны две гомотетичные фигуры; очевидно, возможно считать их коэффициент подобия положительным или отрицательным, смотря по тому, будет ли гомотетия прямой или обратной. При этом коэффициент подобия равен по величине и по знаку отношению двух каких-либо соответственных отрезков.

191. Соглашение относительно знаков, установленное в п. 133 для степени точки относительно окружности, есть не что иное, как частный случай того условия, которое мы теперь установили.

Действительно, на секущей ABB' (черт. 137 и 138, п. 131), проведённой через точку A , выберем какое-либо направление за положительное; тогда отрезки AB и AB' будут иметь одинаковое направление или противоположные направления, смотря по тому, будет ли точка A лежать вне или внутри окружности; их произведение будет, таким образом, положительно в первом случае и отрицательно во втором.

УПРАЖНЕНИЯ.

217. Если первые две из четырёх точек A, B, C, D делят гармонически две другие, то имеет место (по величине и по знаку) равенство:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

218. Как можно изменить формулировку теоремы Стюарта (п. 127), чтобы она сделалась независимой от порядка точек B, C, D (обозначения те же, что и в п. 127) на прямой, на которой они лежат.

Доказать непосредственно теорему в этой новой формулировке для случая, когда точка A лежит на прямой BCD . Вывести отсюда формулировку, пригодную для всех случаев.

219. Если в теореме п. 116 изменять величину данного отношения, оставляя точки A и B (обозначения те же, что и в п. 116) неподвижными, то различные окружности, получающиеся таким образом, имеют одну и ту же радикальную ось. Их предельными точками будут точки A и B (доказать).

Вывести отсюда решение следующей задачи: найти на данной прямой или на данной окружности положение, которое должна занять точка M , для того чтобы отношение её расстояний до двух данных точек было бы наибольшим или наименьшим из возможных (построение, вполне аналогичное построениям п. 159).

219а. Найти две точки, которые делят гармонически два данных отрезка. Всегда ли задача возможна?

220. Окружность, построенная на отрезке, соединяющем центры подобия двух данных окружностей, как на диаметре, имеет общую радикальную ось с двумя данными окружностями.

221. Как изменится формулировка упражнения 130, если точка E выбрана на продолжении отрезка AC ?

Решить тот же вопрос для упражнения 131, если данная прямая пересекает стороны треугольника.

222. Через вершины A, B, C, D данного квадрата (предполагается, что вершины квадрата перечислены в их последовательном порядке) проведены перпендикуляры Aa, Bb, Cc, Dd к некоторой прямой, лежащей в плоскости квадрата, но не пересекающей его сторон. Показать, что при этих условиях величина

$$Aa^2 + Cc^2 - 2Bb \cdot Dd$$

не зависит от положения прямой.

(Преобразовать данное выражение так, чтобы в него входили суммы $Aa + Cc$ и $Bb + Dd$ и разности $Aa - Cc$ и $Bb - Dd$, и принять во внимание, что первые две из этих величин равны между собой в силу упр. 130.)

Как следует видоизменить формулировку этого предложения для случая, когда прямая пересекает квадрат?

ГЛАВА II.

ТРАНСВЕРСАЛИ.

192. Теорема. Если стороны BC, CA, AB треугольника ABC (черт. 184) пересекаются с одной и той же прямой в точках a, b, c , то между отрезками, определёнными таким образом на сторонах, имеем соотношение:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1. \quad (2)$$

Чтобы это доказать, проведём через вершины треугольника до пересечения с трансверсалью¹⁾ три прямые, параллельные какому-нибудь

¹⁾ Трансверсалью называется любая прямая, пересекающая стороны треугольника. *Прим. ред. перевода.*

одному и тому же направлению, на которых установим одно и то же положительное направление.

Пусть α , β , γ — расстояния вершин от трансверсали, считая по проведённым параллельным прямым; имеем:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{bC}{bA} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{cA}{cB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

откуда, перемножая, получим:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \frac{\beta\gamma\alpha}{\gamma\alpha\beta} = 1^{1)}.$$

193. Обратная теорема (теорема Менелая). Если на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC взяты три точки a , b , c , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1, \quad (2)$$

то эти три точки лежат на одной прямой.

Действительно, прямая ab пересекает сторону AB в некоторой точке c' так, что имеет место равенство:

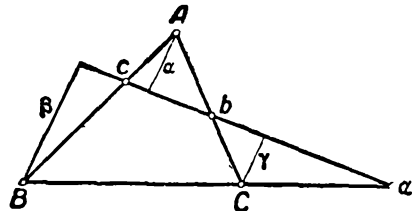
$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1.$$

Это равенство, при сравнении его с предыдущим, показывает, что

$$\frac{cA}{cB} = \frac{c'A}{c'B}$$

и что, следовательно, точки c и c' совпадают.

Примечание. Эта теорема в сущности сводится к теореме, доказанной в п. 144. Действительно, можно найти такие три отрезка α , β и γ (заданные по величине и по знаку), что имеют место равен-



Черт. 184.

1) Если бы трансверсаль была параллельна стороне BC , то точку a следовало бы рассматривать как лежащую в бесконечности, а отношение $\frac{aB}{aC}$ как равное 1. Искомое соотношение обратилось бы при этом в $\frac{bA}{bC} = \frac{cA}{cB}$, т. е. в теорему п. 114. Если бы две стороны AB и AC треугольника сделались параллельными, то точка A лежала бы в бесконечности; написав выражение $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB}$ в виде $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{bA}$, мы заменили бы $\frac{cA}{cB}$ через 1 и получили бы теорему п. 117.

ства:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{bC}{bA} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

откуда в силу соотношения (2) следует

$$\frac{cA}{cB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Вследствие этого три попарно гомотетичные фигуры, в которых точки A, B, C будут тремя соответственными точками и a, β, γ — тремя соответственными отрезками, будут иметь точки a, b, c центрами подобия.

194. Этой теоремой пользуются, когда требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой.

Пример I. Середины трёх диагоналей полного четырёхсторонника лежат на одной прямой.

Пусть $ABCDEF$ (черт. 185) — полный четырёхсторонник, диагонали которого AB, CD, EF имеют своими серединами точки L, M, N . Рассмотрим треугольник ACE , образованный тремя сторонами четырёхсторонника, и пусть $a, c,$

e — середины сторон CE, EA, AC . Прямая se параллельна CE и проходит через точку L ; прямая ea параллельна AE и проходит через точку M ; прямая ac параллельна AC и проходит через точку N . Чтобы доказать, что точки L, M, N лежат на одной прямой, нам достаточно доказать соотношение:

$$\frac{Lc}{Le} \cdot \frac{Me}{Ma} \cdot \frac{Na}{Nc} = 1.$$

Но параллельные прямые Lec и BCE дают

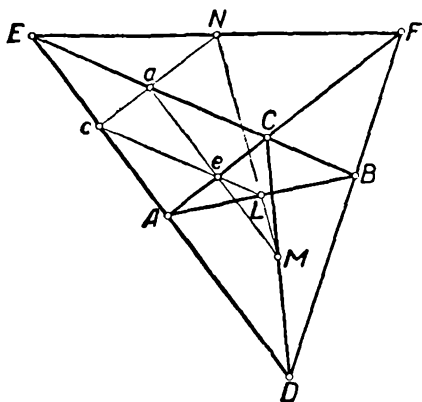
$$\frac{Lc}{Le} = \frac{BE}{BC},$$

и точно так же имеем:

$$\frac{Me}{Ma} = \frac{DA}{DE} \quad \text{и} \quad \frac{Na}{Nc} = \frac{FC}{FA}.$$

Но произведение трёх правых частей

$$\frac{BE}{BC} \cdot \frac{DA}{DE} \cdot \frac{FC}{FA}$$



Черт. 185.

равно 1, поскольку точки B, D, F , взятые на сторонах треугольника ACE , лежат на одной прямой.

195. Пример II. Если вершины двух треугольников $abc, a'b'c'$ соответствуют друг другу таким образом, что прямые aa', bb', cc' , которые соединяют соответствующие вершины, пересекаются в одной точке o , то точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой.

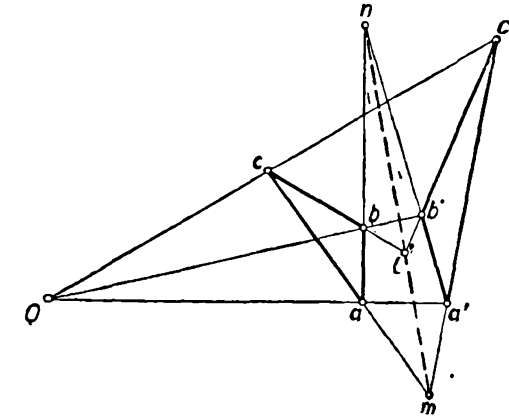
Пусть l (черт. 186) — точка пересечения прямых bc и $b'c'$; m — точка пересечения ca и $c'a'$; n — точка пересечения ab и $a'b'$. Требуется доказать, что точки l, m, n лежат на одной прямой, другими словами, что имеет место равенство:

$$\frac{lb}{lc} \cdot \frac{mc}{ma} \cdot \frac{na}{nb} = 1.$$

Действительно, треугольник obc , пересечённый трансверсалью $lb'c'$, даёт

$$\frac{lb}{lc} \cdot \frac{c'c}{c'o} \cdot \frac{b'o}{b'b} = 1.$$

Точно так же треугольники oca и oab , пересечённые соответственно трансверсальями $mc'a'$ и $na'b'$, дают



Черт. 186.

$$\frac{mc}{ma} \cdot \frac{a'a}{a'o} \cdot \frac{c'o}{c'c} = 1;$$

$$\frac{na}{nb} \cdot \frac{b'b}{b'o} \cdot \frac{a'o}{a'a} = 1.$$

При почленном перемножении трёх последних равенств и сокращении на множителей $a'a, b'b, c'c, a'o, b'o, c'o$ получается требуемое соотношение.

Два треугольника таких, что прямые, соединяющие их соответственные вершины, проходят через одну точку, называются *гомологическими*.

196. Пример III (теорема Паскаля). Во всяком шестиугольнике, вписанном в окружность, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

Пусть $ABCDEF$ (черт. 187) — шестиугольник, противоположные стороны которого AB и DE пересекаются в точке L , стороны BC и EF — в M , стороны CD и FA — в N . Рассмотрим треугольник JK , образованный сторонами AB, CD, EF , другими словами, сторонами данного шестиугольника, взятыми через одну.

Точки L, M, N расположены соответственно на сторонах JK, KI, IJ этого треугольника. Эти точки лежат на одной прямой, если имеет

место соотношение:

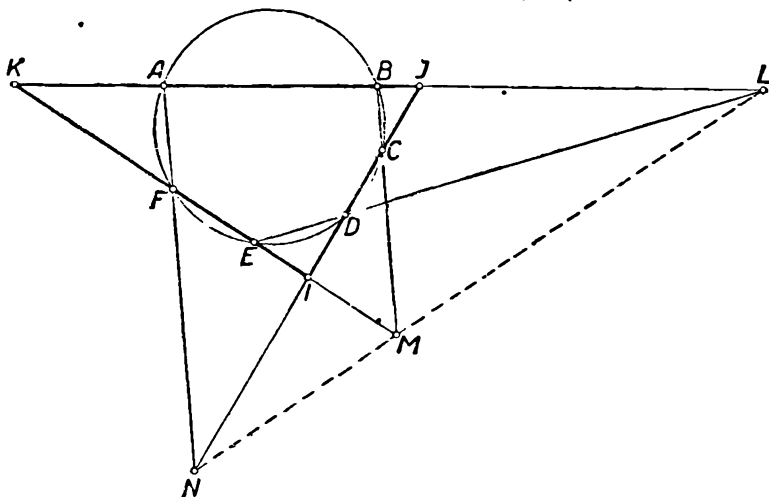
$$\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NJ} = 1. \quad (3)$$

Но, если мы пересечём последовательно треугольник IJK каждой из оставшихся сторон DE , BC , FA шестиугольника, мы получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{LJ}{LK} \cdot \frac{EK}{EI} \cdot \frac{DI}{DJ} &= 1, \\ \frac{MK}{MI} \cdot \frac{CI}{CJ} \cdot \frac{BJ}{BK} &= 1, \\ \frac{NI}{NJ} \cdot \frac{AJ}{AK} \cdot \frac{FK}{FI} &= 1. \end{aligned}$$

Перемножив почленно эти три равенства, мы можем написать, группируя надлежащим образом множители числителя и знаменателя:

$$\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NJ} \cdot \frac{CI \cdot DI}{EI \cdot FI} \cdot \frac{AJ \cdot BJ}{CJ \cdot DJ} \cdot \frac{EK \cdot FK}{AK \cdot BK} = 1.$$



Черт. 187.

Но каждая из трёх последних дробей, которые входят в левую часть, равна 1. Например, произведения $CI \cdot DI$ и $EI \cdot FI$ равны как произведения отрезков, отсечённых окружностью на секущих, выходящих из точки I . Таким образом, получается соотношение (3), и теорема доказана.

Примечание. Предыдущее доказательство остаётся в силе, если точки A и B , C и D , E и F попарно совпадают и стороны треугольника IJK являются касательными к кругу.

При этом теорема принимает следующую форму: *Касательные, проведённые через вершины треугольника, вписанного в круг, пере-*

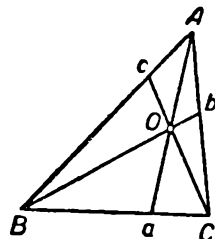
секают соответствующие стороны в трёх точках, лежащих на одной прямой.

197. Теорема. Если через вершины треугольника ABC (черт. 188) провести прямые Aa , Bb , Cc , пересекающиеся в одной и той же точке O , то эти прямые пересекают стороны BC , CA , AB соответственно в трёх точках a , b , c таких, что имеет место соотношение:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1. \quad (4)$$

Действительно, треугольник AaC , пересечённый трансверсалью Bb , даёт¹⁾:

$$\frac{Ba}{BC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{OA}{Oa} = 1.$$



Черт. 188.

Треугольник AaB , пересечённый трансверсалью Cc , даёт:

$$\frac{Ca}{CB} \cdot \frac{cB}{cA} \cdot \frac{OA}{Oa} = 1.$$

При почленном делении двух последних равенств и сокращении на $\frac{OA}{Oa}$ мы получаем:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} \cdot \frac{CB}{BC} = 1;$$

это равенство равносильно равенству (4), так как

$$\frac{CB}{BC} = -1.$$

198. Обратная теорема (теорема Чевы). Если на сторонах треугольника ABC взяты три точки a , b , c так, что имеет место равенство

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1,$$

то прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку.

Действительно, пусть O — точка пересечения прямых Aa и Bb . Прямая CO пересекает сторону AB в некоторой точке c' так, что

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = -1.$$

¹⁾ Рассуждение сохраняет силу, если точка O удаляется в бесконечность, т. е. если прямые Aa , Bb и Cc параллельны. В самом деле, мы видели, что теорема п. 192 сохраняет силу для трансверсали, параллельной одной из сторон треугольника.

Это равенство при сравнении его с тем, которое дано в условии теоремы, даёт:

$$\frac{cA}{cB} = \frac{c'A}{c'B}.$$

Следовательно, точки c и c' совпадают, и теорема доказана.

Если бы прямые Aa и Bb были параллельны, то прямая Cc была бы параллельна этим двум прямым, и три прямые следовало бы рассматривать как пересекающиеся в одной и той же точке в бесконечности.

Этой теоремой пользуются, когда требуется доказать, что три прямые проходят через одну точку.

Пример. Медианы треугольника проходят через одну точку. Так как a , b , c — середины сторон треугольника, то каждое из отно-

шений $\frac{aB}{aC}$, $\frac{bC}{bA}$, $\frac{cA}{cB}$ равно -1 .

Аналогичным образом можно доказать, что биссектрисы углов треугольника проходят через одну точку; и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ.

223. Вывести теорему Менелая для случая, когда все точки деления являются внешними, пользуясь тремя окружностями, аналогичными тем, которыми приходится пользоваться в упражнении 127, и ограничиваясь случаем, когда эти окружности пересекаются.

224. Прямая пересекает стороны треугольника ABC в трёх точках a , b , c . Для каждой из трёх этих точек строим точку, ей симметричную относительно середины стороны, на которой она лежит. Доказать, что новые точки a' , b' , c' , полученные таким образом, лежат на одной прямой.

Если точки a , b , c служат проекциями на стороны треугольника некоторой точки, лежащей на описанной окружности (упр. 72), то то же самое имеет место и для точек a' , b' , c' .

225. Сторона OAB некоторого угла неподвижна, как и точки A и B , взятые на этой стороне, в то время как сторона $OA'B'$ вращается вокруг вершины O вместе с точками A' и B' , взятыми на этой стороне на постоянном расстоянии от O . Найти геометрическое место точек пересечения прямых AA' и BB' .

226. Даны угол и три точки A , B , C , лежащие на одной прямой. Произвольная прямая, проведённая через A , пересекает стороны угла в точках M и N . Найти геометрическое место точек пересечения прямых BM и CN .

227. Три прямые, выходящие из вершин треугольника ABC и проходящие через одну точку, пересекают противоположные стороны в точках a , b , c . Строим точки a' , b' , c' , симметричные с этими точками относительно середин сторон, на которых они лежат. Доказать, что прямые Aa' , Bb' , Cc' также проходят через одну точку.

228. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, проходят через одну точку (доказать).

229. Пусть $A'B'C'$ — треугольник, полученный из треугольника ABC путём проведения (как в п. 53) через каждую его вершину прямой, параллельной противоположной стороне; a , b , c — точки, взятые соответственно на сторонах BC , CA , AB .

Если прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку, то прямые $A'a$, $B'b$, $C'c$ также проходят через одну точку (доказать).

230. Если прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку и на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC взяты точки, гармонически сопряжённые с точками a , b , c относительно вершин треугольника, то эти гармонически сопряжённые точки лежат на одной прямой (доказать).

Применить к биссектрисам Aa , Bb , Cc треугольника.

231. Если прямые Aa , Bb , Cc , где точки a , b , c лежат соответственно на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC , проходят через одну точку и окружность abc пересекает стороны второй раз в точках a' , b' , c' , то прямые Aa' , Bb' , Cc' также проходят через одну точку (доказать).

ГЛАВА III.

СЛОЖНОЕ ОТНОШЕНИЕ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЁРКИ ПРЯМЫХ.

199. Определение. Пусть A , B , C , D — четыре точки, лежащие на одной прямой. *Сложным* (или ангармоническим) *отношением* этих четырёх точек, которое обозначается символом $(ABCD)$, называется частное от деления отношения расстояний точки C до точек A и B на отношение расстояний точки D до тех же точек, а именно:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Это выражение может быть также записано в виде: $\frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA}$; следовательно, это есть частное двух из тех произведений, которые можно составить из отрезков, соединяющих попарно данные точки и не имеющих общих концов.

Сложное отношение зависит от того порядка, в котором мы расположим четыре точки; однако без труда можно убедиться, что оно не меняется, если переставить между собою две из точек, лишь бы только одновременно были переставлены и две другие.

Если точка D удаляется в бесконечность, то отношение $\frac{DA}{DB}$ стремится к 1. Следовательно, сложное отношение точек A , B , C и ∞ ¹⁾ равно $\frac{CA}{CB}$.

Если данные четыре точки гармонические, то отношения $\frac{CA}{CB}$ и $\frac{DA}{DB}$ равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки и сложное отношение равно — 1. Очевидно, что и, обратно, последнее условие влечёт за собой первое.

200. Основная теорема. Четыре прямые, проходящие через одну точку, пересекают любую секущую в четырёх точках, сложное отношение которых не зависит от положения секущей.

¹⁾ Знак ∞ обозначает, как и в алгебре, бесконечность.

Пусть OAA' , OBB' , OCC' , ODD' (черт. 189) — четыре прямые. Если эти четыре прямые пересечены двумя секущими $ABCD$ и $A'B'C'D'$, то я утверждаю, что

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

Чтобы это доказать, проводим через точки B и B' прямые Bcd и $B'c'd'$, параллельные OA ; при этом пусть первая прямая пересечёт OC в точке c и OD в точке d , а вторая пересечёт OC в точке c' и OD в точке d' .

Имеем:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{cB} \text{ и } \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{dB},$$

откуда почленным делением получаем

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{dB}{cB}.$$

Также получаем

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{d'B'}{c'B'}.$$

Искомое соотношение, таким образом, доказано, так как отноше-

ния $\frac{dB}{cB}$ и $\frac{d'B'}{c'B'}$, очевидно, равны, потому что секущие Bcd и $B'c'd'$ параллельны.

Постоянное сложное отношение, определяемое точками пересечения четырёх лучей с произвольной секущей, называется *сложным отношением* четырёх лучей.

Операция, которая состоит в переходе от точек A, B, C, D к точкам A', B', C', D' , принадлежит к категории операций, называемых *перспективой*, или *центральной проекцией*¹⁾.

Длина отрезка, например отрезка AB , изменяется при этой операции; отношения отрезков также изменяются, но мы видим, что сложное отношение не изменяется при произвольном проектировании; это свойство выражают в следующих словах: *сложное отношение проективно*.

201. В частности, если точки C и D гармонически делят отрезок AB , то, соединив четыре точки A, B, C, D с какой-либо одной и той же точкой O , мы получим четвёрку лучей, которая в пересечении с любой прямой даёт четыре гармонические точки

Такая четвёрка называется *гармонической четвёркой*; два луча OC и OD называются *гармонически сопряжёнными* относительно лучей OA и OB , и наоборот.

¹⁾ Эти операции будут нами определены в геометрии пространства.

Теорема. *Чтобы четвёрка лучей была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы на какой-либо прямой, параллельной одному из лучей четвёрки, три других её луча отсекали два равных отрезка.*

Действительно, из чертежа 189 мы видим, что сложное отношение $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ равно отношению $\frac{dD}{cB}$, которое может быть равно — 1 в том и только в том случае, если точка B есть середина отрезка cd .

Следствия: 1. Две прямые OM_1 и OM_2 (черт. 167, п. 157), которые служат геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух прямых D и D' имеет данное значение, образуют вместе с последними гармоническую четвёрку.

Действительно, на чертеже 167 отрезок M_1M_2 разделён на две равные части прямою D .

Обратно, если два луча OC и OD гармонически сопряжены относительно двух других OA и OB , то отношение расстояний какой-либо точки прямой OC до прямых OA и OB равно отношению расстояний какой-либо точки прямой OD до тех же прямых¹⁾.

II. Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми, определяют вместе с ними гармонический пучок (п. 115).

Обратно, если в гармонической четвёрке лучей два сопряжённых луча образуют прямой угол, то они являются биссектрисами углов между двумя другими лучами.

Действительно, если прямые OA , OB , OC и OD образуют гармоническую четвёрку, то отрезок Bcd , параллельный лучу OA , делится на две равные части в точке B . Следовательно, если OA и OB взаимно перпендикулярны, то луч OB есть перпендикуляр в середине отрезка cd и делит угол cOd пополам.

202. Теорема. *Каждая диагональ полного четырёхсторонника делится гармонически двумя другими его диагоналями.*

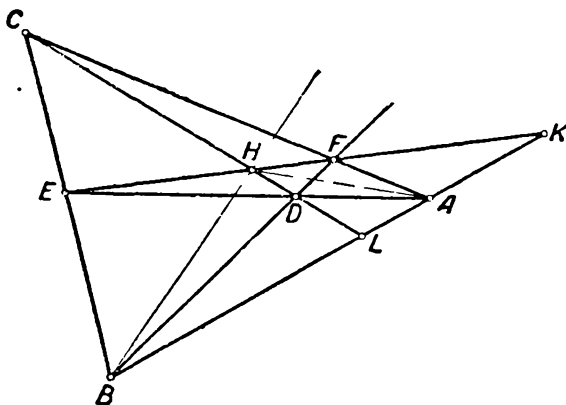
В полном четырёхстороннике $ABCDEF$ (черт. 190) диагонали CD и EF пересекаются в точке H ; пусть K — точка, гармонически сопряжённая с точкой H относительно отрезка EF . Прямые AE , AF , AH , AK образуют гармоническую четвёрку, а следовательно, точка L , в которой прямая AK пересекает диагональ CD , гармонически сопряжена с точкой H относительно отрезка CD . Но прямые BE , BF , BH , BK также образуют гармоническую четвёрку, и точка L' , в которой BK пересекает CD ; также гармонически сопряжена с точкой H относительно отрезка CD ; следовательно, она совпадает с точкой L , а прямая KL — с прямой AB .

203. Если через некоторую точку, лежащую в плоскости данного угла, провести произвольную секущую, то геометрическим местом точек, гармонически сопряжённых с этой точкой относительно точек

¹⁾ Это заключение должно быть видоизменено, если принять во внимание знаки отрезков (выбрав положительные направления на прямых, перпендикулярных к OA , и на прямых, перпендикулярных к OB): при этом оба отношения будут иметь различные знаки.

пересечения секущей со сторонами угла, будет, очевидно, прямая линия: а именно, этим геометрическим местом будет служить прямая, гармонически сопряжённая относительно сторон данного угла с прямой, соединяющей вершину угла с данной точкой.

Эта прямая называется *полярной* точки относительно угла.



Черт. 190.

Теорема. Если через точку A , взятую в плоскости угла CBD (черт. 190), провести секущие ADE и AFC и соединить попарно точки пересечения C и D , E и F этих секущих со сторонами угла, то геометрическое место точек H , в которых пересекаются прямые CD и EF , есть полярная точка A относительно угла.

Действительно, прямые BC , BD , BA , BH образуют гармоническую четвёрку, так как они делят гармонически отрезок EF .

Эта теорема даёт весьма простой способ построения полярной точки относительно угла.

УПРАЖНЕНИЯ.

232. Если две четвёрки прямых, проходящих соответственно через точки O и O' , имеют одно и то же сложное отношение и соответственно общий луч (прямую OO'), то точки пересечения других соответственных лучей лежат на одной прямой (доказать).

233. Если на двух прямых OX и OY , пересекающихся в точке O , взять на одной три точки A , B , C и на другой три точки A' , B' , C' так, чтобы сложные отношения $(OABC)$ и $(OA'B'C')$ были равны, то прямые AA' , BB' , CC' проходят через одну и ту же точку (доказать).

234. Найти необходимое и достаточное условие возможности построения параллелограмма, стороны и диагонали которого были бы соответственно параллельны четырём данным прямым.

235. Даны: прямая XU и две точки A и B вне этой прямой. Соединим произвольную точку M плоскости с точками A и B . Пусть P и Q — точки пересечения прямых MA и MB с прямой XU . Найти геометрическое место точки пересечения M' прямых PB и QA , если точка M описывает данную прямую.

Рассмотреть случай, когда прямые AP и BQ , вместо того чтобы пересекаться в какой-либо точке M , лежащей на данной прямой, параллельны.

236. Если через две точки, делящие гармонически диаметр окружности, провести перпендикуляры к этому диаметру, то эти прямые пересекаются с любой касательной в двух точках, отношение расстояний которых до центра есть величина постоянная (доказать).

ГЛАВА IV.

ПОЛЮСЫ И ПОЛЯРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ.

204. Теорема. Если через точку a , взятую в плоскости круга, провести произвольную секущую, пересекающую окружность в точках M и N , то геометрическое место точек P , гармонически сопряжённых с точкой a относительно точек M и N , есть прямая линия (черт. 191).

Действительно, середина I отрезка aP удовлетворяет (п. 189) равенству

$$Ia^2 = IM \cdot IN.$$

Эта точка I принадлежит, таким образом, определённой прямой — радикальной оси данной окружности и точки a (п. 136, примечание 1°).

Точка P опишет прямую, гомотетичную этой прямой относительно точки a , причём коэффициент подобия равен 2.

Обратно, какая-либо точка P прямой, таким образом определённой, принадлежит рассматриваемому геометрическому месту, если луч aP пересекает окружность (что всегда имеет место, если точка a лежит внутри окружности).

Эта прямая — геометрическое место точек P — называется *полярной* точки a относительно окружности, а точка a — *полюсом* этой прямой.

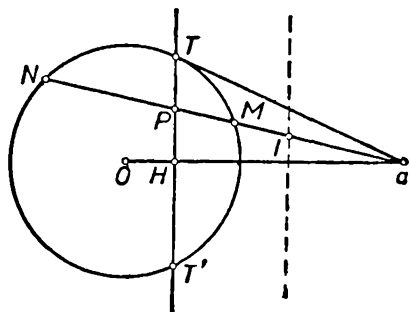
Следствие. Поляра точки a перпендикулярна к прямой, соединяющей эту точку с центром O окружности, и пересекает эту прямую в некоторой точке H , которая лежит по ту же сторону от центра, как и точка a , и определяется равенством

$$Oa \cdot OH = R^2, \quad (5)$$

где R — радиус окружности.

Действительно, это равенство показывает, что точки a и H делят гармонически диаметр, лежащий на прямой Oa .

Из отрезков Oa и OH один больше, а другой меньше радиуса, так как радиус является их средним пропорциональным; следовательно, полярная пересекает окружность или не пересекает её, смотря по тому, лежит ли полюс вне или внутри окружности.



Черт. 191.

Если точка a лежит вне окружности, то полярной этой точки служит хорда, соединяющая точки прикосновения касательных, проходящих через эту точку.

Действительно, рассуждения, которыми мы пользовались для обоснования существования поляры, остаются верными, если секущая aMN на чертеже 191 обращается в касательную, причём обе точки M и N совпадут с точкой прикосновения T этой касательной. Точка P будет в этом случае совпадать с точкой T , и поляра должна проходить через эту точку.

Если точка a лежит на окружности, то определение поляры как геометрического места точек, собственно говоря, теряет свой смысл¹⁾; но мы можем найти эту прямую с помощью доказанного выше следствия: точка H в данном случае совпадает с точкой a , и полярной является касательная в этой точке.

Отрезок OH , определённый равенством (5), бесконечно велик только в том случае, когда точка a совпадает с точкой O ; только в этом случае соответствующее построение невозможно. Впрочем, *a priori* очевидно, что поляра удаляется при этом в бесконечность, так как точка O есть середина всех хорд, проходящих через эту точку.

То же самое равенство позволяет, обратно, найти полюс, если известна поляра. Проводим из центра перпендикуляр OH к данной поляре и откладываем на прямой OH отрезок Oa , определяемый равенством (5). *Это невозможно сделать, только если OH равно нулю, т. е. если данная прямая есть один из диаметров окружности: при этом полюс удаляется в бесконечность в направлении, перпендикулярном к диаметру.*

205. Наиболее важным является следующее свойство поляры.

Теорема. *Если точка a лежит на поляре точки b , то, обратно, последняя лежит на поляре точки a .*

Точки a и b называются в этом случае *сопряжёнными* относительно окружности. Их поляры, т. е. две прямые, каждая из которых проходит через полюс другой, точно также называются *сопряжёнными*.

Так как точка a (черт. 192) лежит на поляре точки b , то её проекция на Ob есть такая точка K , что $OK \cdot Ob = R^2$. Пусть точка H — проекция точки b на Oa ; тогда четырёхугольник $aHbK$ можно вписать в окружность (а именно в окружность, построенную на отрезке ab как на диаметре), и мы имеем:

$$OH \cdot Oa = OK \cdot Ob = R^2.$$

Следовательно, прямая Hb — поляра точки a .

¹⁾ Одна из точек пересечения M и N всё время совпадает с точкой a , и, следовательно, точка P также, вообще говоря, совпадает с точкой a ; однако, если секущая обращается в касательную, то обе точки M и N совпадают с точкой a , и положение точки P на этой касательной неопределено.

Примечание. Теорема очевидна, если прямая ab пересекает окружность, так как в этом случае условие и заключение выражают одно и то же, а именно, что окружность делит отрезок ab гармонически.

206. Предыдущая теорема позволяет переходить от свойств некоторой фигуры (F) к свойствам другой фигуры (F'), которую мы сейчас определим и которая называется фигурой *взаимно-полярной* (или *коррелятивной*) данной

Пусть F — фигура, состоящая из любого числа точек и прямых ¹⁾. Каждой точке a этой фигуры поставим в соответствие прямую A , а именно — полярю точки a относительно некоторой окружности, выбранной раз навсегда и называемой *направляющей окружностью*. Каждой прямой B фигуры (F) поставим в соответствие точку b , а именно — полюс этой прямой относительно направляющей окружности. Прямые A и точки b образуют фигуру (F'), взаимно-полярную фигуре (F).

В силу предыдущей теоремы будем иметь следующее предложение:

Если прямая B фигуры (F) проходит через точку a , то соответствующая точка b фигуры (F') лежит на прямой A , соответствующей точке a .

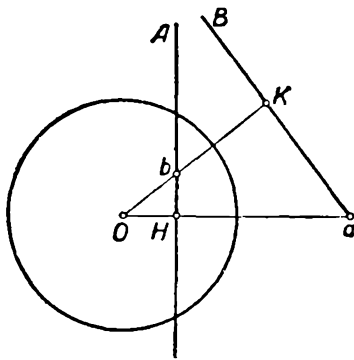
Следовательно, *если прямая фигуры (F) вращается около неподвижной точки, то соответствующая точка фигуры (F') описывает прямую линию, и обратно.*

Или иначе, *если три прямые линии фигуры (F) проходят через одну точку, то соответствующие им точки фигуры (F') лежат на одной прямой, и обратно.*

207. Предположим, например, что фигура (F) есть фигура п. 195 (черт. 186), образованная такими двумя треугольниками abc и $a'b'c'$, что прямые aa' , bb' , cc' проходят через одну точку o . Поляры A , B , C , A' , B' , C' точек a , b , c , a' , b' , c' образуют два новых треугольника. Прямые aa' , bb' , cc' соответствуют точки пересечения сторон A , A' ; B , B' ; C , C' ; так как первые три прямые проходят через одну точку, то последние три точки лежат на одной прямой.

Обратно, каждую пару треугольников, стороны которых соответствуют друг другу так, что точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой, можно рассматривать как фигуру, взаимно-полярную паре треугольников, аналогичных треугольникам abc и $a'b'c'$.

¹⁾ Определение взаимно-полярных фигур распространяется с помощью, соображений, которые мы будем рассматривать в геометрии пространства и на фигуры, содержащие кривые линии.

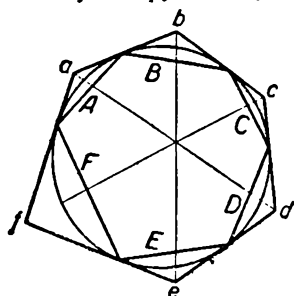


Черт. 192.

Мы доказали (п. 195), что точки пересечения соответственных сторон треугольников abc , $a'b'c'$ лежат на одной прямой; следовательно, прямые, которые соответствуют этим точкам, т. е. прямые, которые соединяют соответственные вершины треугольников, образованных прямыми A, B, C ; A', B', C' , пересекаются в одной точке. Другими словами, *теорема, обратная теореме, доказанной в п. 195, верна.*

208. Предположим теперь, что фигура (F) — шестиугольник, вписанный в окружность; пусть A, B, C, D, E, F (черт. 193) — стороны этого шестиугольника.

Примем окружность, описанную около шестиугольника, за направляющую окружность; полюсы вершин шестиугольника будут касательными в этих точках и будут попарно пересекаться в точках a, b, c, d, e, f — полюсах сторон A, B, C, D, E, F . Эти последние точки будут вершинами шестиугольника, описанного около окружности. Обратно, всякий шестиугольник, описанный около окружности, можно рассматривать как взаимно-полярный некоторому вписанному шестиугольнику.



Черт. 193.

Но мы доказали, что во вписанном шестиугольнике точки пересечения A, D ; B, E ; C, F лежат на одной прямой (п. 196). Таким образом, мы имеем теорему Брианшона:

Во всяком шестиугольнике $abcdef$, описанном около окружности, диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

Точно так же предельный случай, относящийся к вписанному треугольнику (п. 196, примечание), даёт:

Во всяком треугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие каждую вершину с точкой касания противоположной стороны, пересекаются в одной точке.

209. Мы знаем, что соответствует в фигуре (F') трём лежащим на одной прямой точкам или трём пересекающимся в одной точке прямым фигуры (F); эти свойства (т. е. свойство трёх точек лежать на одной прямой и свойство трёх прямых проходить через одну точку) называются *дескриптивными* в отличие от тех, в которых фигурируют значения тех или других величин и которые называются *метрическими*. Мы рассмотрим теперь законы преобразования некоторых из последних.

Прежде всего, *если две прямые линии фигуры F параллельны, то их полюсы лежат на одной прямой с центром O направляющей окружности* (на диаметре, перпендикулярном к направлению параллельных прямых), *и обратно.*

Например, мы могли бы, таким образом, легко доказать теорему п. 195, рассмотрев фигуру, взаимно-полярную данной относительно направляющей окружности с центром в точке o (черт. 186).

Точкам $a, a'; b, b'; c, c'$ соответствовали бы прямые, попарно параллельные, и, следовательно, образующие два гомотетичных треугольника, так что прямые, соединяющие соответственные вершины двух последних треугольников, пересекались бы в одной точке; отсюда, возвращаясь к первоначальной фигуре, мы получили бы требуемое заключение.

Вообще угол между двумя прямыми равен углу, под которым отрезок, соединяющий их полюсы, виден из центра O направляющей окружности (или углу, ему пополюсительному), так как эти два угла имеют соответственно перпендикулярные стороны (черт. 192).

Преобразуем, например, теорему о высотах треугольника (п. 53). Вершинам a, b, c какого-либо треугольника соответствуют стороны A, B, C нового треугольника. Высота, опущенная из точки a , даёт в новой фигуре точку, лежащую, с одной стороны, на прямой A и, с другой стороны, на прямой, проходящей через центр направляющей окружности O и перпендикулярной к прямой, которая проходит через точку O и соответствующую вершину (точку пересечения сторон B и C) нового треугольника.

Так как три высоты треугольника abc пересекаются в одной и той же точке, мы имеем¹⁾ следующее предложение:

Если через какую-либо точку O , лежащую в плоскости треугольника, провести прямые, перпендикулярные к прямым, которые соединяют эту точку с тремя вершинами, то проведённые прямые пересекают соответствующие стороны в трёх точках, лежащих на одной прямой.

210. Сложное отношение четырёх прямых D_1, D_2, D_3, D_4 , пересекающихся в точке a , равно сложному отношению их полюсов d_1, d_2, d_3, d_4 , так как четвёрки прямых (Od_1, Od_2, Od_3, Od_4) и (D_1, D_2, D_3, D_4) , где O — центр направляющей окружности, равны: они получаются одна из другой, если переместить первую параллельно самой себе из точки O в точку a и повернуть её затем на прямой угол около этой точки. Следовательно, обе четвёрки имеют одно и то же сложное отношение.

В частности, эта теорема позволяет преобразовать отношение постоянный точки d_3 до точек d_1 и d_2 . В самом деле, достаточно предположить, что точка d_4 находится в бесконечности. Прямая D_4 проходит при этом через точку O ; итак, отношение $\frac{d_3 d_1}{d_3 d_2}$ равно сложному отношению прямых D_1, D_2, D_3, aO .

211. Теорема. Если через точку a , взятую в плоскости данной окружности, провести к окружности две секущие aMN и $aM'N'$ (черт. 194) и соединить попарно точки пересечения M, N, M', N' этих секущих с окружностью, то полученные прямые пе-

¹⁾ Как и в предыдущих примерах, доказательство не будет полным, если мы не убедимся, что надлежащим выбором точек a, b, c можно достичь произвольного расположения точки O и прямых A, B, C .

ресекаются в двух точках H и K , геометрическое место которых есть полярная точки a , если секущие вращаются около этой точки.

Действительно, пусть H — точка пересечения прямых MM' и NN' , K — точка пересечения прямых MN' и NM' .

Прямая HK пересекает хорды MN и $M'N'$ в точках P и P' , гармонически сопряжённых с точкой a относительно концов этих хорд (п. 202). Следовательно, она будет полярной точки a .

Эта теорема даёт простой способ построения полярной точки относительно окружности. Если точка лежит вне окружности, то она позво-

ляет, следовательно, построить с помощью одной линейки касательные к окружности, выходящие из этой точки.

Если обе секущие сливаются в одну, то предыдущее геометрическое место обращается в геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в концах хорды MN . Но это геометрическое место мы уже знаем (п. 205), так как точка пересечения двух касательных есть полюс прямой MN .

212. Теорема. Если A ,

B, C, D — четыре точки одной

окружности, то сложное отношение четырёх прямых, полученных соединением этих точек с какой-либо точкой M окружности, не зависит от положения точки M на кривой.

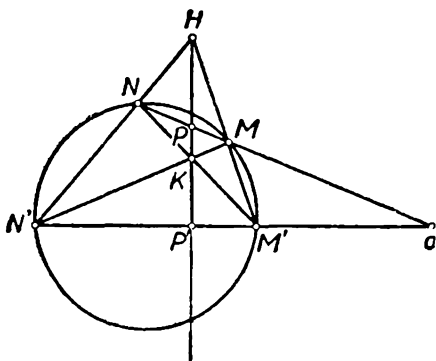
Действительно, если M и M' — две точки окружности, то две четвёрки (MA, MB, MC, MD) и $(M'A, M'B, M'C, M'D)$ равны, так как прямые, их составляющие, можно всегда рассматривать (п. 82) как образующие между собою одни и те же углы с одним и тем же направлением вращения.

Примечание. Ничто не мешает принять за точку M одну из данных точек, например A . Прямая MA заменяется при этом касательной в точке A и предыдущее рассуждение остаётся в силе.

Постоянное сложное отношение, о котором была речь, называется *сложным отношением четырёх точек* A, B, C, D , лежащих на окружности. Если оно равно -1 , то говорят, что четыре соответствующие точки, лежащие на окружности, — *гармонические*.

Следствие. Четыре данные касательные к одной окружности определяют на подвижной касательной к той же окружности четыре точки, имеющие постоянное сложное отношение.

Действительно, фигура, образованная четырьмя точками пересечения неподвижных касательных с перемещающейся касательной, имеет в качестве взаимно-полярной фигуры относительно данной окружности четвёрку лучей (MA, MB, MC, MD) предыдущей теоремы.



Черт. 194.

Сложным отношением четырёх касательных к одной окружности называется сложное отношение четырёх точек пересечения этих касательных с какой-либо подвижной касательной. Из нашего рассуждения следует, что сложное отношение четырёх касательных равно сложному отношению их точек касания.

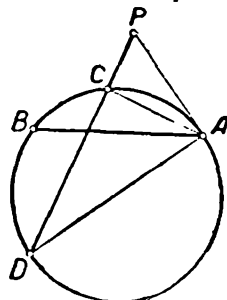
213. Теорема. Две хорды, сопряжённые относительно окружности, делят эту окружность гармонически.

Пусть AB и CD (черт. 195) — две такие хорды, что CD проходит через полюс P хорды AB . Прямые AP , AB , AC , AD образуют гармонический пучок, так как они делят гармонически секущую PCD .

Но сложное отношение этих прямых равно сложному отношению точек A , B , C , D окружности, так как прямая AP касается окружности в точке A .

Следствие. Четыре касательные, проведённые к окружности через две сопряжённые точки, делят любую касательную гармонически.

Теоремы, обратные двум последним теоремам, также справедливы. Их доказательство мы предоставляем читателю.



Черт. 195.

УПРАЖНЕНИЯ.

237. Две точки A и B сопряжены относительно окружности O . Доказать, что:

1) окружности, имеющие своими центрами точки A и B и ортогональные к окружности O , ортогональны между собою;

2) окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, пересекает ортогонально окружность O .

Найти зависимость, существующую между тремя сторонами треугольника OAB и радиусом R окружности.

238. Найти, пользуясь предыдущим упражнением, геометрическое место точек, поляры которых относительно трёх данных окружностей пересекаются в одной точке, и геометрическое место точек пересечения этих поляр.

239. Если провести в вершинах вписанного в окружность четырёхугольника касательные к этой окружности так, чтобы получился описанный четырёхугольник, то

1) диагонали обоих четырёхугольников проходят через одну и ту же точку и образуют гармоническую четвёрку;

2) третьи диагонали соответствующих полных четырёхсторонников лежат на одной и той же прямой и делят друг друга гармонически.

240. Через две точки прямой D проведены к окружности касательные. Таким образом, получается полный четырёхсторонник, одной из диагоналей которого служит сама прямая D . Доказать, что две другие диагонали проходят через полюс прямой D .

241. Даны две окружности O и O' и их предельные точки (упр. 152) P и Q ; доказать, что

1) поляркой каждой из предельных точек относительно той и другой окружности будет одна и та же прямая, проходящая через другую предельную точку;

2) не существует других точек (на конечном расстоянии), которые имели бы одну и ту же полярку относительно обеих окружностей;

3) перпендикуляр к линии центров, проведённый через точку пересечения внутренней общей касательной и внешней общей касательной, проходит через одну из точек P или Q (доказать, что этот перпендикуляр имеет один и тот же полюс относительно обеих окружностей);

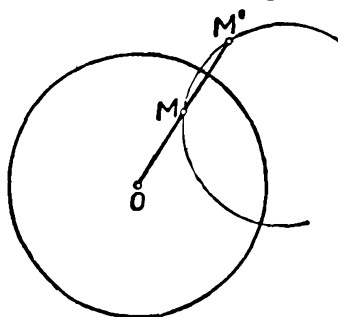
4) прямая, которая соединяет между собой точки касания одной из окружностей с внешней общей касательной и с внутренней общей касательной, проходит через одну из точек P или Q .

ГЛАВА V.

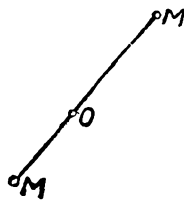
ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФИГУРЫ.

214. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выбраны точка O — полюс инверсии (черт 196 и 196а) и число k — степень инверсии, то точка M' прямой OM называется обратной (или преобразованной обратными радиусами-векторами) точке M при условии, что

$$OM \cdot OM' = k.$$



Черт. 196.



Черт. 196а.

Отрезок ¹⁾ OM' должен быть отложен в направлении OM (черт. 196) или в противоположном направлении (черт. 196а), в зависимости от того, будет ли число k положительным или отрицательным.

Непосредственно ясно, что:

1) любая точка плоскости имеет обратную точку, исключая полюс инверсии: точка, обратная полюсу, лежит в бесконечности;

2) если M' — точка, обратная точке M , то, обратно, последняя есть точка, обратная первой.

Фигура F' называется *фигурой, обратной* фигуре F , если она образована точками, обратными всем точкам фигуры F .

215. Теорема. Две фигуры, обратные одной и той же третьей фигуре F относительно одного и того же полюса O , гомотетичны.

Действительно, пусть M — точка фигуры F , M' и M_1' — точки, соответствующие ей в двух инверсиях с общим полюсом O и степе-

¹⁾ Отрезки OM и OM' называются *радиусами-векторами* точек M и M' .

ниями инверсии, соответственно равными k и k_1 . Из равенств $OM \cdot OM' = k$, $OM \cdot OM_1' = k_1$, разделив одно на другое, получим:

$$\frac{OM_1'}{OM'} = \frac{k_1}{k},$$

что и доказывает теорему.

Мы видим, что выбор степени инверсии не влияет на форму полученных фигур. Эта форма изменяется только при изменении полюса инверсии.

216. Если степень инверсии k положительна, то можно описать окружность с центром в полюсе и радиусом, равным \sqrt{k} (черт. 196). Эта окружность, задание которой, очевидно, достаточно для определения преобразования, называется *окружностью инверсии* (или *кругом инверсии*); она представляет собою геометрическое место точек, которые совпадают с точками, им обратными.

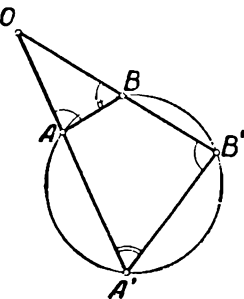
Две взаимно обратные точки сопряжены относительно окружности инверсии и лежат на прямой, проходящей через центр этой окружности.

Всякая окружность, проходящая через две взаимно обратные точки, пересекает окружность инверсии под прямым углом (п. 135). Обратно, если две точки M и M' таковы, что всякая окружность, проходящая через эти две точки, пересекает под прямым углом данную окружность, то эти точки взаимно обратны относительно последней.

Если две точки симметричны относительно прямой, то всякая окружность, проходящая через эти две точки, пересекает эту прямую под прямым углом, так как она является диаметром. Это позволяет нам рассматривать симметрию относительно прямой, как предельный случай инверсии, если окружность инверсии — прямая линия и полюс, следовательно, лежит в бесконечности¹⁾.

217. Две какие-либо точки A и B (черт. 197) и точки A' и B' , им обратные, лежат всегда на одной и той же окружности (п. 131а).

Отсюда следует (п. 82), что угол, образуемый хордой AB с радиусом-вектором OAA' , равен углу, образуемому хордой $A'B'$ с радиусом-вектором OBB' (черт. 197), но имеет противоположное направление.



Черт. 197.

¹⁾ Обратно, так как симметрия относительно прямой называется также *отражением* от этой прямой, то в более общем смысле и инверсия относительно окружности часто также называется *отражением*; взаимно обратные точки M и M' называются *симметричными* относительно окружности.

Это свойство позволяет найти направление хорды $A'B'$, если известны направления хорды AB и радиусов-векторов.

Это направление $A'B'$ называется *антипараллельным* направлению AB относительно угла AOB ; оно параллельно направлению, симметричному с AB относительно биссектрисы угла AOB , так как в этой симметрии прямой OA соответствует прямая OB и угол AOB преобразуется в равный ему угол, имеющий противоположное направление.

218. Задача. Зная расстояние между двумя точками A и B и их радиусы-векторы, найти расстояние между обратными им точками A' и B' .

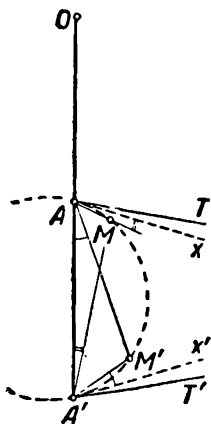
Подобные треугольники OAB и $OB'A'$ (черт. 197) дают:

$$\frac{A'B'}{OA'} = \frac{BA}{OB}.$$

Определив отсюда $A'B'$ и заменив OA' через $\frac{k}{OA}$, получим:

$$A'B' = BA \cdot \frac{k}{OA \cdot OB}.$$

Примечание. Предыдущее рассуждение не применимо в том случае, если точки A и B лежат на одной прямой с полюсом, но результат сохраняет силу и будет верным не только по величине, но и по знаку (если на их общем радиусе-векторе выбрано положительное направление). В этом можно убедиться, заменяя $A'B'$ и BA соответственно через $OB' - OA' = \frac{k}{OB} - \frac{k}{OA}$ и $OA - OB$.



Черт. 198.

219. Теорема. Касательные в соответственных точках двух взаимно обратных кривых образуют с общим радиусом-вектором точек касания углы, равные между собою, но имеющие противоположные направления.

Пусть A (черт. 198) — точка кривой C , A' — соответственная точка обратной кривой C' . Пусть M — точка кривой C , близкая к точке A , M' — точка, ей обратная. Проводим к окружности, проходящей через точки A, A', M, M' (п. 217), касательные AX и $A'X'$. Если точка M неограниченно приближается к точке A (и, следовательно, точка M' к точке A'), то углы $AA'M$ и $A'AM'$ стремятся к нулю, и то же самое будет с равными им углами MAX и $M'A'X'$.

Поэтому, если прямая AM стремится занять предельное положение AT , то и AX стремится к тому же предельному положению. Вследствие этого прямая $A'X'$ займёт предельное положение $A'T'$, образующее с радиусом-вектором OAA' угол такой же величины, как и прямая AT , но противоположного направления; наконец, так как

угол $M'A'X'$ стремится к нулю, то и прямая $A'M'$ тоже стремится к $A'T'$.

Следствие. *Касательные в соответственных точках двух взаимно обратных кривых симметричны относительно прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему точки касания, и проходящей через его середину.*

Примечание. Всё предыдущее, очевидно, остаётся справедливым, если инверсия обращается в симметрию относительно прямой.

Теорема. *Две кривые пересекаются под тем же углом, как и обратные (или симметричные) им кривые, если не учитывать направления углов.*

Действительно, угол, образованный касательными к двум кривым в их общей точке A , и угол, образованный касательными к обратным кривым в соответствующей точке A' , симметричны относительно перпендикуляра, восстановленного в середине отрезка AA' .

Следствие. *Если две кривые касаются, то то же самое имеет место для кривых, им обратных.*

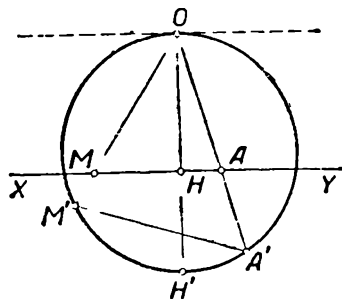
220. Теорема. *Фигура, обратная прямой линии, есть окружность, проходящая через полюс инверсии.*

Пусть XU (черт. 199) — данная прямая, для которой мы ищем обратную фигуру, и точка O — полюс инверсии. Возьмём какую-либо определённую точку A , обратная которой — точка A' . Пусть теперь M — произвольная точка прямой XU , и точка M' — точка, ей обратная. Угол между прямыми $M'A'$ и OM' равен углу между AM и OA , но противоположного направления; следовательно, этот угол остаётся постоянным, если точка M перемещается по прямой, и геометрическое место точек M' есть окружность, проходящая через точки O и A' , что и требовалось доказать.

В частности, мы можем принять за точку A точку H , проекцию точки O на прямую XU ; обозначим через H' точку, ей обратную. Угол $OM'H'$ будет в этом случае прямой, и мы видим, что касательная в точке O к окружности, обратной данной прямой, параллельна этой прямой, причём диаметр окружности равен $\frac{k}{\delta}$, где k — степень инверсии и δ — расстояние OH , полюса инверсии до прямой.

Примечание. Предыдущее рассуждение предполагает, что прямая не проходит через полюс инверсии; в противном случае она сама себе соответствует.

Следствие. *Фигура, обратная окружности, проходящей через полюс инверсии, есть прямая. Эта прямая перпендикулярна к диа-*

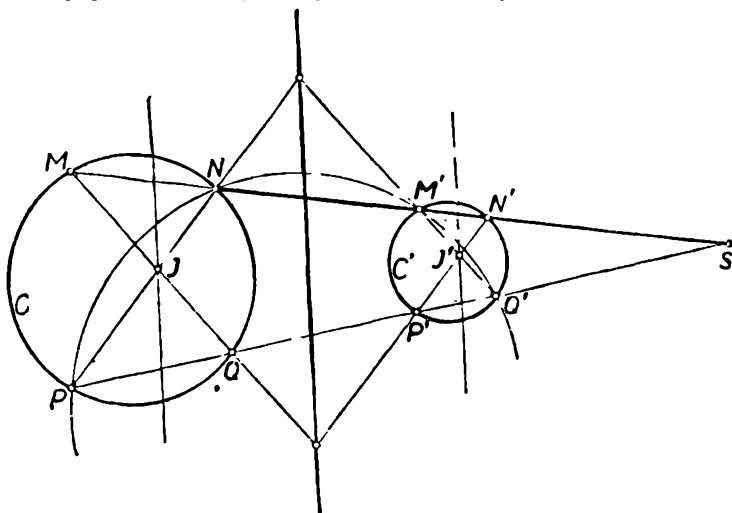


Черт. 199.

метру, проходящему через полюс инверсии, и проходит через точку, обратную той точке окружности, которая диаметрально противоположна полюсу.

221. Теорема. *Фигура, обратная окружности, не проходящей через полюс инверсии, есть также окружность.*

1°. Если степень инверсии k равна степени p полюса инверсии относительно данной окружности, то последняя сама себе соответствует, и точки пересечения её с какой-либо секущей, выходящей из полюса, будут, очевидно, попарно взаимно обратны.



Черт. 200.

2°. Если степень инверсии k произвольна (черт. 200), то обратной фигурой будет окружность, гомотетичная данной (п. 215); центром подобия будет полюс инверсии, а коэффициентом подобия — величина $\frac{k}{p}$.

222. Обратно, две произвольные окружности C и C' (черт. 200) можно рассматривать как взаимно обратные друг другу и притом двумя различными способами, поскольку их можно рассматривать как гомотетичные двумя различными способами. Полюс инверсии будет при этом центром подобия, а степень инверсии равна степени полюса относительно одной из данных окружностей, умноженной на соответственный коэффициент подобия.

Эти две инверсии — единственные, которые преобразуют данные две окружности одна в другую. Действительно, если эти окружности взаимно обратны относительно некоторого полюса S , то они гомотетичны относительно точки S , так как одна из них обратна самой себе относительно этого полюса.

223. Пусть некоторая секущая, выходящая из центра подобия S , пересекает окружность C в точках M и N и окружность C' — в точках M' и N' (черт. 200), так что точка M' есть точка, соответственная точке M , и точка N' — точке N , если рассматривать окружности как гомотетичные фигуры. При этом в силу предыдущего рассуждения взаимно обратными точками будут, с одной стороны, M и N' , с другой, — M' и N . Эти точки называются также *антигомологичными* точками.

Единственными точками, одновременно соответственными и антигомологичными, являются точки прикосновения общих касательных, выходящих из точки S .

Общие точки двух окружностей, если такие точки существуют, сами себе антигомологичны.

Хорда, *антигомологичная хорде* одной окружности, есть хорда другой окружности, соединяющая точки, соответственно антигомологичные концам первой хорды.

224. *Две пары антигомологичных точек лежат на одной окружности* (п. 217) и, следовательно, *две антигомологичные хорды пересекаются на радикальной оси* (п. 139).

Кроме того, *две антигомологичные хорды двух окружностей пересекают поляры центра подобия относительно обеих окружностей в двух соответственных точках*. Действительно, хорда $N'P'$, антигомологичная хорде MQ (черт. 200), будет соответственной хорде NP , которая пересекает хорду MQ в некоторой точке I , лежащей на поляре точки S относительно окружности C (п. 211), и соответственной ей точка I' есть точка пересечения хорды $N'P'$ с полярной точки S относительно окружности C' .

Эти два свойства позволяют построить хорду, антигомологичную данной хорде, не строя концов этих хорд.

Эти два свойства применимы, конечно, к касательным в антигомологичных точках, так как эти касательные представляют собою предельный случай указанных хорд.

Примечание. Если обе окружности сливаются в одну (случай 1°, п. 221), то хорды MQ и NP , соединяющие — одна какие-либо две точки, другая — точки, им обратные, пересекаются на поляре полюса инверсии S . Следовательно, с этой точки зрения *поляра точки S играет роль радикальной оси двух слившихся окружностей*, если их рассматривать как взаимно обратные относительно полюса S .

225. Если две окружности равны, то внешний центр подобия лежит в бесконечности и соответствующая гомотетия обращается в поступательное перемещение, а соответствующая инверсия — в симметрию; однако свойства антигомологичных точек остаются при этом теми же, что и в общем случае.

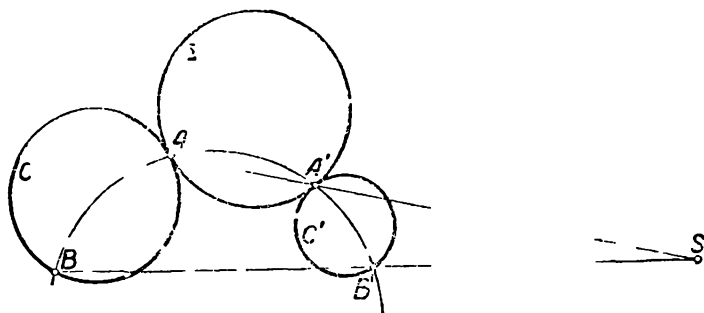
226. *Прямую и окружность можно рассматривать как две взаимно обратные фигуры и притом двумя различными способами.*

Полюсами инверсии (п. 220) будут концы диаметра, перпендикулярного к этой прямой. Свойства антигомологичных точек позволяют,

следовательно, рассматривать концы этого диаметра как центры подобия окружности и прямой. Одной из двух антигомологических хорд будет данная прямая; следовательно, и в этом случае можно сказать, что эти две хорды пересекаются на радикальной оси в силу п. 158 (построение 12, примечание).

Наконец, две прямые симметричны друг с другом двумя различными способами, причём осями симметрии служат биссектрисы углов, образованных этими прямыми. Антигомологичными хордами будут тогда эти самые прямые и они пересекаются в одной и той же точке.

227. Если даны две взаимно обратные окружности, то всякая окружность Σ , проходящая через две антигомологичные точки, обратно самой себе, так как степень полюса инверсии относительно этой окружности равна степени инверсии.



Черт. 201.

Эта окружность пересекает, следовательно, две данные окружности под одним и тем же углом, и если она касается одной окружности, то она касается и другой.

Обратно, всякая окружность Σ , которая пересекает две окружности C и C' (черт. 201) под одним и тем же углом, пересекает их в четырёх попарно антигомологических точках.

Действительно, пусть A и B , A' и B' — четыре точки пересечения, выбранные таким образом, что равные (по условию) углы, образуемые окружностями C и Σ в точке A , с одной стороны, и окружностями C' и Σ в точке A' , с другой стороны, имеют противоположное направление; то же самое относительно точек B и B' . Если точка S — точка пересечения AA' и BB' и k — степень этой точки относительно окружности Σ , то инверсия с полюсом S и степенью k не изменяет Σ ; она преобразует A в A' , B в B' ; следовательно, она преобразует окружность C в некоторую окружность, которая проходит через точки A' и B' и касается окружности C' в точке A' (по условию и в силу п. 219), т. е. в окружность, совпадающую с окружностью C' (п. 90, построение 13).

Это заключение остаётся в силе, когда окружность Σ касается окружностей C и C' . Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить предыдущее рассуждение, принимая за точку S — точку пересе-

чения прямых $1A'$ и BB' , где точки A и A' — точки касания, B и B' — соответственно вторые точки пересечения окружностей C и C' с какой-либо окружностью, проходящей через точки A и A' (черт. 201).

В последнем случае, впрочем, предыдущее положение вытекает из теоремы п. 144; действительно, точки касания служат центрами подобия: одна для окружностей Σ и C , другая для окружностей Σ и C' ; следовательно, они лежат на одной прямой с центром подобия S окружностей C и C' . Таким образом, мы убеждаемся, кроме того, что *S будет внешним центром подобия, если окружность Σ касается обеих окружностей одинаковым образом¹⁾, и внутренним в противном случае.*

Конечно, приведённые выше рассуждения остаются в силе, если одна из окружностей C или C' , или они обе, или окружность Σ заменяются прямыми линиями.

227а. Если бы окружность Σ пересекала окружности C и C' под прямым углом, то можно было бы произвольно рассматривать точки пересечения как попарно антигомологичные друг другу, так как прямые углы можно всегда рассматривать как равные и имеющие противоположное направление (если в случае надобности заменить одну из сторон её продолжением). Итак, окружность, которая пересекает окружности C и C' под прямым углом, соответствует сама себе как в одной, так и в другой инверсии, преобразующей окружность C в окружность C' .

228. Если инверсия, которая имеет полюсом точку S и преобразует окружности C и C' одну в другую, имеет окружность инверсии, то эта окружность инверсии Γ пересекает окружность Σ под прямым углом, так как степень точки S относительно Σ равна степени инверсии.

Это свойство соответствует свойству биссектрис углов между двумя прямыми. Действительно, эти последние образуют геометрическое место центров окружностей, касающихся двух прямых; это сводится к тому, что какая-либо одна из этих окружностей пересекает ту или другую из биссектрис под прямым углом. Здесь мы убеждаемся, что любая окружность Σ , касательная к окружности C и к окружности C' , или, общёе, любая окружность Σ , которая пересекает окружности C и C' под одним и тем же углом, пересекает под прямым углом окружность Γ или аналогичную окружность, имеющую своим центром второй центр подобия (если эти окружности существуют).

Окружность Γ существует всегда, если окружности C и C' пересекаются: в этом случае она проходит через точки их пересечения.

В общем случае, если она существует, она имеет с окружностями C и C' одну и ту же радикальную ось, так как эти три окружности имеют (см. предыдущий пункт) один и тот же ряд ортогональных окружностей.

¹⁾ Т. е. обеих окружностей внутренним образом или обеих внешним образом.

УПРАЖНЕНИЯ.

242. Если две точки взаимно обратны относительно окружности, то их расстояния до какой-либо точки этой окружности находятся в постоянном отношении (доказать).

243. Показать, что в том случае, когда данная окружность пересекает данную прямую в некоторой точке I , можно привести упражнение 68 к упражнению 65, пользуясь инверсией с полюсом в точке I .

244. Через общую точку A двух окружностей проведены две секущие AMM' и ANN' , которые пересекают первую окружность в точках M и N и вторую — в точках M' и N' . Окружности AMN' и ANM' пересекаются в точке A и в некоторой второй точке; найти геометрическое место этой второй точки при условии, что обе секущие принимают независимо друг от друга всевозможные положения, вращаясь около точки A .

245. Окружности, обратные окружностям, имеющим общую радикальную ось, имеют также общую радикальную ось (доказать).

246. Преобразовать путём инверсии определение окружности (п. 7). Таким образом, получается теорема п. 116.

247. Построена окружность, обратная данной окружности относительно данного полюса инверсии. Найти точку, обратную центру новой окружности.

248. Преобразовать две данные окружности (не имеющие общей точки) в две concentric окружности путём одной и той же инверсии.

249. Даны три точки на одной прямой; найти на той же прямой четвёртую точку — такую, что инверсия относительно этой точки преобразует три данные точки в три точки, одна из которых делит пополам отрезок, образованный двумя другими.

250. Две фигуры преобразованы одна в другую с помощью инверсии S . Обе эти фигуры подвергаются одной и той же инверсии T . Показать, что новые фигуры, таким образом полученные, — также фигуры взаимно обратные, и найти новый полюс инверсии. В частности, исследовать случай, когда степень инверсии S положительна (в этом случае новая окружность инверсии получается из окружности инверсии S с помощью инверсии T).

251. К данной фигуре A применяют инверсию S , которая преобразует её в фигуру B , затем применяют к последней инверсию S' , которая преобразует её в фигуру A' . Ограничимся случаем, когда степени инверсий S и S' положительны.

1°. Показать, что можно с помощью инверсии T , надлежащим образом выбранной, преобразовать фигуры A и A' или в две гомотетичные, или в две равные; при этом эти две возможности взаимно исключают друг друга¹⁾.

2°. Показать, что можно найти бесчисленным числом способов пару инверсий S_1 и S_1' , равносильных паре S и S' , т. е. таких, что инверсии S_1 и S_1' , выполненные одна после другой над фигурой A (подобно тому как раньше были выполнены инверсии S и S'), приводят к той же окончательной фигуре A' . В частности, всегда можно заменить две данные инверсии инверсией, которой предшествует или за которой следует симметрия, за исключением только одного случая (а именно, когда фигуры A и A' подобны).

3°. Выяснить, в каком случае фигуры, полученные из A и A' с помощью инверсии T , определённой в 1°, получаются одна из другой путём поступательного перемещения.

4°. Выяснить, что произойдёт, если выполнить несколько раз подряд последовательно операции S и S' (т. е. если преобразовать фигуру A' с

¹⁾ За исключением случая, указанного в 3°, который можно рассматривать как предельный случай для обеих возможностей, так как поступательное перемещение можно рассматривать как предельный случай гомотетии.

помощью инверсии S в фигуру B' , последнюю с помощью инверсии S' в фигуру A'' , эту с помощью инверсии S в фигуру B'' , затем преобразовать последнюю с помощью S' в A''' и т. д.). Может ли случиться, что в конечном счёте получится снова первоначальная фигура A ?

252. Выполнены последовательно (как в предыдущем упражнении) некоторые инверсии S_1, S_2, S_3 и т. д. Показать (ограничиваясь случаем, когда степени инверсий положительны), что эту последовательность операций можно заменить одной инверсией, которой предшествует или за которой следует одна, две или три симметрии, если только первоначальная и окончательная фигуры не будут подобными (упр. 251, 2° и упр. 95).

253. Предположим, что число инверсий S_1, S_2, S_3, \dots (предыдущее упражнение) — число нечётное. Найти точку, которая возвращается в первоначальное положение с помощью этих операций, выполненных в последовательном порядке.

253а. Вписать в круг многоугольник, стороны которого проходят соответственно через данные точки или параллельны данным прямым.

254. На данной касательной к некоторой окружности откладывают от точки касания T два переменных отрезка TM и TN , произведение которых, однако, постоянно. Пусть T' — точка данной окружности, диаметрально противоположная точке T .

1°. Показать, что если соединить между собой точки пересечения прямых TM и $T'N$ с данной окружностью, то полученная, таким образом, прямая проходит через определённую неподвижную точку.

2°. Решить ту же задачу для прямой, которая соединяет между собой точки прикосновения вторых касательных, проведённых к данной окружности через точки M и N (приводится к предыдущему).

3°. Найти геометрическое место точек пересечения этих вторых касательных.

255. Через точку O , взятую в плоскости некоторой окружности, проведена секущая, которая пересекает окружность в точках M и N . Окружности, диаметрами которых служат соответственно отрезки OM и ON , пересекают второй раз данную окружность в точках M' и N' . Найти геометрическое место точек пересечения прямых MN и $M'N'$, если секущая вращается около точки O .

256. Все окружности, пересекающие две данные окружности A и B под данными углами, образуют два таких семейства, что какая-либо окружность C , имеющая с A и B общую радикальную ось, пересекает все окружности одного и того же семейства под одним и тем же углом (доказать).

257. На данных двух отрезках AB и CD одной и той же прямой построены дуги, вмещающие один и тот же угол. Если изменяется этот угол, найти:

1) геометрическое место середин общих хорд тех окружностей, к которым принадлежат эти дуги;

2) геометрическое место точек пересечения тех же окружностей, иначе говоря, геометрическое место точек, из которых отрезки прямой AB и CD видны под равными углами или под дополнительными углами.

ГЛАВА VI.

ЗАДАЧИ О КАСАНИИ ОКРУЖНОСТЕЙ.

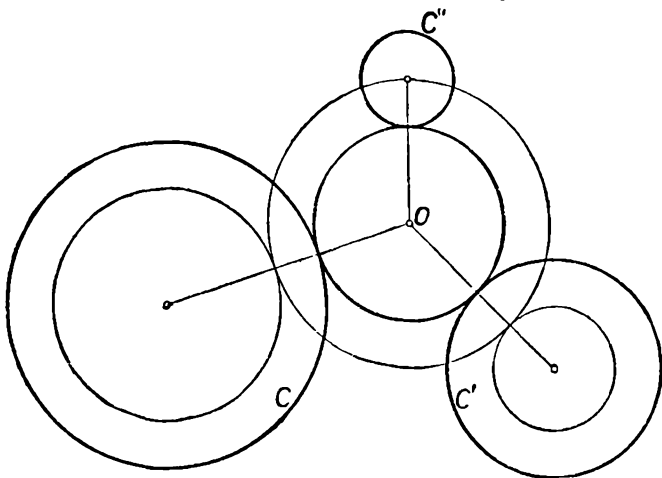
229. Задача. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой или данной окружности.

Мы уже решили эту задачу (п. 159). Однако инверсия позволяет дать другое решение. Действительно, если мы преобразуем фигуру

с помощью обратных радиусов-векторов, приняв за полюс одну из данных точек, то искомая окружность преобразуется в прямую, которая должна пройти через известную точку (обратную второй из данных точек) и касаться известной окружности (обратной данной окружности).

230. Задача. Построить окружность, которая проходит через данную точку и касается двух данных прямых (или окружностей).

Способ первый. Искомая окружность сама себе соответствует в одной из двух инверсий (или симметрий), которые преобразуют данные линии одну в другую. Таким образом, известна, кроме данной точки, вторая точка искомой окружности, а именно та, в которую преобразуется данная точка с помощью рассматриваемой инверсии или симметрии, и задача сводится к предыдущей. Здесь возможны четыре решения, так как предыдущая задача имеет два решения.



Черт. 202.

Способ второй. Возьмём фигуру, обратную рассматриваемой фигуре, принимая за полюс данную точку. Мы приходим тогда к задаче об общих касательных к двум окружностям.

231. Задача. Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

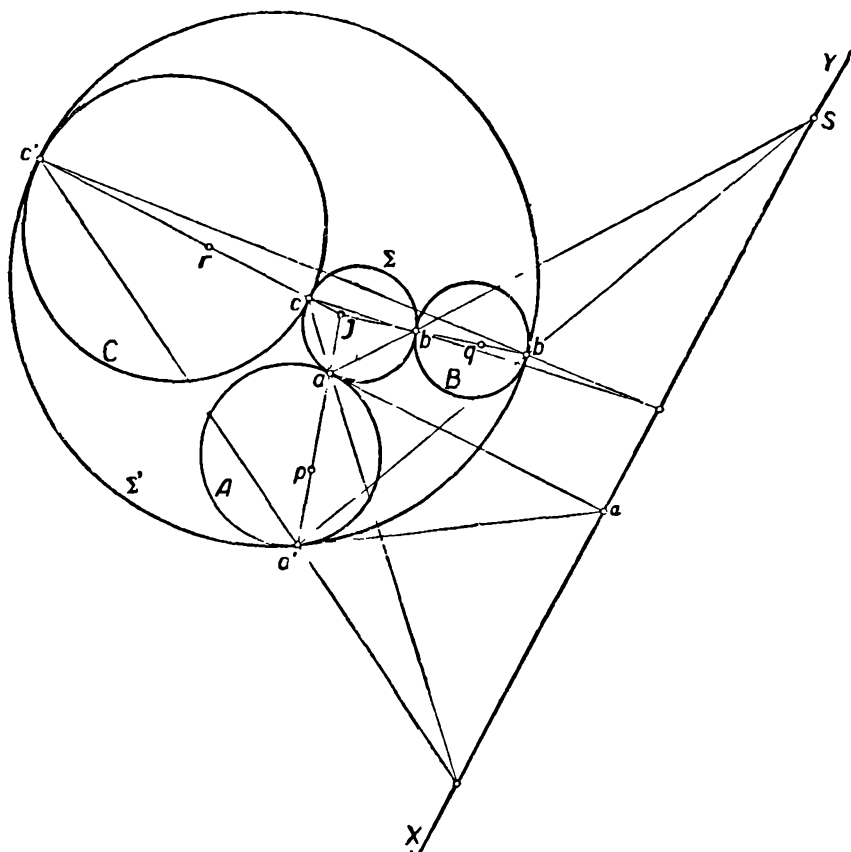
Эта задача сводится к предыдущей. Действительно, пусть C , C' , C'' (черт. 202) — данные окружности, радиусы которых соответственно равны r , r' , r'' , и O — искомая окружность радиуса R , которая касается всех трёх данных окружностей, предположим, внешним образом. Окружность радиуса $R + r''$ с центром в точке O пройдёт через центр окружности C'' и будет касательной к окружностям, которые concentричны окружностям C и C' , причём радиусы этих новых окружностей соответственно равны разностям радиусов r и r'' , r и r'' .

Совершенно так же можно рассмотреть случай, когда не все данные окружности имеют внешнее касание с окружностью O ; при этом

придётся только заменить некоторые из разностей радиусов суммами тех же радиусов, и обратно.

232. Рассмотрим решение той же задачи способом, совершенно отличным от предыдущего (метод Жергонна).

Пусть A, B, C — данные окружности. Найдём сперва окружность Σ (черт. 203), которая касается в точках a, b, c данных окружностей



Черт. 203.

одинаковым образом, т. е. либо всех трёх внешним образом. либо всех трёх внутренним образом.

Если такая окружность существует, то необходимо существует ещё вторая такая же окружность Σ' . Действительно, радикальный центр I данных трёх окружностей имеет одну и ту же степень относительно этих трёх окружностей: если принять эту степень за степень инверсии и точку I за полюс инверсии, то инверсия не изменит данные окружности и преобразует окружность Σ в некоторую окружность Σ' , кото-

рая будет касаться окружностей A, B, C в точках a', b', c' , обратных точкам a, b, c . Окружность Σ' будет касаться всех окружностей одинаковым образом; при этом характер касания окружностей Σ и Σ' с данными окружностями будет одним и тем же, если точка I служит внешним центром подобия окружностей Σ и Σ' , и не будет одним и тем же, если точка I служит внутренним центром подобия окружностей Σ и Σ' .

Докажем, что радикальная ось XU двух искоемых окружностей является внешнею осью подобия (п. 145) трёх данных окружностей. Для этого проведём прямые ab и $a'b'$; пусть они пересекутся в точке S . Точка S лежит на радикальной оси окружностей Σ и Σ' , так как точки a и a' , b и b' попарно взаимно обратны относительно точки I (п. 224). Но точка S есть внешний центр подобия данных окружностей A и B (п. 227). Так же убеждаемся, что радикальная ось XU проходит через другие два внешних центра подобия данных окружностей.

Доказав это, проводим общие касательные в точках касания a и a' окружности A с окружностями Σ и Σ' . Точка a , в которой пересекаются эти касательные, лежит на прямой XU , так как точки a и a' взаимно обратны относительно точки I . Эта точка a служит полюсом aa' относительно окружности A .

Следовательно, хорда aa' проходит через точку p , которая служит полюсом относительно окружности A внешней оси подобия XU .

Таким образом, мы пришли к следующему построению: *Находим радикальный центр I и внешнюю ось подобия XU данных окружностей. Соединяем точку I с полюсами p, q, r прямой XU относительно данных окружностей. Прямые, построенные таким образом, соответственно пересекают данные окружности в искоемых точках касания a и a' , b и b' , c и c' .*

233. Остается показать, что это построение действительно даёт окружности, удовлетворяющие требуемым условиям.

Для этого мы покажем, что точки a, b, c, a', b', c' , полученные указанным построением, являются попарно антигомологичными точками данных окружностей. Действительно, найдём хорду окружности B , антигомологичную хорде aa' окружности A . Эта хорда определяется (п. 224) следующими двумя условиями: 1) обе хорды пересекаются на радикальной оси двух окружностей A и B ; 2) обе хорды пересекают полюсы точки S относительно соответствующих окружностей в двух соответственных точках. С другой стороны: 1) точка пересечения I прямых aa' и bb' принадлежит радикальной оси окружностей A и B ; 2) точки p и q , полюсы прямой XU относительно окружностей A и B , лежат на полярах точки S относительно этих окружностей, и эти точки — соответственные точки, так как в гомотетии, имеющей своим центром точку S и преобразующей окружность A в окружность B , прямая XU сама себе соответствует, и, следовательно, её полюсы соответствуют друг другу. Следовательно, хордой, антигомологичной хорде aa' , является хорда bb' . Так же будут антигомологичными хорды cc' и aa' в окружностях C и A и хорды cc' и bb' в окружностях C и B .

Мы обозначим через b и c две точки, антигомологичные точке a (этим самым ещё не доказано, что эти две точки антигомологичны друг другу); при этом точки b' и c' будут точками, антигомологичными точке a' . Через точки a, b, c проводим окружность Σ , и через точки a', b', c' — окружность Σ' .

Эти две окружности взаимно обратны относительно точки I , так как точки $a, a'; b, b'; c, c'$ попарно взаимно обратны относительно точки I ; таким образом, окружностью, обратной окружности abc , будет окружность $a'b'c'$.

Радикальной осью этих окружностей является прямая XU , так как эта радикальная ось, с одной стороны, должна пройти через точки пересечения прямых ab и $a'b'$, с другой стороны, через точки пересечения прямых ac и $a'c'$.

Пусть теперь a_1 — точка пересечения касательных в точках a и a' к окружности A . Эта точка лежит на прямой XU , так как прямая aa' проходит через точку p ; она также лежит на перпендикуляре, проведённом через середину отрезка aa' .

Но точка a_1 , в которой пересекаются касательные, проведённые в точках a и a' соответственно к окружностям Σ и Σ' , также лежит на прямой XU , так как эта прямая является радикальной осью окружностей Σ и Σ' ; следовательно, она лежит также на перпендикуляре в середине отрезка aa' , так как касательные aa и aa' , проведённые соответственно к окружностям Σ и Σ' , равны. Итак, точки a и a_1 совпадают, а окружности Σ и Σ' касаются окружности A в точках a и a' . Следовательно, они касаются также окружностей B и C в точках b и b' , c и c' (п. 227).

234. Мы отыскивали окружность Σ , касающуюся окружностей A, B и C одинаковым образом. Окружности, которые касаются окружностей A, B и C не одинаковым образом, можно найти, заменяя в предыдущих рассуждениях внешнюю ось подобия последовательно каждой из внутренних осей подобия.

Так как существуют четыре оси подобия, то задача о касании окружностей может иметь восемь решений. Однако все или часть этих решений могут не существовать: это имеет место, если, например, прямая Ip не пересекает окружности A . Мы видим, что если степень точки I относительно трёх данных окружностей отрицательна и точка I , следовательно, лежит внутри всех окружностей, то существуют все восемь решений. Все восемь решений существуют также, если данные окружности являются внешними относительно друг друга, как в этом легко убедиться, исследуя решение задачи методом, указанным в п. 231.

235. Решение Жергонна применимо также, если одну или две из данных окружностей заменить точками или прямыми, как в этом можно убедиться, повторяя при этих новых условиях рассуждения п. 232. Однако построение применимо только к отысканию точек касания искомых окружностей с окружностями. В частности, это построение не приводит ни к какому результату, если заменить все данные окружности точками или прямыми.

236. Метод, предложенный Жергонном, неприменим в отдельных частных случаях. Действительно, если центры данных окружностей лежат на одной прямой, то радикальный центр и три полюса каждой оси подобия лежат в бесконечности в направлении, перпендикулярном к данной прямой. Можно избежать этого частного расположения, подвергнув фигуру инверсии.

Обратно, три окружности вообще могут быть преобразованы одной и той же инверсией в три окружности, центры которых лежат на одной прямой. Для этого достаточно, чтобы общая степень радикального центра относительно данных окружностей была положительна и чтобы, следовательно, существовала окружность, которая пересекала бы все три окружности под прямым углом. Если принять за полюс инверсии какую-либо точку этой окружности, то данные окружности преобразуются в три другие окружности, которые пересекаются с одной и той же прямой под прямым углом, т. е. центры которых лежат на этой прямой.

Следовательно, затруднение, которое мы отметили, исчезло бы, если бы мы сумели сделать так, чтобы в предыдущее решение входили только свойства, не изменяющиеся при инверсии, как-то: касание двух окружностей, угол между двумя окружностями и т. д. Решение Жергонна, действительно, можно видоизменить в этом направлении¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ.

258. Провести через две точки окружность, которая пересекает данную окружность под данным углом.

259. Построить окружность, ортогональную к двум данным окружностям и касающуюся третьей данной окружности.

Более общая задача: построить окружность, ортогональную к двум данным окружностям и пересекающую третью данную окружность под данным углом.

260. Через точки A и B проведены две окружности, касающиеся одной и той же окружности C , и третья окружность, которая пересекает C под прямым углом. Показать, что эта последняя окружность делит на две равные части угол между двумя первыми и что её центр есть один из центров подобия.

261. Через точку A проведены две окружности, касающиеся (одинаковым образом) двух данных окружностей, и третья, которая пересекает эти окружности ортогонально. Показать, что эта последняя окружность проходит через вторую точку B , общую двум первым окружностям, и обладает свойствами, указанными в предыдущем упражнении.

262. Через точку A проведены две окружности, касающиеся двух данных окружностей (как в предыдущем упражнении). Пусть P и Q — точки их касания с первой данной окружностью, точки P' и Q' — их точки касания со второй.

1°. Окружности APQ и $AP'Q'$ касаются друг друга; они пересекают третью окружность, о которой говорится в предыдущем упражнении, ортогонально (доказать).

2°. Окружности APQ и BPQ (где B , как и в предыдущем упражнении, — вторая общая точка окружностей APP' и AQQ') взаимно обратны относи-

¹⁾ См. Прибавление C в конце книги.

тельно первой данной окружности; окружности $AP'Q'$ и $BP'Q'$ взаимно обратны относительно второй окружности (доказать).

3°. Как изменятся эти предложения, если заменить данные окружности прямыми линиями? Показать, что в этом случае четыре окружности APQ , $AP'Q'$, BPQ и $BP'Q'$ равны между собою.

263. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых; для этого построить произвольную окружность C , касающуюся обеих прямых, и принять во внимание, что искомая окружность должна быть гомотетична окружности C относительно точки пересечения P данных прямых.

264. Построить аналогичным способом (упр. 263) окружность, касающуюся двух прямых и данной окружности. (Прямая, которая соединяет точку P с точкой касания, пересекает окружность C и данную окружность под одним и тем же углом.)

265. Решить ту же задачу при условии, что прямые заменены двумя концентрическими окружностями.

266. Две окружности, касающиеся друг друга, касаются каждая двух данных окружностей. Найти геометрическое место точек, в которых они касаются друг друга (первый способ п. 230 даёт условие, при котором общие точки двух окружностей, касающихся каждая двух данных окружностей, могут сливаться в одну).

267. Центры восьми окружностей, касающихся трёх данных окружностей, лежат попарно на перпендикулярах, проведённых из радикального центра к четырём осям подобия (доказать).

268. Через точку, лежащую внутри угла, провести секущую, образующую со сторонами этого угла (не продолженными за вершину) треугольник, имеющий наименьший периметр. (Использовать косвенный метод упр. 174 и упр. 90.)

ГЛАВА VII.

СВОЙСТВА ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА. ИНВЕРСОР ПОСЕЛЬЕ.

237. Теорема Птоломея. Произведение диагоналей вписанного в круг четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

Пусть $ABCD$ (черт. 204) — вписанный в круг четырёхугольник. Преобразуем его путём инверсии, приняв точку A за полюс. Окружность $ABCD$ преобразуется в прямую, которая проходит через точки B' , C' , D' , обратные точкам B , C , D . Если точка C — вершина данного четырёхугольника, противоположная вершине A , то точки B и D , а, следовательно, и точки B' и D' лежат по разные стороны прямой AC ; таким образом, точка C' лежит между точками B' и D' , а потому (по абсолютной величине)

$$B'D' = B'C' + C'D'.$$

Но если k — степень инверсии, то имеем (п. 218):

$$B'D' = DB \cdot \frac{k}{AB \cdot AD},$$

$$B'C' = CB \cdot \frac{k}{AB \cdot AC},$$

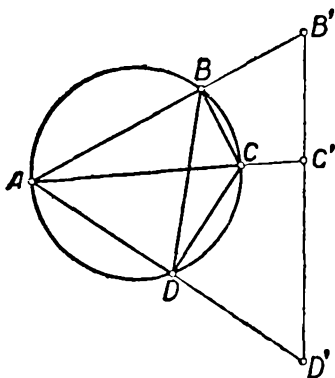
$$C'D' = DC \cdot \frac{k}{AC \cdot AD}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, умножая на $AB \cdot AC \cdot AD$ и деля на k , получим:

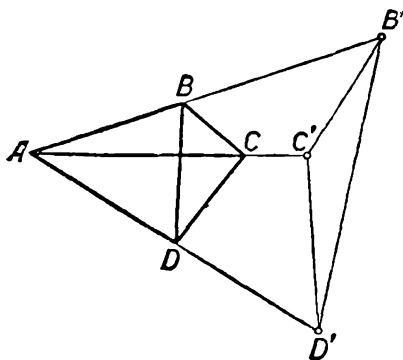
$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

237а. Предыдущее свойство характерно для вписанного четырёхугольника. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. В четырёхугольнике, который не может быть вписан в круг, произведение диагоналей меньше суммы произведений противоположных его сторон (и больше их разности).



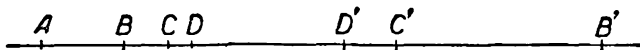
Черт. 204.



Черт. 205.

Пусть $ABCD$ (черт. 205) — четырёхугольник, который не может быть вписан в круг. Если мы повторим для этого четырёхугольника предыдущее построение, то точки B' , C' , D' не будут лежать на одной прямой и образуют треугольник.

Но найденные в предыдущем пункте значения для $B'D'$, $B'C'$, $C'D'$ пропорциональны произведениям $BD \cdot AC$, $BC \cdot AD$, $CD \cdot AB$; таким образом, каждое из этих произведений меньше суммы двух остальных:



Черт. 206.

238. Равенство, выражаемое теоремой Птолемея, также справедливо и доказывается таким же образом, если четыре точки A, B, C, D , вместо того чтобы лежать на одной окружности, лежат на одной прямой и следуют друг за другом в порядке: A, B, C, D (черт. 206). Итак, если четыре точки лежат на одной прямой, то произведение отрезков, которые частично заходят друг на друга, равно сумме произведений отрезков, которые расположены один вне другого.

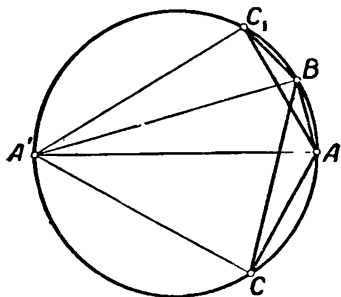
Принимая во внимание знаки, имеем, каков бы ни был порядок четырёх точек на одной прямой, соотношение:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

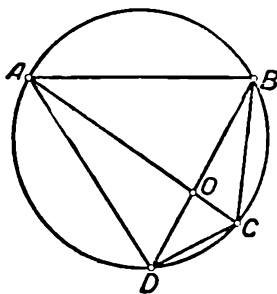
Это можно доказать, повторяя рассуждения п. 237; в самом деле соотношения, которыми мы пользовались при доказательстве, верны, как по абсолютной величине, так и по знаку (п. 218, примечание).

239. Задача. Зная хорды двух дуг круга радиуса R , найти хорду дуги, равной сумме этих дуг или их разности.

Эту задачу нам пришлось решать в п. 174, чтобы вычислить стороны различных правильных пятнадцатиугольников.



Черт. 207.



Черт. 208.

1°. Пусть дуги AB и AC отложены в противоположных направлениях, так что дуга BAC служит их суммой (черт. 207). Проводим диаметр AA' ; получим:

$$AA' = 2R; A'B = \sqrt{4R^2 - AB^2}; A'C = \sqrt{4R^2 - AC^2}.$$

Но вписанный четырёхугольник $ABA'C$ даёт:

$$BC \cdot AA' = AB \cdot A'C + AC \cdot A'B;$$

в этом равенстве всё известно, кроме BC , а потому

$$BC = \frac{AB \cdot \sqrt{4R^2 - AC^2} + AC \cdot \sqrt{4R^2 - AB^2}}{2R}.$$

2°. Пусть дуги AB и AC_1 отложены в одном и том же направлении, так что дуга BC_1 является их разностью (черт. 207). В данном случае вписанный четырёхугольник ABC_1A' даёт:

$$A'B \cdot AC_1 = AB \cdot A'C_1 + AA' \cdot BC_1,$$

откуда получаем:

$$BC_1 = \frac{A'B \cdot AC_1 - AB \cdot A'C_1}{AA'} = \frac{AC_1 \sqrt{4R^2 - AB^2} - AB \sqrt{4R^2 - AC_1^2}}{2R}.$$

240. Теорема. Диагонали вписанного в круг четырёхугольника относятся между собою как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей.

Пусть $ABCD$ (черт. 208) — вписанный четырёхугольник, диагонали которого пересекаются в точке O .

Треугольники OAD и OBC подобны (п. 131) и дают:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC},$$

что можно записать так

$$\frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OB}{AB \cdot BC}; \quad \frac{OC}{BC \cdot CD} = \frac{OD}{AD \cdot CD}.$$

Точно так же подобные треугольники OAB и ODC дают:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \text{ или } \frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OD}{AD \cdot CD}.$$

Это показывает, что четыре отношения:

$$\frac{OA}{AB \cdot AD}, \quad \frac{OB}{AB \cdot BC}, \quad \frac{OC}{BC \cdot CD}, \quad \frac{OD}{AD \cdot CD}$$

равны.

Составляя отношение суммы предыдущих членов первого и третьего отношений к сумме их последующих и поступая так же со вторым и четвёртым отношениями, получаем:

$$\frac{AC}{AB \cdot AD + BC \cdot CD} = \frac{BD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}.$$

Другое доказательство. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ — четыре стороны четырёхугольника. Если изменять всевозможными способами порядок сторон, то получим ещё четырёхугольники, вписанные в тот же круг, так как сумма дуг, которым соответствуют хорды a , b , c , d , каждый раз составляет полную окружность.

Ясно, что за первую сторону можно всегда принять сторону a , так что имеем следующие перестановки:

$$\begin{array}{ll} abcd, & adcb, \\ acdb, & abdc, \\ adbc, & acbd. \end{array}$$

Но две перестановки, стоящие в одной строке, дают тот же четырёхугольник: например, в четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 209) порядок сторон будет a , b , c , d , если читать их в порядке, указанном стрелкой, и a , d , c , b , если читать в обратном направлении. Таким образом, остаются три сочетания: $abcd$, $acdb$, $adbc$, которым соответствуют три четырёхугольника $ABCD$, $ABEF$, $ABGH$. Дуги BF и AC равны как суммы равных дуг; точно так же равны дуги BH и AE , дуги BD и AG ; три четырёхугольника имеют только три различные диагонали: $AC = BF = x$, $BD = AG = y$, $AE = BH = z$; применяя теорему Птолемея к четырёхугольникам $ABEF$ и $ABGH$, имеем $xz = ad + bc$;

$yz = ab + cd$; отсюда, разделив одно равенство на другое, получаем искомое отношение.

240а. Задача. Вычислить диагонали x и y вписанного четырёхугольника, стороны которого равны a, b, c, d .

Известно произведение диагоналей:

$$xy = ac + bd$$

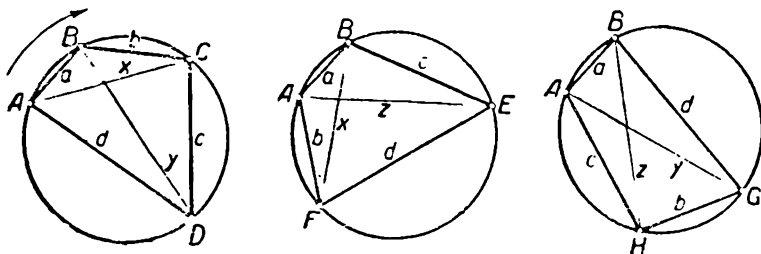
и их отношение:

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Перемножая почленно эти два равенства, имеем:

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

и аналогично получаем y^2 .



Черт. 209.

Задача. Зная стороны a, b, c, d вписанного четырёхугольника, вычислить радиус описанного круга.

В треугольнике ABD (черт. 209, первый) радиус R описанного круга определяется (пп. 130, 130а) по формуле

$$R^2 = \frac{a^2 d^2 \cdot BD^2}{[(a + d)^2 - BD^2] [BD^2 - (a - d)^2]}.$$

Заменяя BD найденным значением, получим:

$$\begin{aligned} (a + d)^2 - BD^2 &= \frac{(a + d)^2 (ad + bc) - (ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} = \\ &= \frac{ad [(a + d)^2 - (b - c)^2]}{ad + bc} = \frac{ad (a + d + b - c) (a + d + c - b)}{ad + bc}, \\ BD^2 - (a - d)^2 &= \frac{ad (b + c + a - d) (b + c + d - a)}{ad + bc}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{(b + c + d - a)(c + d + a - b)(d + b + a - c)(b + a + c - d)};$$

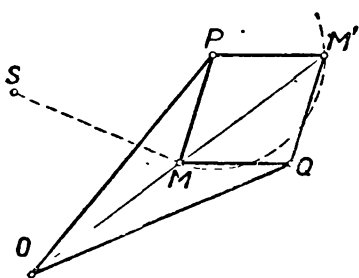
это выражение не зависит от порядка сторон в соответствии с замечаниями, сделанными выше (п. 240).

Обозначая через p полупериметр ($2p = a + b + c + d$), можно записать это выражение ещё так:

$$R^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

241. Инверсор Поселье. Теорема. Пусть $MPM'Q$ — ромб: O — точка, для которой $OP = OQ$ (черт. 210). Предположим, что ромб шарнирный (п. 46а) и что (равные) длины OP и OQ постоянны, а точка O остаётся неподвижной. Если соблюдаются эти условия, то точки M и M' описывают две взаимно обратные фигуры.

Действительно, точки M, M', O , находящиеся на равных расстояниях от точек P и Q , лежат прежде всего на одной прямой — на перпендикуляре к отрезку PQ , проходящем через его середину. Опишем теперь, приняв точку P за центр, окружность, которая пройдёт через точки M и M' . Произведение $OM \cdot OM'$ будет равно степени точки O относительно этой окружности, т. е. равно $OP^2 - PM^2$; следовательно, оно постоянно. Таким образом теорема доказана.



Черт. 210.

Эта теорема позволяет решить вопрос, который представляет собой

некоторый теоретический, если не практический, интерес.

Из самого определения инструмента, служащего для проведения окружностей — циркуля, следует, что этот прибор будет точным, если оба острия останутся на постоянном расстоянии друг от друга, т. е. если имеется достаточное трение в его головке.

В противоположность этому *линейка* будет точной только в том случае, если её край — прямая линия: это осуществляется только приблизительно с большей или меньшей точностью, в зависимости от тщательности её изготовления.

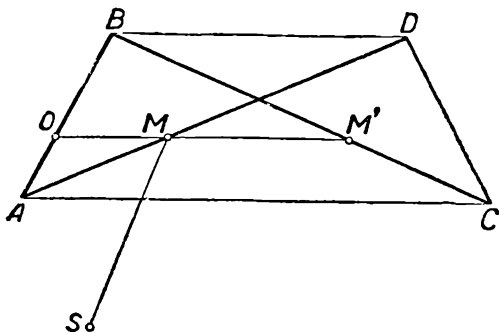
Возможно ли построить прямую линию, не имея в своём распоряжении такой линейки и опираясь лишь на свойства неизменяемых¹⁾ фигур? Это-то построение и позволяет осуществить следующий прибор, принадлежащий Поселье. В самом деле, предположим, что OP, OQ, PM, PM', QM, QM' — шесть твёрдых стержней²⁾, соединённых друг с другом с помощью шарниров, и что точка O неподвижна. При этом точки M и M' необходимо будут взаимно обратны относительно точки O . Заставим точку M описывать окружность, соединив её седьмым твёрдым стержнем с неподвижной точкой S (черт. 210). Если эта окруж-

¹⁾ Причём неизменяемыми фигурами (в смысле, указанном в п. 3) будут отдельные части описываемого далее инструмента. *Прим. ред. перевода.*

²⁾ Мы изобразили на чертеже 210 стержни OP, OQ и т. д. прямыми линиями; однако вовсе не обязательно, чтобы они были прямолинейными. Требуется только, чтобы, например, точки P и Q так или иначе оставались на постоянном расстоянии одна от другой.

ность проходит через точку O (т. е. если $SM=SO$), то точка M' описывает прямую линию (п. 220).

241а. Инверсор Гарта. Теорема. Пусть $ABCD$ (черт. 211) — антипараллелограмм (п. 46а, примечание 2^о), образованный непараллельными сторонами и диагоналями равнобедренной трапеции: O , M , M' — точки, в которых стороны AB , AD , BC пересекаются с одной и той же прямой, параллельной основаниям трапеции. Если этот антипараллелограмм — шарнирный, причём общая длина a сторон AB и CD и также общая длина b сторон BC и AD остаются постоянными, и точки O , M , M' неизменно связаны с этими сторонами (т. е. длины AO , AM , BM' также остаются постоянными по величине и по знаку); если, наконец, точка O неподвижна, то точки M



Черт. 211.

и M' описывают фигуры, взаимно обратные относительно точки O .

Мы знаем (п. 46а), что данный четырёхугольник останется антипараллелограмом.

С другой стороны, прямые OM и OM' , параллельные по условию основаниям трапеции в первоначальном положении фигуры, будут всё время оставаться им параллельными. Действительно, параллельность этих прямых выражается соответственно следующими пропорциями:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AO}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{BM'}{BC} = \frac{BO}{AB};$$

эти пропорции останутся неизменными по условию.

В частности, мы видим, что точки O , M , M' остаются на одной прямой.

Доказав это, предположим предварительно, что не только точка O , но и вся сторона AB неподвижна. Точки M и M' опишут окружности соответственно с центрами A и B и радиусами AM и $BM' = MD$.

Так как отношение этих радиусов равно отношению OA к OB , то точка O будет центром подобия обеих окружностей. Поскольку радиусы обеих окружностей, проведённые в точки M и M' , не параллельны между собой, эти две точки (п. 223) антигомологичны и, следовательно, взаимно обратны. Таким образом, произведение $OM \cdot OM'$ остаётся постоянным, если деформировать антипараллелограмм, сохраняя неподвижными точки A и B .

Так как это произведение не изменяется также при вращении всей фигуры около точки O , то теорема доказана.

Следствие. Если соединить точку M с некоторой неподвижной точкой S твёрдым стержнем, длина которого равна SO , то точка M' опишет прямую линию.

Примечание. Произведение оснований AC и BD трапеции остаётся постоянным при деформации в самом деле, основание BD

сохраняет постоянное отношение $\frac{1}{h} = \frac{AB}{4O}$ к отрезку OM , а основание

AC — постоянное отношение $\frac{1}{h'} = \frac{BA}{BO}$ к отрезку OM' .

УПРАЖНЕНИЯ.

269. Доказать теорему, обратную теореме, приведённой в упражнении 99: если в плоскости равностороннего треугольника ABC выбрана такая точка M , что $MA = MB + MC$, то эта точка лежит на описанном круге. В противном случае имеем: $MA < MB + MC$.

270. Если повторить доказательство пп. 237 и 237а, начав не с вершины A четырёхугольника $ABCD$, а с другой вершины, то получится другой треугольник, аналогичный треугольнику $B'C'D'$.

1°. Доказать, что все такие треугольники подобны.

2°. Вычислить углы какого-либо одного из этих треугольников, если известны углы, которые образуют между собою стороны и диагонали данного четырёхугольника.

3°. Доказать, что можно получить треугольники, подобные предыдущим, опуская из одной из вершин A, B, C, D перпендикуляры на стороны треугольника, образованного тремя другими, или иначе, соединяя точки B и D между собою и с третьей вершиной E треугольника AED , подобного треугольнику ABC и имеющего с ним одинаковое направление вращения, в котором стороной, соответствующей стороне AC , будет отрезок AD .

4°. Доказать, что форма предыдущих треугольников не изменится, за исключением направления вращения, если подвергнуть четыре точки A, B, C, D одной и той же произвольной инверсии, другими словами, доказать, что если повторить для преобразованных точек то же построение, как и для точек A, B, C, D , то получились бы треугольники, подобные первоначальным.

5°. Обратно, если два четырёхугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ таковы, что треугольники, образованные в каждом из них с помощью построений, указанных выше, между собою подобны, то существует (за исключением того случая, когда четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны) инверсия, которая преобразует точки A, B, C, D в другие четыре точки, образующие четырёхугольник, равный четырёхугольнику $A_1B_1C_1D_1$ (доказать). Определить эту инверсию.

270а. Найти инверсию, которая преобразует три данные точки в другие три точки, которые образуют треугольник, равный данному треугольнику.

271. Прибор Поселье также достигал бы своей цели, если бы шарнирный четырёхугольник $MPM'Q$ не был ромбом и имел бы попарно равные между собою стороны $MP = M'P$ и $MQ = M'Q$ и если, кроме того, $OP^2 - OQ^2 = MP^2 - MQ^2$ (доказать).

271а. В инверсоре Гарта вычислить степень получаемой инверсии, зная стороны a и b антипараллелограмма, а также отношения h и $h' = 1 - h$. Вычислить произведение оснований трапеции, зная a и b .

ЗАДАЧИ К ДОПОЛНЕНИЯМ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

272. Радикальная ось и центр подобия делят отрезок, соединяющий две какие-либо антигомологические точки, в постоянном сложном отношении (доказать).

273. Сложное отношение четырёх точек окружности равно сложному отношению точек, им обратных, лежащих на окружности (или прямой), обратной первой (доказать).

274. Сложное отношение четырёх точек окружности можно получить, разделив друг на друга произведения противоположных сторон четырёхугольника, образованного этими точками, или одно из этих произведений на произведение диагоналей (доказать).

275. Найти инверсии, преобразующие две данные окружности в две равные окружности.

Преобразовать три данные окружности в три равные окружности с помощью одной и той же инверсии.

276. Даны три окружности. Если провести для данных окружностей, взятых попарно, три окружности Γ (п. 228), т. е. три окружности, инверсии относительно которых преобразуют данные окружности, взятые попарно, одну в другую, выбрав эти три окружности так, чтобы их центры лежали на одной прямой, то эти три окружности имеют одну и ту же радикальную ось (доказать).

277. Найти геометрическое место полюсов инверсий, с помощью которых можно преобразовать две данные окружности в две другие так, что первая разделит вторую на две равные части, или вообще так, что первая из преобразованных окружностей отсекает на второй окружности дугу, соответствующую центральному углу данной величины.

278. Доказать, что отрезки, образованные двумя окружностями на некоторой прямой, видны из одной из их предельных точек (упр. 152) под углами, имеющими одну и ту же биссектрису (или взаимно перпендикулярные биссектрисы). Рассмотреть случай, когда прямая касается одной из окружностей.

279. Доказать теорему Паскаля (п. 196), построив три окружности, которые, взятые попарно, имеют своими центрами подобия точки пересечения противоположных сторон шестиугольника (каждая из этих окружностей проходит через две противоположные вершины).

280. Построить окружности, касающиеся трёх данных окружностей, используя упражнение 253.

281. Вокруг точки, лежащей в плоскости круга, вращается прямой угол; в точках, в которых стороны этого угла пересекают окружность, проведены к окружности касательные. Найти геометрическое место вершин образованного, таким образом, четырёхугольника (линия, обратная геометрическому месту, полученному в задаче 201).

282. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности o и вписан в окружность O . Пусть a, b, c, d — точки касания его четырёх сторон с окружностью o . Доказать, что:

1°. Точка P , в которой пересекаются диагонали четырёхугольника $ABCD$ и в то же время (упр. 239) четырёхугольника $abcd$, является предельной точкой окружностей o и O (упр. 241, 2°).

2°. Диагонали четырёхугольника $abcd$ служат биссектрисами углов, образованных диагоналями четырёхугольника $ABCD$ (задача 278).

3°. Окружность O совпадает с окружностью, которую мы получили бы в предыдущей задаче (задача 281), если бы мы исходили из окружности o и точки P .

4°. Заключить отсюда, что если даны две окружности, то в общем случае нельзя вписать в одну из них четырёхугольник, описанный около другой. Чтобы эта задача была возможна, необходимо, чтобы имело место определённое соотношение между расстояниями центров данных окруж-

ностей и их радиусами. Но если это соотношение выполнено, то существует бесконечное множество четырёхугольников, удовлетворяющих условию задачи.

283. Если треугольник тупоугольный, то существует окружность (и только одна), относительно которой каждая вершина этого треугольника является полюсом противоположащей стороны; центром этой окружности служит точка пересечения высот треугольника (доказать). Эта окружность и треугольник называются *сопряжёнными* друг с другом.

284. Чтобы существовал треугольник, вписанный в данную окружность и сопряжённый с другой данной окружностью, необходимо, чтобы квадрат радиуса второй окружности был равен половине степени её центра относительно первой окружности. Если это условие выполнено для двух пересекающихся окружностей, то существует не один, а бесконечное множество треугольников, обладающих одновременно обоими требуемыми свойствами (доказать, используя упр. 70).

285. Даны три окружности, которые попарно пересекаются; рассмотреть криволинейный треугольник, сторонами которого служат соответственно три дуги этих трёх окружностей, а вершинами — точки пересечения этих окружностей, взятых попарно, причём этот треугольник выбран так, что на его контуре не имеется других точек пересечения. Доказать, что сумма внутренних углов этого треугольника меньше или больше двух прямых ($2d$), в зависимости от того, существует или не существует окружность, пересекающая данные три окружности под прямым углом¹⁾.

286. Чтобы какой-либо четырёхугольник был вписанным, необходимо и достаточно, чтобы точки B' , C' , D' (п. 237), обратные трём вершинам B , C , D относительно четвёртой вершины A , лежали на одной прямой; из этого последнего условия можно вывести все свойства вписанного четырёхугольника. Вывести, в частности, теорему об отношении диагоналей (применение теоремы Стюарта, п. 127).

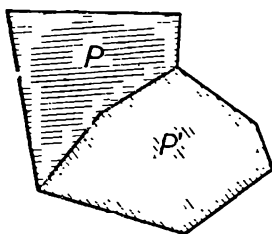
¹⁾ См. Прибавление А, п. 290.

ГЛАВА I.

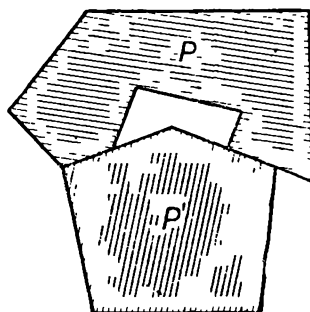
ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ.

242. Два многоугольника называются смежными, если они имеют одну или несколько общих сторон (черт. 212) или частей сторон (черт. 213), но не имеют ни одной общей внутренней точки.

Если в двух данных смежных многоугольниках P , P' не рассматривать их общих сторон, то образуется¹⁾ третий многоугольник P'' ,



Черт. 212.



Черт. 213.

который называется суммой первых двух. Внутренняя область этого многоугольника содержит все точки, расположенные внутри того или другого из двух первоначальных многоугольников, и только эти точки.

243. Определить площадь плоского многоугольника — значит поставить в соответствие каждому плоскому многоугольнику величину (её-то и называют *поверхностью* или *площадью* многоугольника), обладающую следующими свойствами:

1. Два равных многоугольника имеют одну и ту же площадь независимо от занимаемого ими положения в пространстве.

¹⁾ Мы отказываемся в четвёртой книге от ограничения, установленного в п. 21 (книга первая) относительно смысла слова „многоугольник“, так что часть плоскости, заштрихованная на чертеже 21, будет рассматриваться в этой книге как многоугольник. Впрочем, такой многоугольник можно получить как сумму двух смежных обыкновенных многоугольников, как это показано на чертеже 213.

Однако в этой главе рассматриваются лишь многоугольники в собственном смысле (п. 21).

II. Многоугольник P'' , представляющий собою сумму двух смежных многоугольников P и P' , имеет свою площадь сумму площадей многоугольников P и P' .

Мы допускаем, что возможно установить подобное соответствие¹⁾.

244. Площадь может быть определена бесчисленным множеством различных способов, потому что, если каждому плоскому многоугольнику поставлена в соответствие величина, обладающая свойствами I и II, то величина, ей пропорциональная, также будет обладать этими свойствами.

Для измерения площадей, которым мы будем сейчас заниматься, сначала нужно выбрать некоторый многоугольник, площадь которого будет принята за единицу площади; мерой какой-либо площади будет отношение этой площади к единице площади.

Мы условимся здесь и во всем дальнейшем считать за единицу площади площадь квадрата, имеющего своей стороной выбранную единицу длины. В дальнейших теоремах мы всегда будем предполагать это условие, не считая нужным включать его в формулировку каждой теоремы.

245. О двух многоугольниках, имеющих одну и ту же площадь, говорят, что они *равновелики*. Следовательно, два равных многоугольника равновелики. Конечно, обратное утверждение будет неверно; два многоугольника не будут обязательно равными, если они равновелики. Например, мы покажем, что можно построить квадрат, равновеликий любому заданному многоугольнику.

246. Основанием прямоугольника называется одна из его сторон. Длина стороны, перпендикулярной к первой, называется при этом *высотой* прямоугольника. Основание и высота прямоугольника называются его *измерениями*.

Основанием параллелограмма называют какую-либо его сторону; *высотой* будет при этом расстояние от этой стороны до противоположной стороны (измеренное, разумеется, по общему перпендикуляру к обеим сторонам).

Основаниями трапеции будут её параллельные стороны, а *высотой* трапеции — расстояние между параллельными сторонами.

Наконец, *основанием* треугольника называют какую-либо из его сторон; *высотой* — перпендикуляр, опущенный на эту сторону (или на её продолжение) из противолежащей вершины.

247. Теорема. Площади двух прямоугольников, имеющих равные основания, относятся между собою как их высоты.

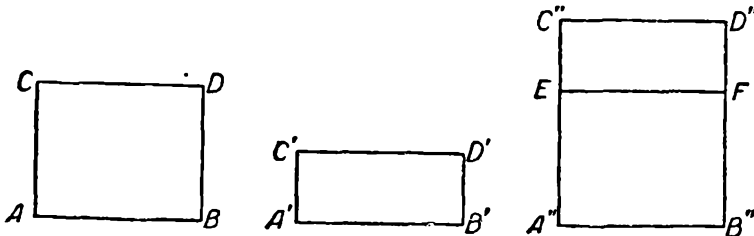
В самом деле:

1°. Два прямоугольника, имеющие равные основания и равные высоты, равны между собою и, следовательно, равновелики на основании свойства I.

¹⁾ Это допущение в действительности излишне, так как возможность установить такое соответствие можно доказать (см. Прибавление D в конце книги).

2°. Если три прямоугольника $ABDC$, $A'B'D'C'$, $A''B''D''C''$ (черт. 214) имеют равные основания, а высота третьего составляет сумму высот первых двух, то площадь третьего будет суммой площадей первых двух (свойство II). Действительно, третий прямоугольник можно рассматривать как сумму двух прямоугольников $A''B''FE$ и $C''D''FE$, равных соответственно двум первым.

Поэтому можно доказать, так же как и в п. 113 (книга третья) или в п. 17 (книга первая), что значение отношения двух площадей, вычисленное с точностью до $\frac{1}{n}$, будет равно значению отношения двух высот, вычисленному с точностью до $\frac{1}{n}$; это и доказывает теорему.



Черт. 214.

Следствие. Так как каждая сторона прямоугольника может быть принята либо за основание, либо за высоту, мы могли бы об основаниях высказать то, что мы говорили о высотах, и наоборот; одним словом, *площади двух прямоугольников, имеющих по равной стороне, относятся между собою, как их неравные стороны.*

Теорема. *Отношение площадей двух прямоугольников равно произведению отношений их соответствующих измерений.*

Действительно, мы только что видели, что площадь всякого прямоугольника пропорциональна его основанию или его высоте, если изменяется только высота или только основание. Отсюда уже следует, что площадь прямоугольника пропорциональна их произведению.

Впрочем, здесь можно повторить то рассуждение, которое применяется для этого случая в арифметике. Действительно, пусть A и A' — площади двух данных прямоугольников; a и b — измерения одного из них, a' и b' — измерения другого. Рассмотрим прямоугольник, у которого измерениями будут a' и b . Если A'' будет площадью этого прямоугольника, то будем иметь:

$$\frac{A}{A''} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{A''}{A'} = \frac{b}{b'}.$$

В этих равенствах мы можем полагать, что A , A' , A'' обозначают не площади, как таковые, а числа, которые измеряют эти площади в одних и тех же единицах, например в выбранных нами единицах площади.

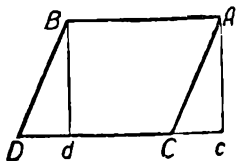
щади (квадрат, сторона которого равна единице длины). При этих условиях, если мы перемножим почленно предыдущие равенства, то произведение $\frac{A}{A''} \cdot \frac{A''}{A'}$ можно будет записать в виде $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{A}{A'}$. Это отношение $\frac{A}{A'}$ действительно равно произведению отношений $\frac{a}{a'}$ и $\frac{b}{b'}$.

Теорема. *Площадь прямоугольника равна произведению двух его измерений.*

В самом деле, эта теорема представляет собою не что иное, как предыдущую теорему, применённую к данному прямоугольнику и квадрату, имеющему стороной единицу длины. Площадь A' этого последнего является единицей площади, и каждое его измерение a' и b' равно единице длины; таким образом, отношение $\frac{A}{A'}$ есть не что иное,

как мера площади A , и отношения $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ суть меры длин a , b .

Примечания: 1°. Эта формулировка имеет смысл только благодаря соглашению, установленному в п. 18 (книга первая) и повторенному в п. 106 (книга третья). Смысл сказанного таков: *число, которое измеряет площадь прямоугольника, равно произведению чисел, измеряющих соответственно его основание и его высоту.*



Черт. 215.

2°. Эта формулировка верна только благодаря соглашению, установленному в п. 244, которое в данном случае весьма существенно.

Очевидно, *a priori*, что доказанное равенство не будет иметь места, если единица длины и единица площади будут выбраны как-нибудь, независимо друг от друга.

Из этого видно, что единица длины может быть выбрана произвольно; но если этот выбор сделан, то тем самым из него необходимо вытекает выбор единицы площади.

Поэтому говорят, что единица площади — единица производная.

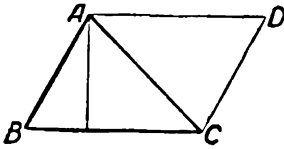
248. Теорема. *Площадь параллелограмма измеряется произведением его основания на высоту.*

Пусть имеем параллелограмм $ABDC$ (черт. 215). Проведём перпендикуляр к стороне AB через точки A и B до пересечения в точках c и d со стороной CD так, чтобы образовался прямоугольник $ABdc$. Этот прямоугольник равновелик параллелограмму, потому что, прибавляя к этим двум многоугольникам соответственно два прямоугольных треугольника BdD , AcC , которые равны как имеющие по равному острому углу и по одной равной стороне, мы получаем одну и ту же сумму (п. 242) — трапецию $AcDB$. Теорема доказана, так как прямоугольник имеет своими измерениями основание параллелограмма и его высоту.

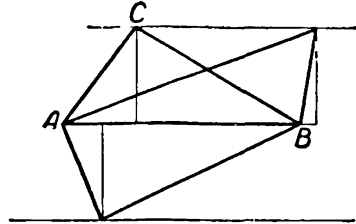
249. Теорема. *Площадь треугольника измеряется половиной произведения основания на высоту.*

Пусть дан треугольник ABC (черт. 216). Через точку A проведём прямую AD , параллельную BC , и через точку C — прямую CD , параллельную AB . Таким образом, получается параллелограмм $ABCD$, имеющий то же основание и ту же высоту, что и данный треугольник. Но этот параллелограмм делится диагональю AC (п. 46) на два равных треугольника ABC и CDA . Поэтому треугольник ABC составляет половину параллелограмма.

250. Следствие. *Геометрическое место вершин C треугольников, имеющих одно и то же основание AB (черт. 217) и одну и ту же площадь, составляют две прямые, параллельные AB .*



Черт. 216.



Черт. 217.

Действительно, вершины этих треугольников будут расположены на постоянном расстоянии от прямой AB .

251. Задача. *Вычислить площадь треугольника, если даны три его стороны.*

Мы видели (п. 130), что если a , b , c — стороны треугольника и p — его полупериметр, то высота AH , опущенная на сторону a , будет равна

$$AH = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Следовательно, площадь треугольника S будет равна

$$\begin{aligned} S &= \frac{a \cdot AH}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \end{aligned}$$

Примечание. *Произведение трёх сторон треугольника равно четвервёрному произведению площади на радиус описанного круга.*

Если в треугольнике ABC AH — высота, опущенная из вершины A , и R — радиус описанной окружности, то имеем (п. 130a):

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AH;$$

умножая обе части этого равенства на BC , получим

$$AB \cdot AC \cdot BC = 2R \cdot AH \cdot BC = 4R \cdot S.$$

252. Площадь какого-либо многоугольника находят, разлагая его на треугольники, площади которых складывают между собою. Следующие две теоремы являются только приложением этого способа.

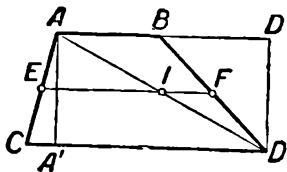
Теорема. Площадь трапеции измеряется произведением полусуммы её оснований на высоту.

Пусть имеем трапецию $ABDC$ (черт. 218). Диагональ AD мы делим эту трапецию на два треугольника ABD и ACD , за основания которых мы принимаем стороны AB и CD . Высоты DD' и AA' треугольников будут равны между собою и равны высоте трапеции h .

Поэтому будем иметь:

$$\text{площадь } ABDC = h \cdot \frac{AB}{2} + h \cdot \frac{CD}{2} = \frac{h(AB + CD)}{2}.$$

252а. Следствие. Площадь трапеции измеряется произведением её высоты на отрезок, соединяющий середины её непараллельных сторон.



Черт. 218.

Действительно, середины E , F сторон AC и BD (черт. 218) и середина I диагонали AD лежат на одной и той же прямой, параллельной основаниям; следовательно, отрезок EF равен полусумме этих оснований, потому что две его части EI и IF соответственно равны $\frac{CD}{2}$ и $\frac{AB}{2}$.

253. Теорема. Площадь правильного многоугольника измеряется произведением его периметра на половину апофемы.

В самом деле, правильный многоугольник $ABCDEF$ (черт. 219) разбивается радиусами, проведёнными в его вершины, на треугольники OAB , OBC , ..., равные между собою и имеющие, следовательно, одну и ту же высоту, равную апофеме OH многоугольника; поэтому имеем:

$$\text{площадь } OAB = OH \cdot \frac{AB}{2},$$

$$\text{площадь } OBC = OH \cdot \frac{BC}{2},$$

.....

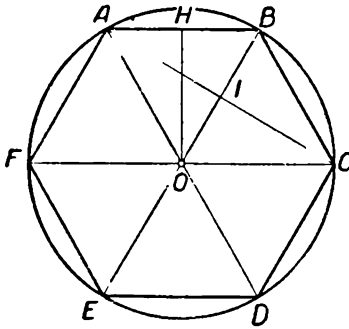
$$\text{площадь } OFA = OH \cdot \frac{FA}{2}.$$

Складывая, получим:

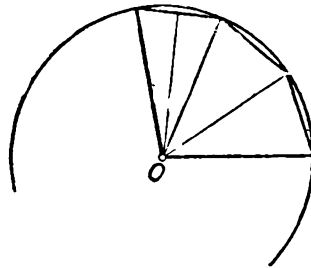
$$\text{площадь } ABCDEF = \frac{OH(AB + BC + \dots + FA)}{2}.$$

Примечание. Если число сторон многоугольника чётно, то его площадь равна половине радиуса описанной окружности, умноженного на периметр многоугольника, полученного от соединения вершин данного через одну.

Действительно, площадь треугольника OAB (черт. 219) равна половине произведения OB на опущенную из точки A высоту AI , равную половине отрезка AC .



Черт. 219.



Черт. 220.

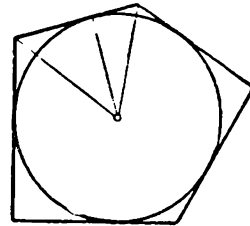
253а. Многоугольным сектором (черт. 220) называется многоугольник, ограниченный ломаной линией, вписанной в окружность, и радиусами этой окружности, проведёнными в концы ломаной.

Многоугольный сектор называется *правильным*, если ломаная линия, которая служит его основанием, будет правильной.

Теорема. Площадь правильного многоугольного сектора измеряется произведением периметра ломаной линии, которая служит его основанием, на половину апофемы.

Доказательство этой теоремы точно такое же, как и предыдущей (п. 253).

254. Теорема. Площадь выпуклого многоугольника, описанного около круга (и заключающего этот круг внутри себя) (черт. 221) равна произведению его периметра на половину радиуса этого круга.



Черт. 221.

Действительно, многоугольник можно разложить на треугольники, соединяя вершины многоугольника с центром круга. Эти треугольники имеют своими основаниями стороны многоугольника, высоты их все одинаковы — радиусы круга.

255. Задача. Найти площадь вписанного четырёхугольника, зная, четыре его стороны.

Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, у которого $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Если R будет радиусом описанного круга, то (п. 251, примечание)

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot AC &= 4R \times \text{площадь } ABC, \\ c \cdot d \cdot AC &= 4R \times \text{площадь } ACD. \end{aligned}$$

Сумма площадей ABC и ACD равна искомой площади S . Складывая, получим (в силу п. 240а):

$$4RS = AC \cdot (ab + cd) = \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}$$

и, заменяя R его значением (п. 240а), найдём:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Примечание. Результат не зависит от последовательности сторон, что было ясно и *a priori*, потому что четырёхугольники $ABCD$, $ABEF$, $ABGH$ (п. 240) равновелики, как составленные из попарно равных треугольников.

УПРАЖНЕНИЯ.

287. Найти площадь равностороннего треугольника со стороной a .
288. Найти длину стороны равностороннего треугольника, площадь которого равна 1 м^2 .

289. Каждая вершина данного квадрата соединяется с серединой стороны, предшествующей противоположной вершине при обходе периметра квадрата в определённом направлении. Полученные таким образом прямые образуют стороны нового квадрата, составляющего пятую часть данного (доказать).

290. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится, таким образом, на четыре параллелограмма, из которых два имеют своими диагоналями части диагонали AC . Доказать, что два других параллелограмма равновелики.

291. Какой из треугольников, имеющих равные основания и равные углы при вершине, будет иметь наибольшую площадь?

292. Во всякой трапеции два треугольника, образованные каждой из двух непараллельных сторон и отрезками двух диагоналей, равновелики (доказать). Сформулировать и доказать обратную теорему.

293. Через середину каждой диагонали четырёхугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали; точка пересечения этих прямых соединена с серединами сторон четырёхугольника. Показать, что четырёхугольник разбивается таким образом на четыре равновеликие части.

294. Через каждую вершину четырёхугольника проведены прямые, параллельные диагонали, не проходящей через эту вершину. Показать, что полученный таким образом параллелограмм вдвое больше четырёхугольника.

Если диагонали двух четырёхугольников соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырёхугольники равновелики (доказать).

295. Внутри треугольника найти такую точку, которая, будучи соединена с тремя его вершинами, разделила бы треугольник на три равновеликие части или, общёе, на три части, площади которых пропорциональны трём данным отрезкам или трём данным числам.

295а. Исходя из рассмотрения площадей (см. предыдущее упражнение), доказать, что произведение отношений, в которых прямые, соединяющие какую-либо точку плоскости с тремя вершинами треугольника, делят его противоположные стороны, равно единице (теорема, доказанная в п. 197).

296. Некоторая точка O плоскости соединена с вершинами параллелограмма $ABCD$ (AC , BD — его диагонали); доказать, что:

1°. Если точка O находится внутри параллелограмма, то сумма площадей противоположащих треугольников OAB и OCD равна сумме площадей треугольников OBC и ODA .

2°. Где бы ни лежала точка O , треугольник OAC равновелик сумме или разности треугольников OAB и OAD .

297. Площадь трапеции измеряется произведением одной из непараллельных её сторон на перпендикуляр, опущенный из середины другой из непараллельных сторон на первую. Доказать это предложение двумя способами: 1) преобразуя в другую форму выражение, данное в п. 252а; 2) показав непосредственно, что трапеция равновелика параллелограму, имеющему указанное выше основание и высоту.

Если соединить середину одной из непараллельных сторон трапеции с концами противоположной стороны, то получится треугольник, равновеликий половине трапеции (доказать).

298. Сумма расстояний какой-либо точки, взятой внутри правильного многоугольника, от всех его сторон есть величина постоянная (доказать).

299. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанного круга (доказать).

Площадь треугольника равна произведению радиуса вневписанного круга на разность между полупериметром и соответствующей стороной (или на полуразность между суммой двух других сторон и этой стороной).

300. Обратная величина радиуса круга, вписанного в треугольник, равняется сумме обратных величин радиусов вневписанных кругов (доказать).

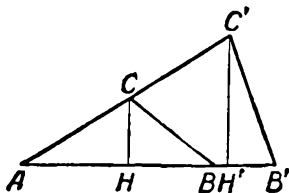
301. Если x, y, z обозначают соответственно расстояния точки, лежащей внутри треугольника от трёх его сторон, и h, k, l — соответствующие высоты треугольника, то имеет место равенство: $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1$ (доказать).

Как изменится это предложение, если точка будет лежать вне треугольника?

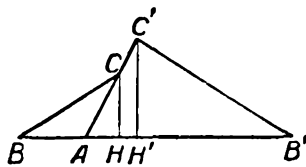
ГЛАВА II.

СРАВНЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ.

256. Теорема. Если угол одного треугольника равен углу другого (или является углом ему дополнительным), то площади обоих треугольников относятся между собой как произведения сторон, заключающих эти углы.



Черт. 222.

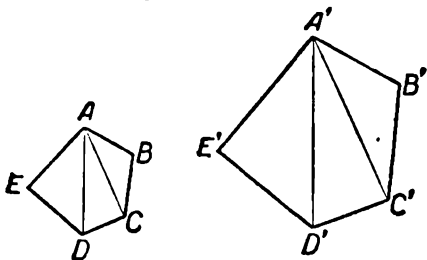


Черт. 223.

Мы можем совместить друг с другом равные углы или сделать прилежащими друг к другу дополнительные углы; тогда в треугольниках ABC , $AB'C'$ совпадут по направлению стороны AC и AC' ; стороны AB и AB' либо также совпадут по направлению (черт. 222), либо будут служить продолжением одна другой (черт. 223). Отношение площадей двух треугольников равно отношению оснований AB и AB' ,

умноженному на отношение высот CH и $C'H'$, а это последнее, очевидно, равно отношению $\frac{AC}{A'C'}$.

257. Теорема. *Отношение площадей двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.*



Черт. 224.

Мы будем различать два случая:

1°. Если речь идёт о двух подобных треугольниках ABC , $A'B'C'$, то достаточно заметить, что эти два треугольника имеют равные углы $\angle A = \angle A'$. Следовательно, отношение их площадей равно произведению от-

ношений $\frac{AB}{A'B'}$ и $\frac{AC}{A'C'}$, т. е. квадрату одного из них, потому что эти отношения равны между собой.

2°. Пусть даны теперь два каких-нибудь подобных многоугольника $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (черт. 224), коэффициент подобия которых пусть будет k .

Эти многоугольники можно разложить на подобные и одинаковым образом расположенные треугольники ABC , ACD , ADE ; $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$, и мы будем иметь:

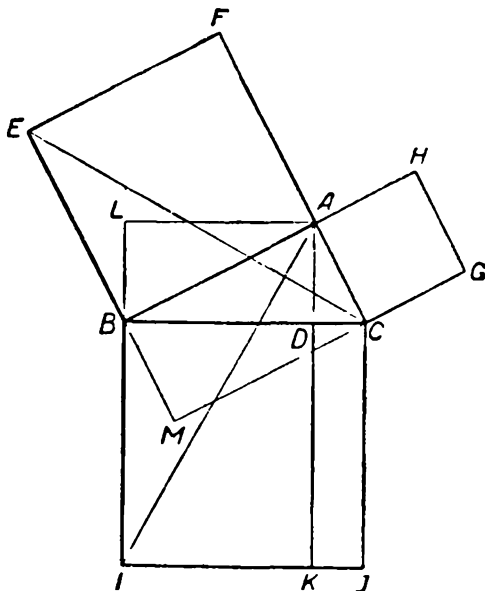
$$\begin{aligned} \frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A'B'C'} &= \frac{\text{пл. } ACD}{\text{пл. } A'C'D'} = \\ &= \frac{\text{пл. } ADE}{\text{пл. } A'D'E'} = k^2. \end{aligned}$$

Складывая предыдущие и последующие члены, получим:

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A'B'C'D'E'} = k^2.$$

258. Теорема. *Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен величии суммы квадратов, построенных на катетах.*

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC (черт. 225). На катетах AB , AC и на гипотенузе BC построим квадраты $ABEF$, $ACGH$, $BCJI$, расположенные вне треугольника. Из вершины A



Черт. 225.

опустим на гипотенузу BC перпендикуляр AD , продолжение которого пусть пересечёт IJ в точке K . Я утверждаю, что прямоугольник $BDKI$ равновелик квадрату $ABEF$.

Чтобы это доказать, проведём AI и CE . Треугольник ABI и прямоугольник $BDKI$ имеют общее основание BI и общую высоту $AL = BD$; следовательно, площадь треугольника равна половине площади прямоугольника. Точно так же треугольник EBC имеет то же основание BE и ту же высоту $CM = AB$, что и квадрат $ABEF$; следовательно, площадь этого треугольника равна половине площади квадрата.

Но два треугольника ABI и EBC равны, так как имеют равные углы при вершине B (к углу B треугольника ABC прибавляется прямой угол), заключённые между равными сторонами ($AB = BE$ и $BI = BC$). Поэтому прямоугольник $BDKI$ равновелик квадрату $ABEF$.

Можно точно так же доказать, что прямоугольник $CDKJ$ равновелик квадрату $ACGH$. Квадрат $BCJI$, представляющий сумму двух прямоугольников, тем самым равновелик сумме квадратов $ABEF$ и $ACGH$.

Примечание. Эта теорема по существу сводится к той, которую мы доказали в п. 124, потому что квадраты $ABEF$, $ACGH$, $BCJI$ измеряются соответственно квадратами чисел, измеряющих длины их сторон. Даже и доказательство идёт по тому же пути, потому что равновеликость прямоугольника $BDKI$ и квадрата $ABEF$ выражает то же самое, что и равенство $AB^2 = BC \cdot BD$, которым мы пользовались в указанном п. 124.

УПРАЖНЕНИЯ.

302. Каждая сторона треугольника разделена в данном отношении. Требуется найти отношение площади треугольника, вершины которого лежат в точках деления, к площади данного треугольника. Рассмотреть случай, когда одна или более сторон разделены внешним образом. Вывести отсюда теоремы пп. 192—193.

303. Разделить треугольник прямыми, параллельными основанию, на данное число равновеликих частей.

304. Разделить трапецию прямыми, параллельными основанию, на данное число равновеликих частей.

305. Радиусы окружности, проведённые в вершины вписанного в неё равностороннего треугольника, продолжены до пересечения с окружностью, которая проходит через вершины квадрата, описанного около данной окружности. Полученные три точки пересечения определяют треугольник, равновеликий вписанному в эту окружность правильному шестиугольнику (доказать).

306. Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, параллельная заданному направлению, до её пересечения с диагональю, которая не проходит через эту вершину; доказать, что:

1) четырёхугольник, вершины которого находятся в этих точках пересечения, равновелик данному;

2) он будет трапецией или параллелограмом, если первый будет трапецией или параллелограмом;

3) в общем случае отношения, в которых противолежащие стороны делят друг друга в точке пересечения, будут одни и те же для обоих четырёхугольников.

307. На плоскости даны несколько многоугольников; через все их вершины проведены прямые, параллельные данному направлению, и на этих прямых отложены отрезки, пропорциональные расстояниям соответствующих вершин от заданной прямой (так что все эти отрезки направлены от вершин либо в сторону заданной прямой, либо в противоположную сторону).

Доказать, что площади многоугольников, вершинами которых служат концы построенных таким образом отрезков, пропорциональны площадям данных многоугольников (упр. 297).

В каком случае новые многоугольники будут равновелики первым?

308. Показать, что предыдущее упражнение содержит как частный случай упражнение 306.

Другие доказательства теоремы о квадрате гипотенузы.

309. В задаче 44 (книга первая) доказать, что третий квадрат $HBKF$ равновелик сумме двух данных квадратов. Вывести отсюда теорему п. 258.

310. Доказать теорему о квадрате гипотенузы с помощью теоремы п. 257, замечая, что прямоугольный треугольник представляет сумму двух треугольников, на которые он делится своею высотой.

311. На сторонах AB и AC некоторого треугольника ABC , как на соответствующих основаниях, построены два каких-либо параллелограмма $ABEF$, $ACGH$, расположенные вне треугольника, а в остальном совершенно произвольные; стороны EF и GH продолжены до взаимного пересечения в точке M . Показать, что параллелограмм, построенный на стороне BC и имеющий другую сторону, равную и параллельную AM , равновелик сумме первых двух.

Показать, что эта теорема включает в себя как частный случай теорему о квадрате гипотенузы.

ГЛАВА III.

ПЛОЩАДЬ КРУГА.

259. *Площадью круга* называется предел, к которому стремится площадь вписанного или описанного многоугольника, если длины всех его сторон стремятся к нулю.

Чтобы доказать, что такой предел существует и не зависит от закона, по которому длины сторон стремятся к нулю, надо провести рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили, определяя длину окружности.

Сначала рассматривают правильные вписанные многоугольники, число сторон которых неограниченно удваивается, и соответствующие описанные многоугольники (черт. 177). При этих условиях:

Площади вписанных многоугольников будут возрастать, потому что каждый из них заключает предыдущий внутри себя. При этом каждая из этих площадей будет меньше площади какого-либо описанного многоугольника. Поэтому *эти площади стремятся к пределу*.

Точно так же *площади описанных многоугольников будут убывать*, потому что каждый из них находится внутри предыдущего. При этом каждая из этих площадей будет больше площади какого-либо вписанного многоугольника.

Поэтому площади описанных многоугольников также стремятся к пределу.

Эти два предела равны между собою, потому что отношение площадей вписанного многоугольника и соответствующего описанного равно квадрату коэффициента подобия, который стремится к единице (п. 176).

260. Пусть S — значение общего предела, которое получается, например, если исходить из квадрата и рассматривать последовательно правильные многоугольники с 4, 8, 16, 32, ..., 2^n , ... сторонами.

Возьмём теперь какие-нибудь вписанные многоугольники $a'b'c'...$ (черт. 178) и соответствующие описанные многоугольники $A'B'C'...$, налагая единственное условие, чтобы число сторон этих многоугольников увеличивалось безгранично так, чтобы длины всех сторон стремились к нулю.

Площадь вписанного многоугольника $a'b'c'...$ меньше, чем S , потому что S является пределом для площадей описанных многоугольников, каждая из которых больше, чем площадь многоугольника $a'b'c'...$

Величина S , будучи заключена между площадями многоугольников, вписанного и описанного, отличается от каждого из них на величину, меньшую разности между площадями обоих многоугольников.

Но эта разность стремится к нулю. В самом деле, она состоит из суммы площадей треугольников $a'b'A'$, $b'c'B'$, ...; следовательно, она измеряется величиной

$$\frac{1}{2} (a'b' \cdot A'H + b'c' \cdot B'K + \dots) < \frac{1}{2} (a'b' + b'c' + \dots) \cdot l,$$

где $A'H$, $B'K$, ... — высоты треугольников $a'b'A'$, $b'c'B'$, ... и l представляет наибольшую из этих высот.

Множитель $a'b' + b'c' + \dots$ стремится, как мы знаем, к длине окружности. Что касается высот $A'H$, $B'K$, ..., то они стремятся к нулю. Действительно, например, длины отрезков OH и OA' стремятся к радиусу круга, и, следовательно, их разность $A'H$ имеет своим пределом нуль.

Поэтому площади вписанных и описанных многоугольников стремятся к одному и тому же пределу S , который есть площадь круга ¹⁾.

¹⁾ Это рассуждение распространяется на любые выпуклые кривые при условии, что высота, опущенная из вершины c треугольника abc (сноска 1 к п. 179), стремится к нулю вместе с расстоянием ab независимо от положения дуги ab на данной кривой. Это условие выполняется одновременно с аналогичным условием, указанным в сноске п. 179. При этом разность между площадью вписанного многоугольника и площадью соответствующего описанного необходимо стремится к нулю вместе с длинами сторон этих многоугольников. Как было отмечено в сноске, о которой идёт речь, доказательство разделяется на две части, соответствующие содержанию пп. 259 и 260. Что касается площадей невыпуклых фигур, то их вычисляют как сумму или разность площадей выпуклых фигур.

261. Теорема. *Площадь круга измеряется длиной окружности, умноженной на половину радиуса.*

Действительно, площадь правильного многоугольника измеряется произведением его периметра на половину апофемы. Когда число сторон его неограниченно увеличивается, периметр стремится к длине окружности, апофема — к длине радиуса.

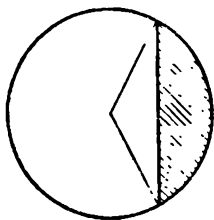
Примечание. Можно получить тот же результат, применяя теорему п. 254 об описанном многоугольнике. В самом деле, периметр такого многоугольника стремится к длине окружности, когда число сторон его неограниченно возрастает.

Следствие. *Площадь круга радиуса R есть πR^2 .*

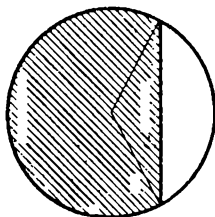
Действительно:

$$2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

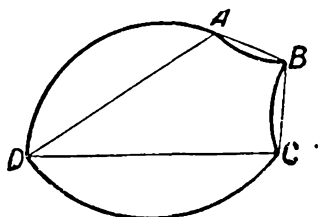
262. Круговым сектором называется часть плоскости, ограниченная дугой окружности и радиусами, проведёнными в концы этой дуги.



Черт. 226.



Черт. 227.



Черт. 228.

Площадь сектора есть предел, к которому стремится площадь вписанного многоугольного сектора, когда все стороны соответствующей ломаной линии неограниченно уменьшаются. Существование этого предела устанавливается так же, как и для площади круга.

Теорема. *Площадь кругового сектора равна длине дуги, которая служит его основанием, умноженной на половину радиуса.*

Действительно, периметр вписанной правильной ломаной линии, когда число сторон её неограниченно возрастает, стремится к длине дуги, а апофема её стремится к радиусу.

Длина дуги окружности радиуса R , содержащей n градусов, равна $\frac{\pi R n}{200}$, а площадь кругового сектора равна $\frac{\pi R^2 n}{400}$.

Аналогично этому площадь кругового сектора радиуса R , имеющего центральный угол в $m^\circ n' p''$, равна

$$\frac{\pi R^2}{360} \left(m + \frac{n}{60} + \frac{p}{3600} \right).$$

263. Круговым сегментом (черт. 226 и 227) называется часть плоскости, заключённая между дугой и её хордой. Ясно, что для по-

лучения площади сегмента надо из площади сектора вычесть площадь треугольника, имеющего основанием хорду, а вершиной — центр круга, если соответствующая дуга меньше половины окружности (черт. 226), и надо прибавить площадь того же треугольника в противоположном случае (черт. 227).

Измерение *площади фигуры, ограниченной дугами окружности*, сводится к вычислению площади многоугольника с последующим прибавлением или вычитанием из неё площадей секторов или сегментов.

Например, площадь криволинейной фигуры $ABCD$ (черт. 228) равна площади четырёхугольника $ABCD$, уменьшенной на сумму площадей сегментов AB и BC и увеличенной на сумму площадей сегментов CD и DA .

Резюмируя, скажем, что *мы можем найти площадь всякой части плоскости, ограниченной прямыми или дугами окружности*.

УПРАЖНЕНИЯ.

312. Найти длину радиуса круга, площадь которого равна 1 м^2 .

313. Найти длину радиуса круга, в котором площадь сектора с углом в 150° составляет 1 м^2 .

314. Найти длину радиуса круга, в котором площадь сегмента, ограниченного дугой в 60° и её хордой, равна 1 м^2 .

315. Площадь кругового кольца, заключённого между двумя концентрическими окружностями, равна площади круга, который имеет своим диаметром хорду большей окружности, касающуюся меньшей окружности (доказать).

316. B и D — две точки, лежащие на дуге ABC , представляющей собой четверть некоторой окружности, и находящиеся на одинаковом расстоянии от её концов; если из этих двух точек опустить перпендикуляры BE и DF на радиус OC , то полученная криволинейная трапеция $BEFD$, ограниченная прямыми линиями и дугой окружности, равновелика сектору OBD (доказать).

317. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, как на диаметрах, построены полуокружности — две первые вне треугольника, третья, наоборот, расположена по ту же сторону от гипотенузы, где лежит треугольник. Показать, что сумма площадей двух луночек, заключённых между каждой из меньших окружностей и большей окружностью, равна площади треугольника.

318. На стороне AB квадрата, вписанного в окружность с центром O , как на диаметре, описана полуокружность, расположенная вне квадрата. Радиус OMN пересекает эту полуокружность, в точке N , а первоначальную окружность — в точке M . Показать, что криволинейный треугольник, заключённый между отрезком прямой MN и дугами MA , NA , *квадрируем*, т. е. что можно найти ¹⁾ сторону равновеликого ему квадрата.

ГЛАВА IV. ПОСТРОЕНИЯ.

264. *Задача. На данном основании построить треугольник, равновеликий данному треугольнику.*

Высота искомого треугольника, очевидно, будет четвёртой пропорциональной к данному основанию и к основанию и высоте данного треуголь-

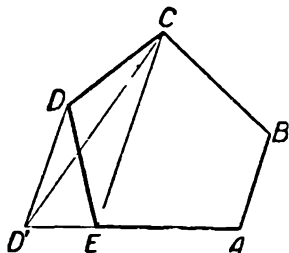
¹⁾ Пользуясь только циркулем и линейкой. *Прим. ред. перевода.*

ника, так как четыре таких числа, что произведение двух из них равно произведению двух других, составляют пропорцию. Когда высота найдена, мы отложим её на каком-либо перпендикуляре к данному основанию и, таким образом, получим вершину одного из бесчисленного множества треугольников, который удовлетворяет условиям.

Ясно, что точно так же можно построить треугольник, имеющий данную высоту и равновеликий данному треугольнику.

265. Задача. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику.

Разложим многоугольник на треугольники и превратим их в треугольники с общим основанием с помощью предыдущего построения. Треугольник, имеющий то же основание и высоту, равную сумме высот всех составляющих треугольников, будет равновелик сумме этих треугольников, т. е. данному многоугольнику.



Черт. 229.

Это построение может быть значительно сокращено; мы это сейчас покажем, предполагая для простоты, что многоугольник выпуклый.

Пусть дан многоугольник $ABCDE$ (черт. 229). Проведём диагональ CE , которая соединяет две вершины, смежные с одной и той же вершиной D , и через эту вершину D проведём параллельно CE прямую DD' до пересечения с продолжением стороны AE в точке D' . Треугольник CED' равновелик треугольнику CED (п. 250), а многоугольник $ABCD'$ — соответственно многоугольнику $ABCDE$; таким образом, мы заменим данный многоугольник равновеликим ему многоугольником, имеющим на одну сторону меньше, чем первоначальный. Мы продолжаем это построение до тех пор, пока не придём к треугольнику.

Задача. Построить квадрат, равновеликий данному многоугольнику.

Сторона искомого квадрата будет средним пропорциональным между основанием и половиной высоты треугольника, полученного предыдущим построением.

266. Задача. Построить многоугольник, равновеликий данному многоугольнику и подобный другому данному многоугольнику.

Пусть требуется построить многоугольник P , подобный данному многоугольнику P' и равновеликий другому данному многоугольнику P_1 . Пусть a' — сторона квадрата, равновеликого многоугольнику P' , a — сторона квадрата, равновеликого многоугольнику P_1 ; эти стороны можно определить тем же путём, как это было указано выше. Отношение площадей многоугольников P' и P_1 , т. е. отношение площадей многоугольника P' и искомого многоугольника, будут

$$\frac{a'^2}{a^2} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2.$$

Следовательно, если $A'B'$ — какая-нибудь сторона многоугольника P' , то соответствующая сторона AB искомого многоугольника определяется из пропорции

$$\frac{a'}{a} = \frac{A'B'}{AB};$$

поэтому её можно найти построением четвёртой пропорциональной (п. 151), и задача приведена к построению За, п. 152.

267. Знаменитая задача *о квадратуре круга* состоит в построении стороны квадрата, равновеликого данному кругу.

Эта сторона, как видно из выражения для площади круга, есть средняя пропорциональная между радиусом и длиной полуокружности, и задача была бы разрешена, если бы была известна последняя.

Обратно, если бы была построена сторона квадрата, равновеликого данному кругу, то длина полуокружности получилась бы как третья пропорциональная к радиусу и стороне квадрата. Задача о квадратуре круга сводится к той задаче, о которой мы говорили в п. 184: *Построить отрезок, равный длине окружности данного радиуса*. Как мы уже говорили, эта задача, а следовательно, и задача о квадратуре круга не могут быть решены с помощью линейки и циркуля.

УПРАЖНЕНИЯ.

319. Построить прямоугольник, зная его периметр и площадь.

Какой из прямоугольников, имеющих данный периметр, будет иметь наибольшую площадь?

320. Вписать в круг прямоугольник данной площади.

Какой из прямоугольников, вписанных в данный круг, будет иметь наибольшую площадь?

321. Разделить треугольник на равновеликие части прямыми данного направления.

Та же задача для произвольного многоугольника.

322. Разделить четырёхугольник прямыми, выходящими из одной его вершины, на данное число равновеликих частей. Показать, что для построения точек пересечения искомым прямым со сторонами четырёхугольника достаточно разделить на равные части диагональ, которая не проходит через данную вершину, и через точки деления провести прямые, параллельные другой диагонали, до пересечения со сторонами четырёхугольника.

323. Разделить произвольный многоугольник на равновеликие части прямыми, выходящими из одной и той же вершины.

ЗАДАЧИ К ЧЕТВЁРТОЙ КНИГЕ.

324. Показать, что формулировку предложений упражнения 296 можно видоизменить так, что они будут верны, каково бы ни было положение точки O на плоскости, условившись перед числом, выражающим площадь треугольника, ставить знак $+$ или $-$ в зависимости от направления вращения.

325. Если два многоугольника прямо-гомотетичны и меньший расположен внутри большего, то площадь любого многоугольника, описанного около одного из них и вписанного в другой, будет средней пропорциональной между площадями данных многоугольников.

326. Найти отношение площади данного треугольника к площади треугольника, имеющего своими сторонами медианы данного треугольника.

327. Через две вершины треугольника проведены прямые, делящие противоположные стороны в данных отношениях. Найти отношения площадей тех частей, на которые эти прямые делят площадь треугольника.

328. Через три вершины треугольника проведены прямые, делящие противоположные стороны в данных отношениях. Найти отношение площади треугольника, образованного этими прямыми, к площади данного треугольника. Вывести отсюда теоремы пп. 197 и 198, которые дают условие, при котором все три прямые проходят через одну и ту же точку.

329. Через точку внутри угла провести секущую так, чтобы она образовала со сторонами угла треугольник данной площади. (Прежде всего строим параллелограмм, имеющий заданную площадь, один из углов которого совпадает с данным углом и одна из сторон которого проходит через данную точку. Искомая секущая должна отсекать от этого параллелограмма треугольник, площадь которого равнялась бы сумме площадей двух других треугольников, лежащих вне построенного параллелограмма и образованных этой секущей, сторонами параллелограмма и сторонами данного угла.)

330. Среди всех прямых, которые проходят через точку, заданную внутри угла, и пересекают его стороны (но не их продолжения, найти ту, которая образует со сторонами угла треугольник, имеющий наименьшую площадь.

331. Среди всех многоугольников с одним и тем же числом сторон и вписанных в один и тот же круг наибольшую площадь будет иметь правильный многоугольник¹⁾ (доказать).

332. Построить треугольник, зная его сторону, соответствующую высоту и радиус вписанной окружности.

333. В данный круг вписать трапецию, зная один из её углов и площадь.

334. Треугольник и параллелограмм имеют одно и то же основание, по равному углу при основании и одну и ту же площадь. Разрезать одну из этих фигур на такие две части, чтобы они, будучи сложены иначе, давали бы другую фигуру.

335. Два треугольника имеют одно и то же основание и одну и ту же высоту. Разрезать один из них на части так, чтобы сложенные иначе они дали бы другой. (Свести эту задачу к подобному же вопросу о параллелограмах, пользуясь результатом предыдущей задачи.)

336. Та же задача для каких-либо двух равновеликих треугольников.

337. Та же задача для каких-либо двух равновеликих многоугольников.

338. Пусть даны четыре точки A, B, C, D ; произведение площади треугольника BCD на степень точки A относительно круга, описанного около этого треугольника, равно каждому из произведений, образованных таким же образом точкой B и треугольником CAD , или точкой C и треугольником AED , или точкой D и треугольником ACB (доказать).

¹⁾ Если в круг вписан многоугольник, отличный от правильного, то, по крайней мере, одна из его сторон больше стороны правильного многоугольника с тем же числом сторон и, по крайней мере, одна из его сторон меньше стороны того же правильного многоугольника; всегда можно, не изменяя ни площади многоугольника, ни описанного круга, сделать так, чтобы эти две стороны AB и BC были смежными. Перемещая теперь вершину B так, чтобы сделать BC равной стороне правильного вписанного многоугольника, мы площадь многоугольника увеличим; выполняя эту операцию столько раз, сколько будет необходимо для того, чтобы заменить данный многоугольник правильным многоугольником, получим искомое предложение.

Показать, кроме того, что эти равенства можно считать верными как по величине, так и по знаку, если использовать соглашение, установленное в задаче 324.

339. Каждое из произведений, рассмотренных в предыдущей задаче, равно площади треугольника, стороны которого выражаются теми же числами, что и произведения $AB \cdot CD$, $AC \cdot DB$, $AD \cdot BC$ (доказать; см. п. 218, упр. 270а).

340. Разрезать треугольник на равнобедренные треугольники. Та же задача для произвольного многоугольника.

341. Вычислить площадь треугольника, образованного тремя дугами окружности одного и того же радиуса R , попарно пересекающимися под прямым углом.

342. Если два треугольника симметричны друг с другом относительно центра их общей вписанной окружности, то площади восьми треугольников, которые образуются их сторонами, дают в произведении шестнадцатую степень радиуса этой окружности.

П Р И Б А В Л Е Н И Я

ПРИБАВЛЕНИЕ А.

О МЕТОДАХ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ГЕОМЕТРИИ.

268. Под этим названием мы хотели бы собрать некоторые указания, которые, по нашему мнению, полезны как для понимания математики вообще, так в частности для решения задач.

Действительно, учащийся должен твёрдо знать, что для того, чтобы изучение математики принесло ему пользу, не требовало от него чрезмерных усилий и привело бы его к правильному представлению о геометрии, мало понимать предлагаемые ему рассуждения; он должен в той или иной мере научиться самостоятельно строить на основании изученного новые умозаключения, находить доказательства теорем и решать задач.

Вопреки укоренившемуся предубеждению этого результата могут достичь все или, по крайней мере, все те, кто будет заставлять себя размышлять и следовать в своих рассуждениях определённому методу. Указания, которые мы хотим здесь сделать, вытекают просто из здравого смысла (*le bon sens le plus vulgaire*). Среди них нет ни одного, которое не могло бы показаться читателю совершенно тривиальным. Однако опыт показывает, что несоблюдение того или другого из этих очевидных правил является почти единственной причиной тех затруднений, которые возникают при решении элементарных задач; то же самое имеет место чаще, чем это можно было бы думать, при занятиях более или менее высокими областями математических наук.

а) Теоремы, предлагаемые для доказательства.

269. Доказать теорему — значит перейти с помощью рассуждения от условия теоремы к её заключению.

Пример. В теореме:

Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, одинаково удалена от сторон угла (п. 36, черт. 38),

условием и заключением будут:

Условие: Если точка M лежит на биссектрисе угла BAC ,

Заключение: то она будет одинаково удалена от его сторон AB и AC .

Мы должны вывести второе из первого, т. е. *представить* свойства, выраженные в условии теоремы, *в такой форме*, чтобы из них получить свойства, составляющие её заключение.

Очевидно, *необходимо прежде всего точно знать, в чём состоит условие и в чём — заключение теоремы*; следовательно, учащийся должен прежде всего учиться их уверенно формулировать.

270. Но этого ещё мало, и мы можем теперь же сделать первое важное замечание. Всякое доказательство имеет своей целью показать, что заключение теоремы верно, если предположить, что *условие теоремы выполнено*. Если бы условие теоремы не рассматривать как выполненное, не было бы никаких оснований утверждать, что выполнено её заключение. Так, если бы в примере, приведённом в предыдущем пункте, точка *М* не лежала на биссектрисе, то *она не была бы*, как мы знаем (п. 36), равноудалена от сторон угла.

Очевидно, что не имеет смысла делать какие-либо предположения, если не пользоваться ими в своих рассуждениях, иначе говоря, если сделанное предположение не входит где-либо в доказательство. Мы видим, таким образом, что *в рассуждениях необходимо использовать условие теоремы и даже использовать его*, вообще говоря, *полностью*.

271. Несколько ниже мы ещё вернёмся к только что изложенному правилу. Но раньше мы должны дать ещё одно правило, вполне аналогичное предыдущему. На него надо обратить особое внимание, так как о нём чаще всего забывают, несмотря на то, что оно является совершенно необходимым. Это правило относится к *определениям* тех понятий, которыми мы пользуемся.

С одной стороны, очевидно, что мы не можем пользоваться в наших рассуждениях такими понятиями, которые не были нами определены; с другой стороны, понятно, что не пользоваться каким-либо определением при доказательстве — всё равно, что не знать этого определения.

Мы видим, таким образом, что прежде всего необходимо *использовать определение* каждого из тех понятий, которые нам встречаются.

Пример. Возьмём снова ту же теорему:

Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, одинаково удалена от сторон угла.

Мы должны прежде всего задать себе следующие вопросы:

Что значит, что *прямая АМ* (черт. 38) *есть биссектриса угла*?

Ответ. Это значит, что она делит угол *ВАС* на две равные части.

Что называется *расстоянием точки М от прямой АВ*?

Ответ. Длина перпендикуляра, опущенного из точки *М* на прямую *АВ*. После этого формулировка теоремы принимает следующий вид:

Условие:
$$\begin{cases} \angle MAD = \angle MAE; \\ MD \text{ перпендикулярно к } AD; \\ ME \text{ перпендикулярно к } AE. \end{cases}$$

Заключение: $MD = ME.$

Мы надеемся, что этот пример достаточно уясняет смысл следующего правила, которое Паскаль даже считал основой всей логики:

Необходимо заменять определяемые понятия их определениями¹⁾.

¹⁾ В тех случаях, когда определение состоит из нескольких частей, вообще говоря, бывает необходимо использовать все части определения; по этому поводу можно было бы повторить сказанное ниже (в п. 275) относительно условия теоремы.

272. Определение одного и того же понятия часто может быть дано в различных формах; в этом случае следует выбрать форму определения, наиболее подходящую для той цели, которая имеется в виду. Так, например, можно было бы ещё определить биссектрису AM угла, как прямую, которая образует с одной из сторон данного угла угол, равный его половине и имеющий надлежащее направление.

Эта форма определения не подходит для доказательства приведённой выше теоремы; напротив, именно этой формой определения мы пользовались при доказательстве теоремы п. 15а.

Некоторые теоремы точно так же позволяют заменить одно определение известного понятия другим определением, равносильным первому. Так, например, первоначальное определение параллельных прямых (п. 38) мы вовсе не употребляли, начиная с п. 39, где мы заменили его следующим определением, вполне ему равносильным: *Параллельные прямые — это две прямые, которые с одной и той же секущей образуют равные внутренние накрестлежащие углы (или равные соответственные углы, или дополнительные внутренние односторонние углы).*

273. Только что высказанное правило является, быть может, самым важным из всех, которые нам придётся здесь рассматривать. Его значение становится особенно ясным, если учесть, что многие вспомогательные построения, которые иногда представляются на первый взгляд совершенно произвольными, являются простым приложением этого правила.

Приведём только один пример. В начале второй книги мы при всех рассуждениях, относящихся к точке, лежащей на окружности, начинали с того, что соединяли эту точку с центром окружности. Читатель, который продумал предшествующие замечания, поймёт, что в этом построении нет ничего искусственного и что оно является непосредственно необходимым. Действительно, оно вытекает из самого определения окружности. Согласно определению, для того чтобы показать, что точка M лежит на окружности, надо показать, что расстояние OM равно радиусу окружности.

Начиная с главы IV (пп. 73 и сл.), положение меняется. Здесь уже не всегда приходится соединять с центром те точки окружности, которые мы рассматриваем. Это происходит потому, что здесь мы уже знаем, что первоначальное определение окружности можно заменить другим, данным в п. 82а. Согласно этому определению, для того чтобы показать, что точка M лежит на окружности, можно соединить её с тремя точками A , B и C этой окружности и показать, что четырёхугольник $ABCM$ обладает одним из свойств вписанного четырёхугольника, указанных в п. 81. В дальнейшем во всех рассуждениях, относящихся к окружности, мы можем выбирать между этими двумя определениями: в зависимости от обстоятельств мы пользуемся тем или другим определением¹⁾.

¹⁾ В дальнейшем, например в п. 131, встречаются и другие определения окружности, равносильные двум предыдущим.

274. После того как выполнено то, о чём мы говорили (т. е. определяемые понятия заменены их определениями), необходимо преобразовать, как было указано, условие теоремы так, чтобы обнаружить справедливость её заключения.

В наиболее простых случаях непосредственно видна та теорема, с помощью которой можно выполнить такое преобразование.

Пример. Условие, приведённое в п. 271 (пример), непосредственно даёт соответствующее заключение, если воспользоваться одним из признаков равенства прямоугольных треугольников.

В противоположность этому, в других случаях приходится проходить через несколько промежуточных этапов. При этом можно, например, попытаться придать условию теоремы другую форму, которая возможно ближе подходит к её заключению.

Пример. Пусть требуется доказать теорему (п. 25):

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.

Мы должны выразить, что AB больше, чем AC (черт. 28). Для этого мы откладываем на AB отрезок $AD = AC$, так что точка D лежит между A и B .

Условие и заключение теоремы будут поэтому таковы:

- (I) Условие: $\begin{cases} DA \text{ есть продолжение } DB; \\ DA = AC. \end{cases}$
 Заключение: $\angle ACB > \angle ABC$.

Равнобедренный треугольник ADC , в котором углы при основании равны, позволяет придать теперь условию теоремы новую форму:

- (II) Условие: $\begin{cases} DA \text{ есть продолжение } DB; \\ \angle ADC = \angle ACD. \end{cases}$
 Заключение: $\angle ACB = \angle ADC + \angle DCB > \angle ABC$,

или проще:

- (III) Условие: DX есть продолжение DB (черт. 230).

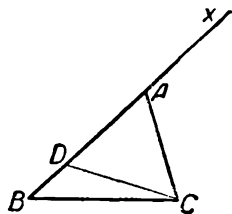
Заключение: $\angle XDC + \angle DCB > \angle XBC$.

Последнее заключение очевидно в силу теоремы о внешнем угле треугольника (в том же п. 25).

Как видно из разбора доказательства, мы достигли цели с помощью ряда *последовательных преобразований условия теоремы*.

275. При каждом из таких преобразований следует, в частности, не забывать нашего первого правила (п. 270) и каждый раз следить, не осталась ли неиспользованной какая-либо часть условия, в чём можно убедиться, исследуя, сводится ли новое условие в точности к предыдущему, будет ли оно ему вполне равносильно.

Пример. В предыдущем примере формулировка (II) условия теоремы вполне эквивалентна формулировке (I): это значит, что если условие (I) выполнено, то выполняется и условие (II), и *обратно*. В самом деле, разница между ними заключается только в том, что равенство $DA = AC$ заменено через $\angle ADC = \angle ACD$. Но мы знаем, что *любой* из этих двух условий влечёт за собой другое. Условие (II) поэтому может быть безоговорочно поставлено на место условия (I): безразлично, дано ли условие теоремы в той или в другой форме.



Черт. 230.

Иногда может случиться, что какая-либо часть условия теоремы может быть отброшена без всякого ущерба¹⁾; однако этого в общем случае не будет²⁾, и если мы встретим затруднение при доказательстве какой-либо теоремы, то мы должны всегда выяснить, не возникло ли это затруднение потому, что в процессе рассуждений мы опустили какую-либо часть данного условия.

Пример. Пусть требуется доказать следующую теорему:

В плоскости треугольника ABC выбрана точка M; если построить $\angle BAP = \angle MAC$ (черт. 231) и отложить $AP = AM$, если далее построить $\angle CBQ = \angle MBA$; $BQ = BM$ и $\angle ACR = \angle MCB$, $CR = CM$, то точки M, P, Q, R лежат на одной окружности.

В этой теореме условие и заключение будут:

(I) Условие: $\begin{cases} \angle BAP = \angle MAC; AP = AM; \\ \angle CBQ = \angle MBA; BQ = BM; \\ \angle ACR = \angle MCB; CR = CM. \end{cases}$

Заключение: Точки M, P, Q, R лежат на одной окружности.

Пусть d_1 — биссектриса угла A. Стороны AB и AC симметричны относительно этой прямой, а в силу равенства углов BAP и MAC будут симметричны и отрезки AM и AP. Следовательно, точка P симметрична с точкой M относительно прямой d_1 ; точно так же точка Q симметрична с точкой M относительно биссектрисы d_2 угла B, а точка R симметрична с точкой M относительно биссектрисы d_3 угла C. Поэтому мы могли бы попытаться преобразовать условие следующим образом:

(II) Условие: $\begin{cases} \text{Точка P симметрична с M относительно прямой } d_1; \\ \text{": Q "": M "": d_2; } \\ \text{": R "": M "": d_3. } \end{cases}$

Заключение: Точки M, P, Q, R лежат на одной окружности.

Однако, исходя из этой формы условия, невозможно доказать теорему: действительно, сформулированное таким образом предложение неверно. Неверно, что произвольная точка M и точки P, Q, R, симметричные с ней относительно трёх произвольных прямых, лежат на одной окружности.

1) Это имеет место в том же примере при переходе от условия (II) к условию (III). Условие (II), в самом деле, равносильно следующему:

(II') $\begin{cases} DX \text{ есть продолжение DB;} \\ \text{на полупрямой DX существует такая точка, что треуголь-} \\ \text{ник, имеющий эту точку своей вершиной, а отрезок DC —} \\ \text{своим основанием, имеет равные углы при основании.} \end{cases}$

Действительно, последнюю точку можно, очевидно, обозначить через A. Но эта точка может и не существовать, даже если выполнено условие (III): DX есть продолжение DB.

Для того чтобы она существовала, необходимо, в силу теоремы о внешнем угле треугольника, чтобы $\angle XDC$ был острым.

Следовательно, условие (III) может иметь место и без того, чтобы выполнялось условие (II).

2) Следует стремиться к тому, чтобы давать такие формулировки теорем, в которых условие не содержало бы ни одного лишнего элемента. В более точных вопросах, и особенно в приложениях математики, наибольшая трудность часто заключается именно в том, чтобы выяснить, какими из имеющихся данных следует воспользоваться для решения вопроса.

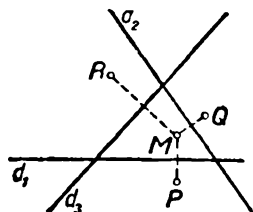
В этом можно убедиться при одном взгляде на чертёж 232, или ещё, принимая во внимание, что любые три точки P, Q, R можно рассматривать как симметричные с некоторой точкой M относительно прямых d_1, d_2, d_3 — перпендикулярных в серединах отрезков MP, MQ, MR .

Таким образом, мы сделали ошибку, заменив формулировку (I) теоремы формулировкой (II). Ошибка заключается в том, что прямые d_1, d_2, d_3 не произвольны: они служат биссектрисами углов данного треугольника и потому проходят через одну точку. Следовательно, правильной формулировкой преобразованного условия теоремы будет следующая ¹.

(II') Условие: $\begin{cases} \text{Точка } P \text{ симметрична с точкой } M \text{ относительно прямой } d_1; \\ \text{ " } Q \text{ " " " " " } M \text{ " " } d_2; \\ \text{ " } R \text{ " " " " " } M \text{ " " } d_3; \end{cases}$
прямые d_1, d_2, d_3 проходят через одну точку O ;

эта форма условия непосредственно приводит к результату, так как непосредственно очевидно, что четыре точки M, P, Q, R лежат на одном круге с центром в точке O .

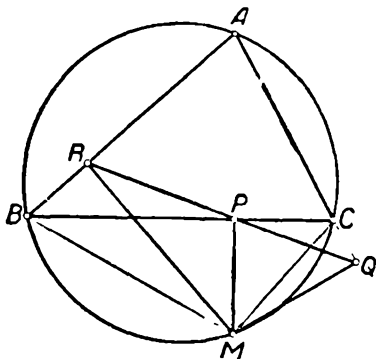
276. Вместо того, чтобы преобразовывать условие теоремы так, чтобы сблизить его с заключением теоремы, часто оказывается предпочтительнее сначала обратить внимание на заключение и постараться заменить первоначальное заключение другим, из которого вытекает первое и которое легче было бы вывести из условия теоремы.



Черт. 232.

Пример. Рассмотрим теорему (упр. 72):

Если из точки M , лежащей на окружности, описанной около треугольника ABC , опустить перпендикуляры MP , MQ , MR на его стороны, то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.



Черт. 233.

Мы докажем, что точки P, Q, R (черт. 233) лежат на одной прямой, если докажем, что углы BPR и CPQ , получающиеся при соединении точки P с точками Q и R , будут равны между собой. Следовательно, в то время как условие теоремы будет:

Точки A, B, C, M лежат на одном круге; MP, MQ, MR соответственно перпендикулярны к BC, CA, AB , заключению теоремы мы можем придать следующую форму:

$$\angle BPR = \angle CPQ.$$

Но так как углы BRM и BPM — прямые, то четырёхугольник $BRPM$ может быть вписан в круг (п. 81), и тоже четырёхугольник $CQMP$ может быть $\angle CMP$. Следовательно, нам достаточно следующее заключение:

$$\angle BMR = \angle CMQ.$$

1) Эта новая формулировка условия теоремы может заменить первоначальную: три прямые, проходящие через одну точку, можно, вообще говоря, рассматривать как биссектрисы углов некоторого треугольника (см. упр. 38).

Первоначальное заключение, таким образом, заменено другим, более простым для доказательства; читатель легко докажет это последнее заключение ¹⁾.

Пользуясь при доказательстве теоремы этим новым способом, мы должны, конечно, подобно тому, как мы это делали выше, убедиться в том, что, изменив заключение, мы не стремимся доказать больше того, что содержится в первоначальном заключении, за исключением тех случаев, когда у нас есть основание думать, что и новое заключение, более общее, чем первоначальное, также будет справедливо.

277. Теперь следует сделать ещё одно важное замечание, на котором мы не имели возможности остановиться в самом начале наших указаний. Его следует использовать непосредственно по ознакомлении с формулировкой той теоремы, которую требуется доказать.

Замечание это заключается в том, что многие теоремы могут быть сформулированы несколькими различными способами. Мы приводили соответствующие примеры в тексте книги.

Пример I. Мы отметили в п. 32, что предложение:

Всякая точка, одинаково удалённая от A и B, лежит на перпендикуляре, восстановленном в середине отрезка AB,
можно сформулировать так:

Всякая точка, которая не лежит на перпендикуляре, восстановленном в середине отрезка AB, не одинаково удалена от двух концов отрезка.

Мы видели ²⁾, что здесь имеется общее положение: предложение, противоположное какому-либо предложению, и предложение, обратное тому же предложению, равносильны.

К тому же порядку идей относится и метод доказательства, называемый *доказательством от противного*. Этот метод состоит в том, чтобы показать, что получается противоречие, если предположить условие теоремы выполненным, а её заключение неверным.

Пример II. Предложение (п. 23):

Во всяком равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине перпендикулярна к основанию и делит его пополам,
сводится, как мы видели ³⁾, к любому из следующих:

Высота равнобедренного треугольника, проведённая из его вершины, проходит через середину основания и делит угол при вершине пополам.

¹⁾ В своём рассуждении мы допускали, что точки фигуры расположены так, как это показано на чертеже (черт. 233). Следовало бы видоизменить доказательство так, чтобы оно не зависело от этого расположения; это легко выполнить, пользуясь замечаниями, сделанными в п. 82. Однако в данном случае можно всегда предполагать, что имеет место случай, к которому относится наше рассуждение: для этого достаточно изменить в случае надобности расположение букв A, B, C.

²⁾ См. п. 32, примечание 2°. *Поим. р.д. перевода.*

³⁾ Напомним (ср. ещё п. 41), что равносильность обеих формулировок происходит из того, что существует только одна биссектриса угла при вершине, только одна высота, только один перпендикуляр в середине основания, и т. д.

Перпендикуляр к основанию, восстановленный в его середине, проходит через вершину равнобедренного треугольника и является биссектрисой угла при вершине.

И т. д.

Ясно, что этот пример носит, как и предыдущий, общий характер, мы встречались с тем же обстоятельством, например, в п. 63. Впрочем, с ним приходится встречаться с самого начала геометрии. Доказательство теоремы, обратной теореме п. 38, проведенное в п. 41, представляет собою пример доказательства такого рода.

Эти два случая, в которых данная формулировка может быть заменена другой формулировкой, ей эквивалентной, не являются единственными. В каждом отдельном случае следует всегда подумать о различных возможных формулировках одной и той же теоремы. Очевидно, существенно иметь их в виду, чтобы выбрать из них ту, которая наиболее подходит для доказательства; короче говоря, *следует ставить перед собой вопрос таким образом, чтобы его решение становилось возможно легче*¹⁾.

278. Этим последним замечанием мы заканчиваем изложение тех основных правил, на которые мы хотели здесь указать. Очень полезно изучить с точки зрения этих принципов те доказательства, которые были даны в тексте книги, ставя перед собой, например, вопросы, аналогичные следующим.

При доказательстве теоремы о медианах треугольника (п. 36) мы рассматривали середины отрезков BG и CG (черт. 57). Можно ли было логическим путём прийти к такому построению? Можно ли заменить его другими построениями? ²⁾

Можно ли заменить формулировку теоремы п. 55 (прямая, соединяющая середины сторон треугольника) другой, ей равносильной? Можно ли доказать теорему в этой последней формулировке непосредственно?

Обе ли части заключения упражнения 8 предполагают, что данная точка лежит внутри треугольника? Не указывает ли ответ на этот вопрос на ту теорему, которой следует воспользоваться для доказательства каждой из двух частей этого заключения?

В каком месте доказательств, данных в п. 27, мы воспользовались предположением, что объемлемый многоугольник — выпуклый?

И т. д.

б) Геометрические места. Задачи на построение.

279. Сказанное только что о доказательствах предлагаемых теорем избавляет нас от необходимости подробно останавливаться на других возможных формах геометрических задач; решение последних следует искать, руководствуясь теми же принципами, что и выше, как мы это сейчас увидим при рассмотрении вопроса о геометрических местах и о задачах на построение.

Геометрические места. Некоторые геометрические места были нами рассмотрены в самом тексте книги, например, геометриче-

¹⁾ „Каждой задаче следует придать такую форму, чтобы её можно было решить“ (Абель).

²⁾ Одно из таких построений дано в упражнении 37.

ское место точек, одинаково удалённых от двух данных точек или от двух данных прямых, геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, и т. д.

Другие геометрические места очевидны сами по себе; например, точка, обладающая тем свойством, что прямая, соединяющая её с данной точкой A , параллельна данной прямой XU , имеет своим геометрическим местом прямую, проходящую через точку A и параллельную XU .

Таким образом, если дано какое-либо свойство точки M или общее — какие-либо свойства изменяемой фигуры, в состав которой входит точка M , то для отыскания геометрического места точки M следует преобразовать данные условия в другие, дающие для точки M уже известное геометрическое место.

Мы имеем здесь, следовательно, перед собой вопрос, аналогичный тому, который стоял перед нами, когда требовалось доказать теорему. В самом деле, там требовалось из совокупности данных свойств (условие) вывести другие свойства, так же заданные (заключение). В данном случае требуется точно так же преобразовать данное условие. Единственное различие состоит в том, что в данном случае известна отправная точка — условие, но не известен конечный результат — заключение: мы знаем только, что этот результат должен нам дать искомое геометрическое место. (Ясно, что при этом следует прежде всего искать общие свойства различных положений подвижной фигуры, и, в частности, свойства, не изменяющиеся при её перемещении.) Следовательно, здесь приходится идти тем же путём, как и выше, и, нам ничего не оставалось бы, как только повторить те указания, которые мы только что сделали.

Одно из этих указаний следует соблюдать здесь даже с большей строгостью, чем при доказательстве теорем. Мы уже видели, что в вопросах, относящихся к доказательству теорем, иногда случается, что при последовательных преобразованиях условия некоторые части его могут оставаться неиспользованными. Подобное обстоятельство никогда не может встретиться при отыскании геометрического места, так как искомое геометрическое место должно состоять из точек, удовлетворяющих данному условию, и только из них. Следовательно, мы должны каждый раз проследить за тем, чтобы наше заключение было вполне равносильно условию.

Мы делали это для большинства геометрических мест, которые мы искали (см. пп. 33, 36, 77 и др.); мы опускали эту вторую часть рассуждения только в некоторых случаях, где она представлялась настолько лёгкой, что на ней не было надобности останавливаться.

280. Задачи на построение. Предположим далее, что требуется построить геометрическую фигуру, удовлетворяющую данным условиям. Результат решения такого рода задачи может быть весьма различным, в зависимости от того, будет ли число данных условий как раз достаточным для определения неизвестной фигуры или нет.

Пример I. Пусть *требуется построить прямую, касательную к данной окружности.*

Касательная в любой точке данной окружности будет отвечать условиям задачи. Имеется бесчисленное множество решений; следовательно, *данных условий недостаточно* для определения искомой фигуры. Такая задача называется *неопределённой*.

Пример II. Пусть требуется построить общую касательную к двум данным окружностям.

Очевидно, что по сравнению с предыдущим примером мы имеем одним условием больше.

Теперь задача — *определённая*: она имеет (самое большое) четыре решения (п. 93).

Пример III. Пусть требуется построить общую касательную к трём данным окружностям.

В общем случае не существует ни одной прямой, удовлетворяющей поставленным условиям. Действительно, первые две окружности имеют (самое большое) четыре общие касательные, так что искомой прямой может быть только одна из этих четырёх прямых, но третья окружность, заданная произвольно, в общем случае, не будет касаться ни одной из этих прямых. Следовательно, задача будет, за исключением некоторых частных случаев, *невозможной*. На искомую фигуру наложено *слишком много* условий.

Задачи, предлагаемые учащимся, являются, как общее правило, определёнными.

281. Задача на построение часто сводится к построению некоторой точки.

Пример I. Провести окружность через три данные точки (п. 90). Достаточно определить её центр.

Пример II. Построить треугольник, зная одну из сторон, противолежащий угол и соответствующую высоту.

После того как выбрано положение данной стороны (где именно — безразлично), остаётся только построить противолежащую вершину.

В этом случае обычно применяемым способом построения является *метод геометрических мест*, который заключается в том, чтобы вывести из условий задачи два геометрических места, на которых должна лежать искомая точка: пересечение обеих линий и определит положение этой точки.

Решение примера I. Чтобы найти центр окружности, проходящей через три данные точки A , B , C , достаточно заметить, что требование, чтобы искомая точка была равноудалена от точек A и B , даёт одно геометрическое место, а требование, чтобы искомая точка была равноудалена от точек A и C , — другое геометрическое место.

Решение примера II. Пусть требуется построить треугольник ABC , зная сторону BC , противолежащий угол A и соответствующую высоту. Если выбрано положение стороны BC , мы имеем два геометрических места для точки A : 1) дуга, вмещающая данный угол и построенная на BC , как на хорде; 2) прямая, параллельная BC и отстоящая от неё на расстоянии, равном высоте.

Условие, налагаемое на положение точки, называется *простым условием*, если существует некоторая линия — геометрическое место точек, удовлетворяющих этому условию. При этом точка определяется двумя простыми условиями, и если известны два соответствующих гео-

метрических места¹⁾, то искомая точка найдётся как точка их пересечения.

Вообще, всякая фигура определяется некоторым числом простых условий (мы вернёмся к этому вопросу во II томе, кн. X и Прибавление F). Многоугольник, имеющий n сторон, определяется по величине и положению $2n$ простыми условиями, так как при этом требуется определить положение n точек. Чтобы определить его только по величине и по форме, достаточно $2n - 3$ простых условий, так как можно задать произвольно одну вершину и направление одной из выходящих из этой вершины сторон. Это число $2n - 3$ равняется n для треугольника, но не равняется n , если n превосходит 3; отсюда и вытекают те замечания, которые были нами сделаны в п. 46а (примечание 3^о) и п. 147 (примечание).

282. В силу этого, когда мы встречаемся с какой-либо задачей на построение, мы должны постараться преобразовать условие задачи таким образом, чтобы свести её к одной из тех задач, которые мы умеем решать; например, преобразовать условие так, чтобы вывести из него два геометрических места для одной из точек, связанных с искомой фигурой.

Для этого мы рассматриваем фигуру, которая по предположению удовлетворяет поставленным условиям²⁾, и эти условия служат нам как бы условием теоремы; однако, как и в случае задач на геометрические места, заключение мы должны найти сами.

И в этом случае следует соблюдать те же общие правила, как и при доказательстве теорем. Как и в случае задач на геометрические места, полученное заключение должно быть вполне равносильно условию. Действительно, если, с одной стороны, из условий задачи должно следовать найденное построение, то, с другой стороны, мы должны убедиться в том, что любая фигура, построенная найденным нами способом, необходимо удовлетворяет всем условиям задачи.

Мы не будем подробнее останавливаться на тех особенностях, которые представляют различные задачи на построение. Ограничимся в этом направлении ссылкой на книгу Петерсена „Методы и теории решения геометрических задач на построение“³⁾, книгу во всех отношениях превосходную, из которой мы многое позаимствовали.

с) Методы геометрических преобразований.

283. Если учащийся привыкнет применять на практике предыдущие указания; если он будет подставлять, в известном смысле механически, определения на место определяемых понятий; если он будет уметь

¹⁾ В элементарной геометрии мы ставим своей целью решение задач при помощи циркуля и линейки, т. е. рассматриваем только геометрические места, представляющие прямые или окружности.

²⁾ Мы говорили выше в таких случаях, например в п. 93: „Предположим, что задача решена“.

³⁾ Имеется русский перевод — Харьков, 1883. *Прим. ред. перевода.*

быстро находить различные формы, которые можно придать той задаче, которую он намерен решить, то он очень скоро научится решать многие задачи элементарной геометрии. Тем не менее некоторые из этих задач могут показаться ему очень трудными или даже неразрешимыми, в то время как в действительности они решаются иногда весьма просто; однако решение этих задач не получается непосредственно теми рассуждениями, которыми мы пользовались до сих пор. Они требуют для своего решения других способов, служащих для упрощения задачи, о которых нам и осталось рассказать. Эти способы упрощения представляют собой методы геометрических преобразований.

Собственно говоря, после того что было сказано выше, мы в праве были бы назвать все геометрические методы „методами преобразований“. Однако мы относим это название исключительно к тем методам, которые состоят в переходе от некоторых свойств одной фигуры к соответствующим свойствам *другой* фигуры.

Определить какое-либо *геометрическое преобразование* — значит поставить любой данной фигуре в соответствие некоторую другую фигуру по определённом закону так, чтобы вторая фигура была вполне определена, как только дана первая фигура, и обратно. На основании каждого свойства одной фигуры можно сделать заключение о некотором свойстве второй фигуры, которое можно в известном смысле рассматривать как перевод данного свойства первой фигуры.

Примеры. Мы определили выше фигуру F' , *гомотетичную* F относительно данного центра при данном коэффициенте подобия. Если фигура F дана, то можно построить фигуру F' . Мы видели, что прямой линии фигуры F соответствует в F' также прямая, что любому треугольнику фигуры F соответствует в F' подобный ему треугольник, любой окружности фигуры F — окружность в фигуре F' , и т. д.

Точно так же, если дана фигура F , то можно построить фигуру F' , которая получается из неё с помощью данного вращения, поступательного перемещения или симметрии; или общее — фигуру F' , подобную фигуре F , так, что двум данным точкам A и B фигуры F будут соответствовать две данные точки A' и B' в фигуре F' . Свойства фигуры F' непосредственно вытекают из свойств фигуры F .

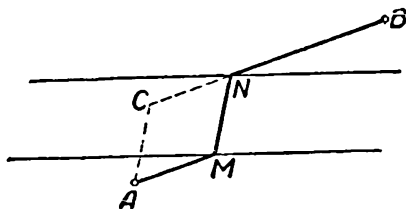
284. Однако не всегда следует применять преобразование ко *всей* рассматриваемой фигуре. Напротив, во многих случаях оказывается удобнее преобразовывать только часть фигуры.

Последнее имеет, в частности, место в случае тех простых преобразований, о которых мы только что говорили: перемещения, симметрии, гомотетии и общего случая подобия. В большинстве случаев нет никакого смысла применять эти преобразования ко всей фигуре, поскольку свойства преобразованной фигуры не проще и не сложнее свойств первоначальной фигуры: обе фигуры обладают одними и теми же свойствами¹⁾. Напротив, во многих задачах бывает необходимо подвергнуть одному из этих преобразований определённую часть фигуры.

¹⁾ Геометрия как раз изучает те свойства фигур, которые не изменяются при их перемещении.

Пример I. Рассмотрим следующую задачу (упр. 32): *Даны две параллельные прямые и две точки A и B , находящиеся вне этих параллельных и расположенные по обе стороны от них; найти ломаную линию наименьшей длины, соединяющую точки A и B , если вершины этой ломаной лежат на данных прямых и отрезок ломаной между обеими параллельными имеет данное направление.*

Пусть $AMNB$ — искомая ломаная (черт. 234); точка N получается из точки M с помощью поступательного перемещения, которое можно, очевидно, считать известным, так как отрезки, отсекаемые двумя данными параллельными прямыми на любой прямой данного направления, имеют одну и ту же длину. Мы можем выполнить это поступательное перемещение над отрезком AM ; точка A преобразуется в точку C , положение которой известно, а отрезок AM — в отрезок CN той же длины. Отсюда легко вывести, что точки B, N, C должны лежать на одной прямой.



Черт. 234.

Аналогичные соображения применимы к задачам 118—121 (книга вторая).

Пример II. В упражнении 14 отрезок, симметричный с отрезком AM относительно данной прямой, будет лежать на одной прямой с отрезком BM .

285. Однако есть некоторые задачи на построение, для которых следует подвергнуть перемещению, симметрии или преобразованию подобия всю рассматриваемую фигуру. Преимущество, которое может дать это преобразование, состоит в замене неизвестных элементов первоначальной фигуры известными элементами преобразованной фигуры.

Пример. Пусть требуется в данный четырёхугольник $ABCD$ вписать другой четырёхугольник, подобный некоторому данному четырёхугольнику $mnpq$.

Существует фигура, которая подобна искомой и в которой искомому четырёхугольнику $MNPQ$ соответствует четырёхугольник $mnpq$. Четырёхугольнику $ABCD$ будет соответствовать четырёхугольник $abcd$, описанный около $mnpq$, и который, следовательно, можно построить, пользуясь решением упражнения 213.

286. Остальные преобразования, которые мы рассматривали, изменяют в отличие от преобразований, перечисленных в п. 284, свойства преобразуемых фигур более или менее заметным образом.

Такова, например, *инверсия*, преобразующая каждую первоначальную фигуру в окружность, или преобразование с помощью *взаимных поляр*. С помощью этих преобразований мы упростили в дополнениях к третьей книге доказательства нескольких теорем.

Другим преобразованием, о котором мы только упомянули и которое следует здесь отметить, является *перспектива*. В том виде, в котором мы имели возможность её определить в геометрии на плоскости, она применима только к фигурам, состоящим из точек, лежащих на одной прямой. Преобразованная фигура получается путём соединения каждой из точек первоначальной фигуры с определённой точкой, лежащей вне данной прямой; пересекая полученные таким образом прямые неко-

торой секущей и выполняя над полученными точками произвольное перемещение, мы и получаем преобразованную фигуру.

287. Следует отметить существенное различие, которое существует между преобразованием с помощью взаимных поляр и другими перечисленными преобразованиями, как-то: подобием, инверсией и перспективной. Последние представляют собой *точечные* преобразования, т. е. такие, в которых каждой точке первоначальной фигуры соответствует определённая точка преобразованной фигуры. Этим свойством не обладает преобразование с помощью *взаимных поляр*, в котором каждой точке одной из фигур соответствует в другой фигуре прямая.

Другое преобразование, которым мы в нескольких местах пользовались в настоящей книге, обладает, как и предыдущее, тем свойством, что оно не является точечным преобразованием. Это преобразование, которое можно назвать *расширением* (*dilatation*), мы применяли к фигурам, образованным окружностями и прямыми. При этом преобразовании мы увеличиваем или уменьшаем (в зависимости от обстоятельств) радиус каждой окружности на одну и ту же данную величину a . Конечно, при этом может случиться, что радиус какой-либо окружности обратится в нуль: соответствующая окружность обратится в точку. Обратно, точку следует рассматривать при этом преобразовании как окружность с радиусом, равным нулю, и она преобразуется поэтому в окружность радиуса a . Что касается до прямых, входящих в состав преобразуемой фигуры, то каждая из них переносится перпендикулярно к её направлению в ту или другую сторону на то же самое расстояние a ¹⁾.

Существенное свойство расширения состоит в том, что две линии, касающиеся друг друга, остаются касательными и после выполнения расширения при надлежащем выборе его направления (см. упр. 59)²⁾. Этим именно свойством расширения мы и пользовались в пп. 93 и 231.

288. Приведённые формы. Поскольку целью геометрического преобразования является упрощение преобразуемой фигуры, следует стремиться в каждом отдельном случае к наибольшему упрощению.

С этой целью заметим, что перечисленные выше различные геометрические преобразования содержат в себе произвольные элементы. Так, например, в случае гомотетии необходимо выбрать центр подобия и коэффициент подобия; в случае инверсии — полюс инверсии и её

¹⁾ Мы видим, что расширение окружности или прямой можно выполнить всегда в двух противоположных направлениях; в каждом отдельном случае приходится выбирать одно из этих двух направлений.

²⁾ Понятие расширения обобщается (с помощью соображений, которые выходят из рамок данной книги) и на фигуры, в состав которых входят произвольные кривые, можно доказать, что и в таком обобщённом виде это преобразование сохраняет свойство преобразовывать две линии, касающиеся друг друга, в две линии, которые также касаются друг друга. Этим свойством обладает и преобразование с помощью взаимных поляр, если его соответствующим образом обобщить (см. том II, п. 819).

степень¹⁾; в случае расширения — величину a , о которой говорилось в предыдущем пункте, и т. д.

Следовательно, к каждому из перечисленных видов геометрических преобразований принадлежит бесчисленное множество различных преобразований.

Из этих преобразований надо выбрать одно так, чтобы преобразованная фигура удовлетворяла одному или нескольким вполне определённым условиям. Принимая во внимание то, что было сказано в п. 280, следует брать возможно большее число таких условий. Преобразованная фигура называется в этом случае *приведённой формой* первоначальной фигуры.

Пример I. Окружность всегда можно подвергнуть такому расширению, которое преобразовывало бы её в точку: для этого достаточно выбрать величину a , равной её радиусу.

Приведённой формой фигуры, содержащей некоторую окружность C , относительно расширения будет та фигура, в которой эта окружность обращается в точку. Этой приведённой формой мы пользовались в пп. 93 и 231.

Пример II. Две окружности, имеющие общую точку, можно преобразовать с помощью одной и той же инверсии в две прямые (выбирая за полюс инверсии их общую точку; две окружности, не имеющие общих точек, — в две концентрические окружности (см. упр. 248). Иначе говоря, приведённой формой фигуры, состоящей из двух окружностей, будет совокупность двух прямых или двух концентрических окружностей, смотря по тому, имеют ли две данные окружности общие точки или нет.

Пример III. В приведённом выше, в п. 285, примере мы воспользовались в качестве приведённой формы данной фигуры относительно подобия той формой преобразованной фигуры, которая определяется требованием, чтобы искомым четырёхугольником преобразовался в данный четырёхугольник *тпрq*.

289. Инварианты. Преимущества геометрического преобразования могли бы быть лишь кажущимися, если бы оказалось, что при упрощении известных свойств данной фигуры усложнились другие её свойства. Следовательно, мы должны выполнять это преобразование только в том случае, если различные свойства фигуры, упоминаемые в условии задачи, изменяются при данном преобразовании достаточно простым образом.

Оказывается, что почти во всех типах преобразований, обзор которых мы только что дали, известные свойства фигуры не испытывают никакого изменения; эти свойства, как говорят, *инвариантны*.

Пример I. Мы видели, что в случае гомотетии углы преобразованной фигуры равны углам первоначальной фигуры, что разными остаются отношения отрезков, и т. д.

Пример II. Мы видели, что расширение преобразует две окружности, касающиеся друг друга, в две другие окружности, также касающиеся друг друга. Касание есть свойство, инвариантное по отношению к преобразованию расширения.

¹⁾ Мы видели (п. 215), что наибольшее значение имеет, вообще говоря, выбор полюса инверсии.

Пример III. Угол между двумя линиями представляет собой свойство, инвариантное по отношению к инверсии (п. 219).

И т. д.

290. Выполнение преобразования не может вызвать никаких затруднений, если в условии задачи упоминаются только инвариантные свойства фигуры. В этом случае возможно, в частности, всегда предполагать, что заданная фигура уже преобразована в её приведённую форму.

Примеры. Касание есть свойство, сохраняющееся при расширении; поэтому при отыскании общих касательных к двум окружностям можно предполагать, что одна из них обращается в точку. Мы следовали этому пути в п. 93.

То же самое относится и к отысканию окружности, касательной к трём данным окружностям (п. 231).

Касание есть свойство инвариантное также и по отношению к инверсии. Следовательно, при отыскании окружности, касательной к трём данным окружностям, можно предполагать, что две из них обращаются в прямые линии или что две из них концентричны (упр. 264 и 265).

То же самое относится и к доказательству теорем, аналогичных следующей: *все окружности, пересекающие две данные окружности по постоянным углам, касаются двух определённых окружностей*; или теоремы, составляющей содержание задачи 285, и т. д.

291. Группы преобразований¹⁾. Рассмотренное свойство тех преобразований, о которых мы говорили — существование инвариантов, является следствием другого их основного свойства, о котором мы также скажем несколько слов.

Произведением двух или нескольких преобразований называется преобразование, равносильное этим преобразованиям, выполненным в том порядке, в каком они перечислены²⁾. Иначе говоря, если преобразование S преобразует фигуру F в фигуру F' , а преобразование T , применённое к фигуре F' , преобразует её в фигуру F'' , то произведением обоих преобразований будет то преобразование, с помощью которого происходит переход от F к F'' .

Пример. Результат, доказанный в п. 102а, может быть сформулирован следующим образом: *произведение двух симметрий представляет собою либо вращение, либо поступательное перемещение*.

Установив определение произведения преобразований, мы будем говорить, что некоторая совокупность преобразований представляет

¹⁾ Конец этого прибавления рассчитан главным образом на тех читателей, которые знакомы с содержанием „Дополнений к третьей книге“.

²⁾ Произведение двух преобразований изменяется, вообще говоря, с изменением порядка сомножителей. Так, произведение двух симметрий относительно двух различных осей будет либо вращением, либо поступательным перемещением. В первом случае соответствующий угол поворота будет иметь то же направление, как и угол поворота, совмещающего первую ось симметрии со второй, и вдвое большую величину. Во втором случае соответствующее поступательное перемещение будет иметь то же самое направление, как и поступательное перемещение, совмещающее первую ось симметрии со второй, и вдвое большую величину.

собой группу, если произведение любых двух из этих преобразований есть преобразование той же совокупности.

Так, *совокупность всех гомотетий есть группа*: это предложение равносильно утверждению, что две фигуры, гомотетичные третьей, гомотетичны между собой. Совокупность всех гомотетий, центры которых лежат на одной прямой, есть также группа, так как мы знаем, что центр гомотетии, являющейся произведением двух других гомотетий, лежит на одной прямой с центрами этих двух гомотетий.

Все перемещения образуют группу, так как две плоские фигуры, равные одной и той же третьей фигуре и имеющие с ней одинаковое направление вращения, равны между собой и имеют одинаковое направление вращения.

292. Совокупность всех инверсий не образует группы. Произведение двух инверсий не есть инверсия. Однако можно получить результат, аналогичный предыдущему, рассматривая преобразования, состоящие из нескольких последовательных инверсий.

Назовём для краткости преобразованием S всякое произведение каких-либо инверсий (или симметрий), взятых в любом числе. Преобразования этого типа содержат как частный случай все перемещения, так как перемещение можно разложить на две симметрии, все гомотетии, так как гомотетия получается как произведение двух инверсий с общим полюсом, но с различными степенями, а следовательно, и все преобразования подобия, так как подобие получается как гомотетия, сопровождаемая или не сопровождаемая перемещением и симметрией.

Может показаться, судя по определению преобразований S , что для того, чтобы их все исчерпать, необходимо рассматривать преобразования, состоящие из n инверсий, где n последовательно пробегает все целые числа, и что, останавливаясь на каком-либо значении n , мы получим лишь часть рассматриваемых преобразований.

Однако это не так: любое преобразование S может быть сведено к инверсии и одной, двум или трём симметриям, предшествующим этой инверсии или следующим за ней, за исключением того случая, когда данное преобразование является простым подобием (упр. 252). Следовательно, достаточно четырёх простых операций (инверсий или симметрий), чтобы получить любое из преобразований S .

Так как каждая из любых двух операций S равносильна некоторой последовательности инверсий, то же самое имеет место и для их произведения: *операции S образуют группу, которую можно было бы для краткости назвать группой инверсий.*

293. Две фигуры F , F' , которые преобразуются друг в друга одним из преобразований данной группы, называются *эквивалентными* (homologues) относительно этой группы. Например, две фигуры, равные между собой и имеющие одинаковое направление вращения, эквивалентны относительно группы, образованной всеми перемещениями.

В силу определения *группы*, две фигуры F , F'' , эквивалентные третьей фигуре F' , эквивалентны между собой, так как преобразование, с помощью которого происходит переход от F к F'' , есть произ-

ведение тех преобразований, которые преобразуют, с одной стороны, F в F' , с другой стороны, F' в F'' .

Приведённая форма F_0 фигуры F относительно данной группы есть та из фигур, эквивалентных F относительно этой группы, которая удовлетворяет некоторым заданным условиям. Если этих условий будет достаточное число и они выбраны надлежащим образом, то их достаточно для полного определения фигуры F_0 , являющейся приведённой формой фигуры F .

Предположим, что это так и есть: если мы применим к фигуре F какое-либо из преобразований данной группы, то полученная при этом новая фигура F' будет иметь своей приведённой формой также F_0 , так как фигуры, эквивалентные фигуре F , будут в то же время эквивалентными фигуре F' , и обратно.

Так как приведённая форма некоторой фигуры F будет та же самая, как и приведённая форма любой фигуры, получаемой из F с помощью преобразований группы, то *всякое свойство приведённой фигуры есть инвариантное свойство фигуры F* .

294. Поясним сказанное на примере.

Пусть дана фигура, образованная четырьмя произвольными точками A, B, C, D ; поставим себе задачей найти инварианты этой фигуры относительно группы инверсий. С этой целью рассмотрим фигуру, обратную данной фигуре, принимая за полюс инверсии I точку A . Если точки B, C, D имеют своими обратными точками точки b, c, d , то мы имеем фигуру, эквивалентную первой (её приведённую форму), в которой одна из четырёх точек (та, которая соответствует точке A) удалена в бесконечность. Повторяя для этого частного случая то общее рассуждение, на которое мы только что указывали, мы убедимся, что углы треугольника bcd являются инвариантами фигуры $ABCD$ (это как раз то предложение, непосредственное доказательство которого гребутся найти в упр. 270).

Пусть A', B', C', D' — точки, получающиеся из точек A, B, C, D с помощью некоторой инверсии T . Поступим с точками A', B', C', D' так, как мы выше поступали с A, B, C, D ; пусть b', c', d' — фигура, которая получается из $B'C'D'$ с помощью инверсии I' , имеющей своим полюсом точку A' . Фигура, состоящая из точек b', c', d' и точки, лежащей в бесконечности, получается из фигуры, состоящей из точек b, c, d и точки, лежащей в бесконечности, с помощью одного из преобразований нашей группы, а именно с помощью произведения трёх инверсий I, T, I' . Это преобразование сводится, как мы знаем, либо к одной инверсии, сопровождаемой симметриями, либо к подобию. Но первое предположение в данном случае невозможно, по крайней мере, в том случае, когда инверсия, о которой идёт речь, есть инверсия в собственном смысле слова; действительно, инверсия необходимо преобразовывала бы точку, лежащую в бесконечности, в точку, лежащую в конечной части плоскости (а именно — в полюс инверсии). Следовательно, треугольники bcd и $b'c'd'$ подобны между собою, что и гребовалось доказать.

Следовательно, углы и отношения сторон треугольника bcd действительно являются инвариантами фигуры $ABCD$ относительно данной группы. Из этих инвариантов независимыми будут только два, т. е. достаточно задать два из них, чтобы знать все остальные: действительно, знания двух углов треугольника bcd достаточно, чтобы построить треугольник, ему подобный.

295. Мы только что видели, что существование инвариантов вытекает из существования группы; обратно, совокупность всех преобразований, обладающих одними и теми же инвариантами, образует группу: в самом деле, если какое-либо свойство фигуры не изменяется при двух данных преобразованиях, то то же свойство фигуры не изменяется и при преобразовании, представляющем собой произведение этих двух преобразований.

Пример I. Гомотетия преобразует все отрезки в отрезки, параллельные первоначальным и им пропорциональные. Обратно, любое точечное преобразование, обладающее этими двумя свойствами, есть гомотетия (п. 142). Следовательно, совокупность всех гомотетий образует группу. Рассуждение, приведённое в п. 144, представляет собою лишь видоизменённую форму того рассуждения, которое мы только что провели.

Пример II. Перспективное преобразование сохраняет сложное отношение четырёх точек; и обратно, любое преобразование, выполняемое над точками одной прямой, которое не изменяет сложного отношения, будет перспективным преобразованием¹⁾.

Следовательно, все перспективные преобразования образуют группу.

Мы ограничимся здесь этими общими указаниями относительно геометрических преобразований, а за подробностями, касающимися их применения, отошлём читателя к цитированной уже книге Петерсена.

ПРИБАВЛЕНИЕ В.

О ПОСТУЛАТЕ ЭВКЛИДА.

I.

296. Мы допустили в качестве аксиомы (в п. 40), что *через данную точку нельзя провести более одной прямой, параллельной данной прямой*.

Это предложение или, точнее говоря, следующее равносильное ему предложение (п. 41, следствие 1):

Если две прямые линии образуют с одной и той же секущей два внутренних односторонних угла, сумма которых отлична от двух прямых, то они не параллельны и пересекаются с той стороны от секущей, где сумма углов меньше двух прямых.

¹⁾ Это можно доказать, перемещая преобразованию фигуру так, чтобы одна из её точек совпала со своей соответственной и обе прямые были бы отличны друг от друга; при этом вопрос сводится к разобранным в упражнении 233.

фигурирует также среди предложений, принимаемых за очевидные в „Началах“ греческого геометра Эвклида¹⁾, где в первый раз и с замечательным совершенством были полностью изложены основы геометрии, а также и во всех последующих сочинениях (для которых это фундаментальное сочинение Эвклида всегда служило основой).

Однако продолжателей Эвклида, как в древности, так и в средние века и в новое время, постоянно удивляло место, отводимое этому предложению, которое в действительности далеко не носит того очевидного характера, которым обладают другие предложения, принимаемые без доказательства, и вовсе не представляется а priori более очевидным, чем многие из тех предложений, которые обычно доказываются. В частности, им казалось странным, что Эвклид принимает как самоочевидное такое свойство прямых, которое вовсе не является общим свойством всех линий²⁾ (значение этого замечания будет видно из дальнейшего).

297. Поэтому делались многочисленные попытки доказать постулат Эвклида. Все эти попытки оказались неудачными. В частности, с целью доказать этот постулат от противного были выведены всевозможные следствия из предположения, что постулат Эвклида неверен; получился ряд заключений, сильно отличающихся от тех, которые получаются в обычной теории параллельных. Однако, как бы далеко ни развивались эти следствия, в них нельзя было заметить (по крайней мере, поскольку рассуждения были правильны) ни между собой, ни с доказанными ранее предложениями никакого противоречия, которое доказывало бы невозможность сделанного предположения.

298. Гениальный математик Гаусс³⁾ задался вопросом, существует ли такое противоречие и не является ли предположение, что постулат Эвклида не имеет места, совместимым с другими аксиомами геометрии и вытекающими из них следствиями; другими словами, не окажется ли невозможным доказать рассматриваемое предложение.

Около того же времени Лобачевский⁴⁾ и Болиан (Bolyai)⁵⁾ высказали, независимо друг от друга, ту же гипотезу и построили геометрию, в которой все предложения, предшествующие постулату Эвклида или от него независимые, остаются теми же, как и в обычной геометрии, в то время как все остальные предложения видоизменяются. Результаты, к которым мы приходим в такой геометрии (называемой *неэвклидовой* геометрией), во многих случаях носят совершенно парадоксальный характер и противоречат нашим обычным взглядам на вещи; однако, какими бы удивительными ни казались они на первый взгляд, среди

¹⁾ Около 300 г. до н. э.

²⁾ В а л л и с (Wallis), 1663. — См. Stäckel и Engel, Die Theorie der Parallellinien, von Euklid bis Gauss, Leipzig, 1895.

³⁾ 1777—1855 гг.

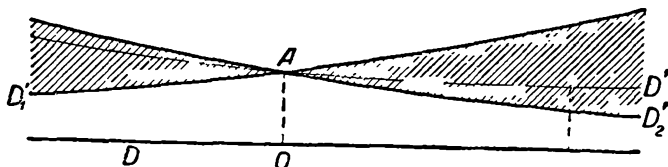
⁴⁾ 1793—1856 гг.

⁵⁾ 1802—1860 гг. — Существование неэвклидовой геометрии более или менее четко предвиделось с различных точек зрения (ср. цитированную работу Stäckel und Engel).

них нет ни одного, нелепость которого могла бы быть установлена. Приводим некоторые из наиболее простых предложений.

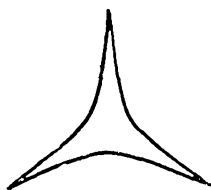
В неевклидовой геометрии:

Через точку A , лежащую вне прямой D , можно провести *бесчисленное множество* прямых, лежащих с этой прямой в одной плоскости, но не пересекающих этой прямой¹⁾. Все эти *непересекающие* прямые расположены внутри некоторого угла с вершиной в точке A (и угла, ему вертикального). Этот угол, называемый *углом параллелизма*²⁾, увеличивается с увеличением расстояния точки A от прямой (черт. 235).



Черт. 235.

Любая прямая D' , лежащая *внутри* угла параллелизма, имеет с прямой D один (и только один) общий перпендикуляр, который даёт кратчайшее расстояние между двумя прямыми, так что если точка M описывает прямую D' , неограниченно удаляясь от этого общего перпендикуляра в ту или другую сторону, то её расстояние от прямой D всё время возрастает и притом возрастает неограниченно. Иначе обстоит дело для прямых D_1' , D_2' , служащих *сторонами* угла параллелизма: каждая из этих двух прямых



Черт. 236.

неограниченно приближается к прямой D , не пересекая её, если продолжать её в том направлении, которое образует острый угол с перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую D ; если точка M удаляется в бесконечность по одной из этих прямых в выбранном таким образом направлении, то её расстояние от прямой D стремится к нулю. Геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой, есть кривая линия.

Сумма углов треугольника *меньше* двух прямых, причём разность между двумя прямыми и суммой углов пропорциональна площади треугольника. Отсюда следует, что площадь любого треугольника меньше определённой величины, как бы велики ни были его стороны (когда стороны треугольника увеличиваются, то углы уменьшаются и стороны треугольника в известном смысле „вдавливаются“ подобно тому, как это изображено на черт. 236). Точно так же сумма углов n -угольника меньше $(2n - 4)d$, причём разность пропорциональна площади многоугольника. Следовательно, *не существует прямоугольников*: если четырёхугольник имеет три прямых угла, то четвёртый угол — острый.

*Не существует подобных*³⁾ *фигур* (за исключением, конечно, равных фигур). Два треугольника равны между собою, если они имеют соот-

¹⁾ Можно доказать, что постулат Евклида будет либо всегда верен, либо всегда неверен: нельзя допустить, что существует вне данной прямой одна точка, через которую проходит только одна прямая, параллельная данной прямой, не допуская того же самого для всех точек и всех прямых.

²⁾ В русской литературе углом параллелизма обычно называют $\angle OAD_2'$ (черт. 235). *Прим. ред. перевода.*

³⁾ Под этим термином мы понимаем здесь (в отличие от определения, принятого в тексте книги) фигуры, у которых каждые два соответственных угла равны и соответственные стороны пропорциональны.

вещественно равные углы. Допустить существование подобных фигур — значит допустить постулат Эвклида.

И. т. д.

Существует бесчисленное множество неевклидовых геометрий. В самом деле, в соотношениях, связывающие между собой различные элементы одной и той же фигуры, входит, если принять гипотезу Лобачевского, некоторое число k^2 , раз навсегда определённое, которое может иметь, однако, произвольное значение: например, отношение площади треугольника к разности между $2d$ и суммой его углов (как мы только что говорили, это отношение постоянно). *Эвклидову геометрию можно рассматривать как предельный случай неевклидовых геометрий: она соответствует $k = \infty$.*

299. Неевклидова геометрия представляется нам, таким образом, как лишённая противоречий, как *логически возможная*. Является ли она и в действительности непротиворечивой, как это думали её основатели? Быть может, она только кажется нам такой в силу того, что ещё недостаточно развита цепь её следствий? Не придём ли мы к противоречию, которое не встретилось ни Гауссу, ни Болиани, ни Лобачевскому, с помощью более тщательных и более глубоких исследований?

Можно утверждать, что этого не будет. Не развивая здесь детально тех соображений, которые обосновывают непротиворечивость неевклидовой геометрии¹⁾, мы заимствуем у Пуанкаре²⁾ следующий поразительно простой способ их изложения:

„Вообразим сферу S и внутри этой сферы — среду с переменным показателем преломления и переменной температурой. Пусть в этой среде перемещаются некоторые подвижные предметы; перемещения этих предметов пусть происходят настолько медленно и пусть их теплоёмкости настолько малы, что они постоянно находятся в температурном равновесии с окружающей средой; кроме того, пусть все эти предметы имеют один и тот же коэффициент расширения, так что можно определять температуру по величине любого из них. Пусть R — радиус шара

¹⁾ Можно заметить, что между изложенными выше фактами неевклидовой геометрии и некоторыми фактами сферической геометрии имеется известная аналогия, причём эти факты в известном смысле слова противоположны друг другу: так, сумма углов сферического треугольника *больше* двух прямых и разность между суммой углов и двумя прямыми пропорциональна площади треугольника; два сферических треугольника, имеющих соответственно равные углы, либо равны, либо симметричны, и т. д. Действительно, геометрия на некоторых поверхностях (называемых *псевдосферическими*) оказывается гождественной с геометрией Лобачевского. Этим путём была даже впервые доказана логическая возможность последней; однако это доказательство ещё несовершенно, так как: 1) псевдосферические поверхности нельзя рассматривать как неограниченно простирающиеся во всех направлениях подобно плоскости; 2) оно приложимо лишь к *плоской* неевклидовой геометрии и не исключает предположения о возможности доказать постулат Эвклида с помощью соображений, относящихся к геометрии в пространстве.

²⁾ Poincaré, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, т. III, 1892, стр. 75.

и ρ — расстояние некоторой точки рассматриваемой среды от его центра; я предполагаю, что абсолютная температура в этой точке¹⁾ равна $R^2 - \rho^2$, а показатель преломления равен $\frac{1}{R^2 - \rho^2}$.

Что думали бы при этом разумные существа, которые никогда не имели бы возможности выйти за пределы такого мира?

1°. Так как размеры двух маленьких предметов, перемещающихся из одной точки в другую, изменялись бы в одном и том же отношении в силу того, что оба предмета имеют один и тот же коэффициент расширения, то эти существа считали бы, что размеры предметов не изменяются. Эти существа не имели бы никакого представления о том, что мы называем разностью температур. Никаким термометром они не могли бы эту разность температур обнаружить, так как расширение оболочки термометра было бы одинаково с расширением термометрической жидкости.

2°. Они считали бы, что сфера S бесконечна; действительно, они никогда не смогли бы достичь её поверхности, потому что по мере приближения к поверхности они попадали бы всё в более и более холодные области; они становились бы всё меньше и меньше, не догадываясь об этом, и потому делали бы всё более и более мелкие шаги²⁾.

3°. То, что они называли бы прямыми линиями, были бы окружности, ортогональные к шару S , в силу следующих трёх причин:

- а) это были бы траектории световых лучей;
- б) измеряя с помощью масштаба различные кривые, наши воображаемые существа обнаружили бы, что эти окружности представляют собой кратчайшие расстояния между двумя точками: действительно, их масштаб сокращался бы или растягивался при переходе из одной области в другую, а они не подозревали бы этого обстоятельства;
- с) если бы твёрдое тело вращалось таким образом, чтобы одна из линий, проведённых внутри этого тела, оставалась неподвижной, то такой линией могла бы быть только одна из этих окружностей; так же как, если бы цилиндр медленно вращался около двух опор и при этом нагревался бы с одной стороны, то геометрическим местом его неподвижных точек была бы кривая линия, обращённая выпуклостью к нагретой стороне, а не прямая линия.

¹⁾ Абсолютной температурой называется в физике температура, отсчитываемая от нуля, выбранного таким образом, что температура оказывается пропорциональной объёму термометрического вещества (в физике определённо предполагается, что этим веществом служит газ, далёкий от его точки сжижения; в данном случае речь идёт о любом теле, так как все предметы имеют по предположению один и тот же закон расширения и абсолютную температуру можно принять пропорциональной не объёму, а линейным размерам тела).

²⁾ Можно добавить, что в силу тех свойств, которые приписаны показателю преломления, они не могли бы видеть того, что происходит вне данного шара.

Отсюда следует, что эти существа приняли бы геометрию Лобачевского¹⁾.

Теперь мы видим, что доказать постулат Эвклида с помощью предшествующих ему предложений невозможно; действительно, если бы такое доказательство существовало, то оно было бы признано верным и теми фиктивными существами, о которых шла речь (так как все предложения, предшествующие постулату Эвклида, были бы с их точки зрения верными); однако оно приводило бы их к неверному результату, так как для этих существ постулат Эвклида не имеет места²⁾.

II.

300. Какую же роль следует приписать этому предложению, которое не столь очевидно, как аксиомы, и которое нельзя доказать, как доказываются теоремы?

Роль этого предложения та же, что и определения. Чтобы понять, что под этими словами следует подразумевать, мы должны сослаться на сказанное в предыдущем прибавлении (Прибавление А, п. 271).

Как там было указано, необходимо иметь определение каждого понятия, встречающегося в наших высказываниях, — определение, которое приходится употреблять в рассуждениях, подставляя его каждый раз на место определяемого.

Однако существуют понятия, которые нами не были определены и вообще не могут быть определены.

Действительно, ни одно понятие нельзя определить иначе, как с помощью предшествующих ему понятий³⁾, но это невозможно для *первых* из вводимых нами понятий.

Но так как эти первые понятия ясны сами по себе и, следовательно, обладают некоторым числом очевидных свойств, то роль определения

¹⁾ Произвольное постоянное, которое встречается в неевклидовой геометрии, будет здесь радиусом R шара.

²⁾ Этим фантастическим примером Пуанкаре наглядно иллюстрирует ту воображаемую обстановку, в которой правильной была бы именно геометрия Лобачевского. Смысл рассуждения Пуанкаре при этом сводится к следующему. Поскольку это один из логически возможных („мыслимых“) миров, то логически возможна („мыслима“), следовательно, и геометрия Лобачевского, т. е. постулат Эвклида не может быть логическим следствием остальных аксиом евклидовой геометрии, справедливых, как было указано, и в геометрии Лобачевского. Подлинного доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского этот пример, однако, не содержит, поскольку не доказана самая „мыслимость“ воображаемого мира Пуанкаре. Непротиворечивость этой геометрии доказывается построением не воображаемых миров, а такой модели („интерпретации“) для геометрии Лобачевского, которая осуществима в обыкновенном евклидовом пространстве. О различных евклидовых интерпретациях неевклидовой геометрии см. во втором томе, упр. 1295 и 1296. *Прим. ред. перевода.*

³⁾ Например, мы не могли бы определить окружность, как „геометрическое место точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки в этой плоскости“, не определив предварительно понятий расстояния, плоскости и геометрического места.

(которое, как мы только что пояснили, необходимо и в этом случае) выполняют здесь именно те свойства, которые мы принимаем без доказательства. Так именно мы поступили с прямой линией, которая вовсе не была нами определена в собственном смысле этого слова; однако мы дали то, что можно было бы назвать её *косвенным* определением, допустив, что она обладает некоторыми основными свойствами.

301. При этом, однако, существенно, чтобы число допускаемых, таким образом, свойств было достаточным, чтобы *охарактеризовать* определяемое ими понятие. Например, мы не вполне определили бы прямую линию, если бы, вместо того чтобы допустить, как мы это делали выше:

1) что любая фигура, равная прямой линии, есть прямая линия и что обратно: любые две прямые можно наложить одну на другую бесчисленным множеством способов;

2) что через две точки проходит прямая линия и притом только одна, — мы допустили бы только первое свойство, не допуская второго. Действительно, это первое свойство не является исключительным свойством прямых линий: им обладают, например, также окружности, имеющие радиус, равный 1 м. Следовательно, мы не имели бы возможности доказать, исходя из этого неполного определения, ни одного свойства прямых линий, которое не принадлежало бы также и этим окружностям. например, мы не могли бы доказать, что сумма двух углов треугольника меньше двух прямых, так как это свойство не всегда имеет место для криволинейных треугольников, образованных дугами равных окружностей.

302. Вся геометрия основана на фундаментальном понятии *перемещения*, которое мы ввели в п. 3. Мы рассматривали там, как очевидное само по себе, понятие фигуры, которая перемещается без изменения её формы и размеров, другими словами, понятие *неизменяемой* фигуры. Попытаемся исследовать, каким образом это понятие определяется своими свойствами.

Если дана фигура, которая испытывает некоторое перемещение, и произвольная точка M , то мы можем вообразить, что эта точка неизменным образом связана с данной фигурой и движется вместе с последней при её перемещении, так что она занимает некоторое положение M' . Следовательно, можно сказать, что каждой точке пространства M соответствует при данном перемещении некоторая точка M' , а именно то новое положение, в которое переносится точка M . Перемещение представляет собой поэтому *точечное преобразование*¹⁾ пространства.

Далее, очевидное свойство интересующего нас понятия состоит в том, что два перемещения, выполненные одно за другим, равносильны одному перемещению.

Другими словами, *эти преобразования образуют группу*²⁾.

Мы могли бы, следовательно, сказать:

¹⁾ См. Прибавление А, п. 287.

²⁾ См. Прибавление А, п. 291 и следующие.

Неизменяемая фигура есть фигура, которая подвергается только преобразованиям некоторой группы (называемой группой перемещений), обладающей следующими свойствами¹⁾:

Существует бесчисленное множество преобразований группы, переводящих какую-либо точку A в какую-либо точку A' . Не существует, вообще говоря, преобразования группы, которое преобразовывало бы одновременно две данные точки A и B соответственно в A' и B' ; чтобы преобразование существовало, необходимо, чтобы некоторая величина, зависящая от точек A и B , равнялась бы аналогичной величине, образованной с помощью точек A' и B' .

(I) *Если существует одно преобразование группы, переводящее две определённые точки A и B соответственно в две определённые точки A' и B' , то существует бесчисленное множество таких преобразований. В частности, существует бесчисленное множество преобразований, оставляющих на месте две определённые точки A и B , причем существует бесчисленное множество других точек, которые остаются на месте при всех этих преобразованиях. Эти точки образуют безграничную линию (называемую прямой линией). Через две точки проходит прямая линия и притом только одна.*

Существуют такие поверхности (называемые плоскостями), что всякая прямая, имеющая с одной из них две общие точки, целиком лежит на поверхности; через три точки пространства проходит одна плоскость.

303. Во всяком случае существенно отметить, что предыдущее определение, как и все другие косвенные определения, заключает в себе аксиому; очевидно, что это определение предполагает следующую аксиому:

Аксиома (A): *Существует группа, обладающая свойствами (I).*

Отметим также, что понятия *прямой* и *плоскости* вытекают из понятия перемещения, без которого они не могут быть определены.

304. Как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии мы приписываем группе перемещений свойства (I) и, следовательно, допускаем аксиому (A). Эти две геометрии разделяет вопрос о том, будет ли верно суждение:

(II) *Через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.*

Согласно предыдущему, это суждение выражает свойство группы перемещений, так как прямая линия и плоскость определены с помощью этой группы; вопрос принимает теперь следующую форму:

Обладает ли группа перемещений, определённая свойствами (I), также и свойством (II)?

¹⁾ Мы не стремимся перечислить здесь все те свойства, которые служат определением понятия перемещения. Под „свойствами (I)“ следует понимать все те свойства, которые мы принимали без доказательства в первой книге, до введения постулата Эвклида.

Но если мы установили, что невозможно решить этот вопрос, то значит вопрос просто неправильно поставлен и не имеет точного смысла.

Действительно, группа перемещений *не определяется вполне* свойствами (I). Если (в согласии с аксиомой (A), которую мы принимаем) существует группа, обладающая этими свойствами, то их существует *бесчисленное множество*. Воображаемые существа, существование которых предполагает Пуанкаре, понимали бы под „неизменяемыми фигурами“ нечто совсем другое, чем мы, так как предметы, которые они перемещали бы, расширялись бы или сокращались бы без их ведома; тем не менее, группа перемещений, как они её понимали бы, удовлетворяла бы условиям (I) во всякой внутренней области шара S (т. е. во всём бесконечном, с их точки зрения, пространстве, к которому относились бы их рассуждения).

Теперь полностью дан ответ на вопрос. Положение (I₁) будет верным, если из всех групп, обладающих свойствами (I), сохранить название *группы перемещений* только за группой, удовлетворяющей условию, выражаемому этим положением; другими словами, если *определить группу перемещений уже не свойствами (I), а свойствами (I) и (II)*.

305. Во всяком случае остаётся устранить одно возражение. Подобно тому как первоначальное определение содержало в себе аксиому (A), так и предлагаемое нами сейчас определение возможно лишь после решения следующего вопроса:

Существует ли группа, удовлетворяющая условиям (I) и (II)?

Ответ на этот вопрос утвердительный. Можно доказать [принимая, конечно, аксиому (A)], что среди бесчисленного множества групп, удовлетворяющих первоначальному условию, существуют группы как *не-эвклидовы* (для которых постулат Эвклида неверен), так и *эвклидовы* (для которых он верен).

Таким образом, устранены все затруднения. *Постулат Эвклида входит в состав определения тех основных понятий, на которых основывается геометрия.*

306. Можем ли мы вследствие этого сказать, что не может возникнуть вопроса о том, верен или неверен постулат Эвклида, что такой вопрос совершенно лишён смысла?

Мы имели бы на это право, если бы мы имели возможность определять геометрические понятия совершенно произвольно. Однако это не так; эти понятия даны нам из опыта. Понятие о неизменяемой фигуре возникает у нас из рассмотрения тех неизменяемых фигур (твёрдых тел), примеры которых мы находим в природе. Неизменяемые фигуры в геометрии и их перемещения должны быть определены по образу этих тел и их перемещений, если мы хотим, чтобы геометрия была приложима к реальным объектам.

307. Мы видим, таким образом, что действительно существует вопрос о постулате Эвклида: вопрос заключается в том, чтобы узнать, согласуется ли данное выше определение с опытом, будут ли свойства существующих в природе перемещений, тех перемещений, которые мы наблюдаем, аналогичны свойствам эвклидовой группы или нет.

Однако эта проблема не является уже проблемой чисто математической; решение такого рода вопроса требует не рассуждений, а наблюдений.

И если нам пришлось развивать концепцию Эвклида, а не Лобачевского, то это происходит именно благодаря тому, что наши чувства показывают нам, что постулат Эвклида верен, по крайней мере, в тех пределах, которые доступны этим чувствам. Мы видим, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой, что существуют подобные фигуры с любыми коэффициентами подобия, что существуют прямоугольники и т. д.

308. Однако это лишь первая грубая проверка. Желая подвергнуть вопрос более глубокому исследованию, пробовали прежде всего измерять со всей возможной точностью углы некоторого треугольника, чтобы выяснить, равна ли их сумма двум прямым; треугольник выбирали насколько возможно большим, так как при этих условиях разница между эвклидовой и неэвклидовой геометрией сказывается всего заметнее. С помощью таких измерений было установлено (насколько это позволяли экспериментальные трудности), что равенство суммы углов треугольника двум прямым вполне подтверждается (или по крайней мере, что отклонение меньше, чем ошибка наблюдения).

Поэтому до некоторого времени считали возможным утверждать, что геометрией, наиболее верно представляющей действительность, является эвклидова геометрия или геометрия, очень мало от неё отличающаяся (т. е. такая, что соответствующая постоянная k очень велика; другими словами, что если геометрию, о которой идёт речь, можно сравнивать с геометрией фиктивных существ Пуанкаре, которые движутся внутри сферы радиуса R , то радиус сферы R весьма велик по сравнению со всеми обычными размерами): короче говоря, что эвклидова геометрия *физически верна*.

308а. Положение изменилось в связи с той эволюцией, которую претерпели в последнее время наши взгляды в области физики (*теория относительности*).

Новая теория, прежде всего, глубоко изменила науку о движении, или *кинематику* (являющуюся непосредственным приложением геометрии). Построения, выполняемые над скоростями, были основаны в старой кинематике на эвклидовой геометрии (главным образом на свойствах параллелограмма). Мы и теперь допускаем, что эти построения практически сохраняют свою силу для скоростей „очень малых“, т. е. измеряемых очень малыми числами, если за единицу принята скорость света V (равная в круглых числах 300 000 км в секунду) и, следовательно, для всех обычных скоростей¹⁾, но не приложимы к скоростям того же порядка, что и V . Для этих последних скоростей *согласной с физической реальностью*²⁾ является неэвклидова геометрия. Роль величины R играет V .

¹⁾ Так как V имеет большое значение, то даже скорости артиллерийских снарядов будут с этой точки зрения очень „малыми“.

²⁾ С точки зрения теории относительности. *Прим. ред. перевода.*

В этой теории неевклидова геометрия и даже ещё более общие геометрии находят и другие применения (*общая теория относительности*).

Однако все эти изменения не оказывают, как это видно из предыдущего, никакого влияния на текущую жизнь (например, на инженерное дело). Евклидова геометрия сохраняет силу для всех фигур, которые мы можем окинуть взором или непосредственно измерить.

ПРИБАВЛЕНИЕ С.

ЗАДАЧА О КАСАНИИ ОКРУЖНОСТЕЙ.

309. Как было указано в п. 236, метод Жергонна построения окружности, касательной к трём данным окружностям, применим не во всех случаях: он не приводит ни к какому результату в том случае, когда центры трёх окружностей лежат на одной прямой. Мы добавили при этом, что это затруднение можно было бы устранить, представив решение в такой форме, чтобы в него входили только свойства, не изменяющиеся при любой инверсии. Это мы и собираемся сейчас сделать.

Пусть, как и ранее, A , B и C — три данные окружности. Возьмём точку b , антигомологичную какой-либо точке a окружности A относительно одного из центров подобия S_{12} окружностей A и B ; а также точку c , антигомологичную точке b относительно одного из центров подобия S_{23} окружностей B и C . Окружность σ , проходящая через точки a , b и c , пересекает три данные окружности в трёх новых точках a' , b' , c' и притом под одним и тем же углом (п. 227), так что точки a' и b' антигомологичны относительно центра S_{12} , а точки b' и c' — относительно центра S_{23} ; кроме того, точки a и c' , а также a' и c будут попарно антигомологичны¹⁾ относительно одного из центров подобия S_{13} окружностей A и C .

Заменяя точку a другой точкой a_1 окружности A , мы получим другую окружность σ_1 , аналогичную σ . Точка S_{12} имеет одну и ту же степень относительно окружностей σ и σ_1 (равную степени той инверсии, которая преобразует окружность A в окружность B); то же самое относится и к точке S_{23} . Следовательно, радикальная ось XU окружностей σ и σ_1 будет осью подобия данных окружностей; отсюда ясно, что центр подобия S_{13} , о котором мы только что упоминали, будет тем из центров подобия окружностей A и C , который лежит с центрами подобия S_{12} , S_{23} на одной оси подобия²⁾.

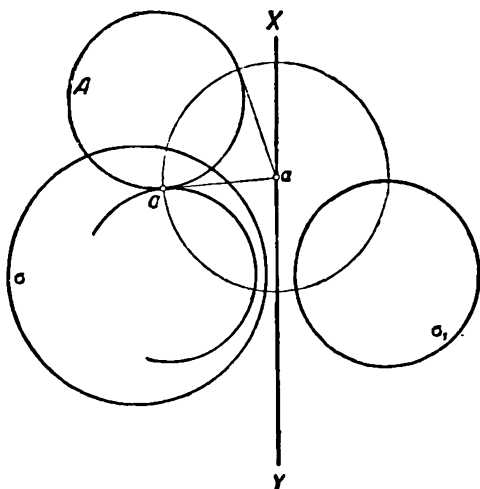
¹⁾ Что точка a антигомологична точке c' , а не точке c , легко доказать, заметив, что (п. 227) углы, которые окружность σ образует с окружностями A и C соответственно в точках a и c , будут иметь одно и то же направление (в то время как в двух антигомологических точках эти углы должны иметь противоположные направления).

²⁾ Это рассуждение, правда, предполагает, что точка S_{13} будет одна и та же для обеих окружностей σ и σ_1 . Но в противном случае, по крайней мере одна из точек S_{13} , которые соответствуют окружностям σ и σ_1 , напри-

310. Мы видим, таким образом, что существуют четыре семейства окружностей \mathfrak{A} (соответственно четырём осям подобия) и что окружности каждого из этих семейств имеют общую радикальную ось. Обратно, любая окружность, имеющая общую радикальную ось с двумя окружностями \mathfrak{A} одного семейства, сама принадлежит к этому семейству (так как она сама себе соответствует в двух инверсиях с полюсами S_{12} и S_{13}); таким образом, это семейство определяется заданием двух его окружностей или оси XU и одной из его окружностей. За эту окружность можно, вообще говоря, принять окружность σ_0 , ортогональную к трём данным окружностям, которая принадлежит ко всем четырём семействам (п. 227а).

Геометрическим местом центров окружностей каждого из этих семейств служит перпендикуляр, опущенный из радикального центра трёх окружностей A , B и C на одну из их осей подобия.

311. Окружности, касательные к данным окружностям, принадлежат, очевидно, к тем семействам, о которых мы говорили; и обратно, любая окружность σ , касательная к одной из данных окружностей, будет касаться и двух других.



Черт. 237.

Задача о касании окружностей сведена, таким образом, к следующей:

Найти окружность, имеющую с двумя данными окружностями σ и σ_1 общую радикальную ось и касающуюся данной окружности A (черт. 237).

Решение этой последней задачи не представляет трудности: если a — точка касания искомой окружности с окружностью A , то окружность, проходящая через эту точку и пересекающая окружности σ и σ_1 под прямым углом, будет ортогональна и к искомой окружности, а следовательно, и к окружности A ; эти условия её определяют (п. 158, построение 13). Иначе говоря, достаточно из радикального центра a окружностей σ , σ_1 и A провести касательные к окружности A , чтобы

мер та, которая соответствует σ_1 , лежала бы на одной прямой с точками S_{12} и S_{23} ; она имела бы, следовательно, относительно окружности σ_1 ту же степень, как и относительно σ , т. е. степень, равную степени инверсии, преобразующей окружность A в окружность C . Следовательно, окружность σ_1 пересекала бы и окружности A и C в точках, попарно соответствующих друг другу в этой инверсии.

получить искомые точки касания. Можно убедиться и обратно, что полученные таким образом точки дают решения поставленной задачи.

Как мы уже отмечали, одну из окружностей σ и σ_1 можно заменить их радикальной осью XU , так что решение задачи о касании окружностей принимает следующий вид:

Через одну из точек окружности A и две точки, ей антигомологичные, проводим окружность σ . Общая хорда этой окружности и окружности A пересекает ось подобия XU в точке α , через которую достаточно провести касательные к окружности A , чтобы получить точки касания этой окружности с искомыми окружностями.

311а. Если за окружность σ принять окружность σ_0 , имеющую своим центром радикальный центр I трёх данных окружностей и пересекающую их под прямым углом, то мы вернёмся к решению Жергонна. Действительно, общие точки окружностей A и σ_0 будут точками прикосновения касательных, проведённых из точки I к окружности A , так что общая хорда обеих окружностей будет полярной точки I относительно окружности A . Следовательно, точка α пересечения этой прямой с прямой XU будет, действительно, иметь своей полярной прямую, соединяющую точку I с полюсом прямой XU .

Отсюда становится понятным, почему это решение неприменимо, когда центры трёх данных окружностей лежат на одной прямой. Дело в том, что в этом случае и окружность σ_0 и прямая XU обращаются в линию центров. Чтобы избежать загромождения, достаточно, как мы сказали, воспользоваться окружностью σ , отличной от σ_0 .

Рассматриваемое решение имеет, по сравнению с решением Жергонна, ещё и то преимущество, что оно применимо и в тех случаях, когда одна или несколько из данных окружностей заменяются точками или прямыми, и непосредственно даёт точки касания искомой окружности с каждой из данных прямых; эти точки лежат на окружности, имеющей своим центром точку пересечения данной прямой с осью подобия XU и пересекающей под прямым углом окружность σ_1 ; это построение, очевидно, обобщает построение 14 (п. 159). Оно приложимо и тогда, когда в числе данных нет ни одной окружности, что не имеет места для решения Жергонна. Оно теряет силу только в том случае, когда все три данные окружности обращаются в точки.

312. Из сказанного в п. 309 следует, что общая хорда окружностей σ и A представляет собой не что иное, как ту прямую, которая в п. 309 была обозначена через aa' , где a' — точка, антигомологичная точке c .

В силу этого можно сказать, что указанное выше построение состоит:

в определении точки b , антигомологичной точке a (т. е. произвольной точке окружности A) относительно центра подобия S_{12} , затем точки c , антигомологичной точке b относительно центра подобия S_{23} , и точки a' , антигомологичной точке c относительно центра подобия S_{13} ; в соединении a с a' ;

в повторении того же построения с заменой точки a другой точкой a_1 окружности A .

Точка пересечения обеих хорд aa' и a_1a_1' , построенных таким образом, будет той точкой α , из которой надо провести касательные к окружности A , чтобы получить точки касания искомым окружностей с окружностью A .

Исследование. Та форма, которую мы сейчас придали нашему решению, позволяет (в противоположность первоначальному решению Жергонна) очень просто исследовать число действительных окружностей, отвечающих условию задачи.

Заметим прежде всего, что предыдущее построение оказывается возможным или невозможным, смотря по тому, лежит ли точка α вне окружности A или внутри её.

Примем за произвольную точку a_1 точку, близкую к a . Очевидно, что точка α будет лежать внутри окружности A , если малые дуги aa_1 и $a'a_1'$ будут иметь одно и то же направление, и вне её, если эти дуги будут иметь противоположное направление.

Мы должны, таким образом, исследовать, перемещается ли точка a' при перемещении точки a в одном с ней направлении или в противоположном.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала, в каком направлении перемещается при этом точка b .

Так как точка, гомотетичная точке a относительно центра подобия S_{12} , движется по окружности B , очевидно, в том же направлении, как точка a по окружности A , то непосредственно очевидно (п. 223), что точка b движется в том же направлении, как и точка a , если центр подобия S_{12} лежит внутри окружности B и в противоположном направлении, если он лежит вне окружности B .

Условимся называть центр подобия S_{12} двух окружностей A и B *положительным*, если он лежит вне этих окружностей, и *отрицательным*, если он лежит внутри их; другими словами, центр подобия считается положительным или отрицательным, смотря по тому, проходят ли через него действительные общие касательные или нет.

Если две окружности расположены одна вне другой, то их оба центра подобия положительны. Если они пересекаются, то внешний центр подобия будет положительным, а внутренний — отрицательным. Если одна окружность лежит внутри другой, то оба центра подобия отрицательны.

При этом условии относительно знаков, направления движения точек a и b будут одинаковы или противоположны, в зависимости от того, будет ли центр подобия S_{12} отрицательным или положительным.

Точно так же точка c перемещается по окружности C в том же направлении, как точка b по окружности B , или в противоположном, смотря по тому, будет ли центр подобия S_{23} отрицательным или положительным; точка a' перемещается в том же направлении, как c , или в противоположном, смотря по тому, будет ли центр подобия S_{13} отрицательным или положительным.

Сопоставляя эти замечания с тем, что было сказано выше, мы видим, что точка α лежит вне окружности A , другими словами, что *имеются две действительные точки касания*, если среди центров подобия, расположенных на рассматриваемой оси подобия XU , *положительных будет один или три*.

Чтобы получить общее число действительных окружностей, достаточно применить это рассуждение последовательно к каждой из четырёх групп центров подобия, лежащих на одной прямой.

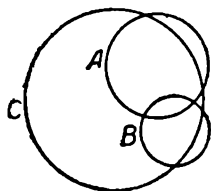
Мы будем в дальнейшем обозначать цифрой 0 группу трёх внешних центров подобия, цифрой 1 — группу, состоящую из внешнего центра подобия окружностей B и C и внутренних центров подобия окружностей A и B и окружностей A и C ; цифрами 2 и 3 — аналогичные группы центров подобия, получаемые заменой окружности A через B или через C .

312а. Принимая теперь во внимание взаимное расположение данных окружностей, мы замечаем, что (если исключить из рассмотрения случай, когда две из данных окружностей касаются друг друга)¹⁾ имеется одиннадцать различных возможностей²⁾; эти возможные случаи обозначены на чертеже 239 цифрами от I до XI.

В каждом из этих случаев предыдущие рассуждения непосредственно приводят к результату. Например, в случае I все центры подобия положительны, так что имеется восемь решений, в то время как в случае V имеется только четыре решения, так как оба центра подобия окружностей A и B , а также оба центра подобия окружностей A и C отрицательны, и потому приходится пользоваться положительным центром подобия окружностей B и C , т. е. их внешним центром подобия.

Таким образом, мы без затруднения приходим к следующей таблице, в которой для каждого из одиннадцати случаев указаны положительные и отрицательные центры подобия (буквы S обозначают внешние,

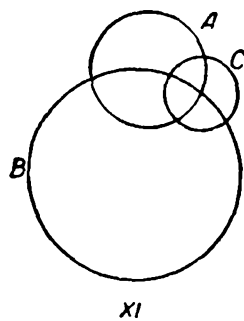
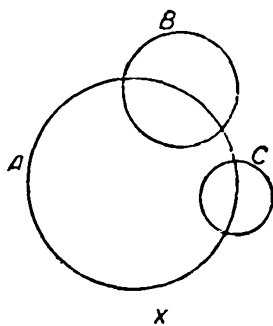
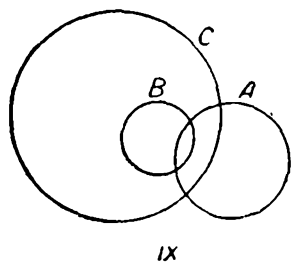
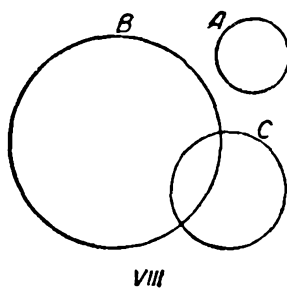
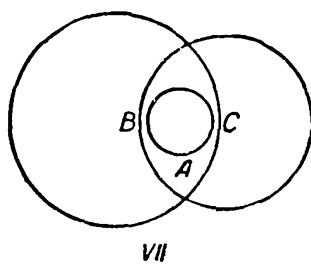
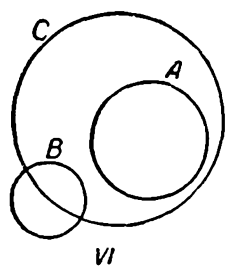
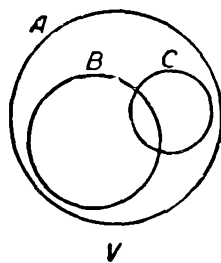
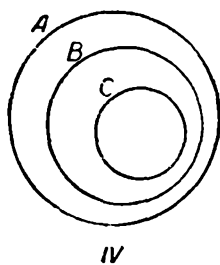
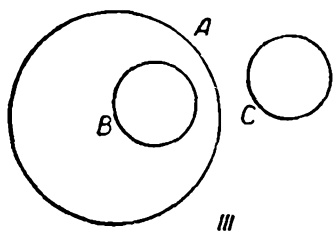
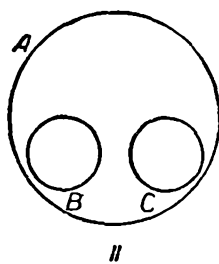
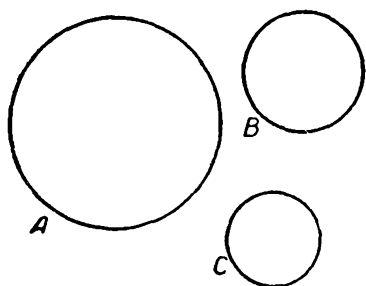
¹⁾ Случаи касания должны рассматриваться как предельные для тех случаев пересечения или непересечения окружностей, по отношению к которым данный случай касания является промежуточным. Если две из данных окружностей касаются одна другой, то два из решений задачи сливаются в одно.



Черт. 238.

²⁾ В каждом из одиннадцати случаев, изображённых на чертеже 239, можно переставить между собой буквы A , B и C . Так как различные расположения, получаемые в каждом случае такого рода перестановками, соответствуют одному и тому же числу решений, то мы сохранили на чертеже лишь по одной перестановке букв для каждого из одиннадцати случаев.

В случае XI возможны и другие расположения окружностей (черт. 238): точки пересечения окружностей A и B могут лежать обе внутри или обе вне окружности C (в то время как на чертеже 239 одна точка лежит вне окружности, другая внутри её). Однако это ничего не меняет в наших рассуждениях по поводу исследуемой задачи. Если рассматривать другие задачи, например задачу об окружности, ортогональной к окружностям A , B и C , то это различие может оказаться существенным.



буквы S' — внутренние центры подобия), число решений и те группы центров подобия (обозначенные цифрами 0, 1, 2, 3 в п. 312), которые дают эти решения.

	Положительные центры подобия	Отрицательные центры подобия	Число решений	Группы центров подобия
I	Все	Нет	8	
II	S_{23}, S'_{23}	$S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}$	8	
III	$S_{13}, S'_{13}, S_{23}, S'_{23}$	S_{12}, S'_{12}	Нет	
IV	Нет	Все	"	
V	S_{23}	$S'_{23}, S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}$	4	(0,1)
VI	S_{12}, S'_{12}, S_{23}	S'_{23}, S_{13}, S'_{13}	4	(2,3)
VII	S_{23}	$S'_{23}, S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}$	4	(0,1)
VIII	$S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}, S_{23}$	S'_{23}	4	(0,1)
IX	S_{13}, S'_{13}	$S'_{12}, S_{13}, S'_{23}, S_{23}$	4	(2,3)
X	$S_{12}, S_{13}, S_{23}, S'_{23}$	S'_{12}, S'_{13}	4	(0,1)
XI	S_{12}, S_{13}, S_{23}	$S'_{12}, S'_{13}, S'_{23}$	8	

Заметим, что число подлежащих исследованию возможностей легко было бы значительно уменьшить, приняв во внимание, что случаи I и II приводятся один к другому с помощью инверсии; то же самое относится к случаям III и IV; к случаям V, VI, VII, VIII и к случаям IX и X.

ПРИБАВЛЕНИЕ D.

О ПОНЯТИИ ПЛОЩАДИ.

313. В книге четвёртой настоящего сочинения мы следовали общепринятому пути, при котором а priori допускается (п. 243), что можно определять площади многоугольников, т. е. что каждому плоскому многоугольнику можно поставить в соответствие некоторое число (называемое площадью), обладающее следующими свойствами:

I. *Два равных многоугольника имеют одну и ту же площадь, как бы эти многоугольники ни были расположены в пространстве.*

II. *Многоугольник P'' , представляющий собой сумму двух смежных многоугольников P и P' , имеет своей площадью сумму площадей многоугольников P и P' .*

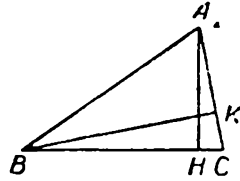
В изложенной выше теории возможность такого рода соответствия представляет собой *постулат*. Однако в этом постулате нет надобности: возможность, о которой идёт речь, отнюдь не предполагается

заранее, а строго доказывается при следующем методе изложения, который в силу этого заслуживает предпочтения перед изложением, данным выше.

314. Теорема. *Во всяком треугольнике произведение одной из сторон на соответствующую ей высоту имеет одно и то же значение независимо от выбора стороны.*

Пусть дан треугольник ABC (черт. 240), в котором сторонам BC , AC соответствуют высоты $АН$, $ВК$. Прямоугольные треугольники $АСН$, $ВСК$ имеют общий угол при C ; следовательно, эти треугольники подобны, откуда

$$\frac{АН}{АС} = \frac{ВК}{ВС} \quad \text{или} \quad ВС \cdot АН = АС \cdot ВК.$$



Черт. 240.

Мы будем называть *площадью* треугольника это произведение, умноженное на некоторое раз навсегда выбранное число k ; к вопросу о выборе числа k мы вскоре вернёмся. Площадь будет равна нулю, если треугольник в собственном смысле не существует, т. е. если три вершины лежат на одной прямой, и только в этом случае.

Площади двух треугольников с общей высотой пропорциональны их основаниям.

Очевидно, что равные треугольники имеют равные площади.

315. Рассмотрим теперь, с другой стороны, какую-либо точку O в плоскости треугольника; соединяя эту точку с тремя вершинами, мы получим три треугольника, имеющих своими основаниями различные стороны данного треугольника и общей вершиной точку O . Какой-либо из этих треугольников мы будем называть *положительным* (например треугольник $ОВС$, черт. 244), если он с данным треугольником лежит по одну и ту же сторону от общего основания; и *отрицательным* (например треугольник $ОВС$, черт. 245) — в противном случае¹⁾.

Теорема. *Если выбрать в плоскости треугольника какую-либо точку O и соединить её с тремя вершинами данного треугольника, то разность между суммой площадей положительных и суммой площадей отрицательных треугольников (или перекрестных сумм, если отрицательных треугольников не будет) равняется площади исходного треугольника.*

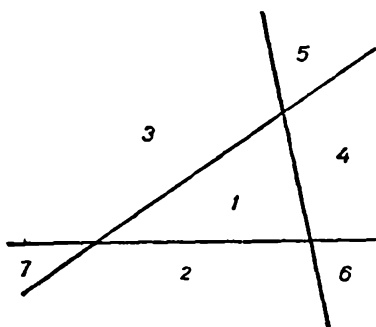
Стороны треугольника делят плоскость на семь областей (черт. 241): одну внутреннюю (1), три области (2—4), отделённые от внутренней

¹⁾ Если перечислить вершины данного треугольника в каком-либо определённом порядке, а вершины треугольника с вершиной O в таком порядке, что общие вершины двух треугольников будут оба раза следовать в одном и том же порядке, то можно сказать, что *треугольник с вершиной O будет положительным или отрицательным, смотря по тому, будет ли он иметь с данным треугольником одинаковое направление вращения или противоположное.*

области соответственно тремя сторонами, и, наконец, три области (5—7), лежащие внутри каждого из углов, вертикальных углов треугольника.

Мы будем различать далее пять случаев:

1°. Точка O лежит на одной из сторон. Если точку O взять на стороне BC треугольника ABC (черт. 242), то треугольника OBC не будет. Что касается двух треугольников OAB и OAC , то они действительно будут иметь своей суммой



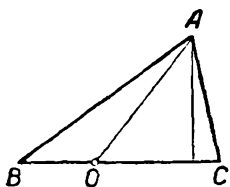
Черт. 241.

треугольника ABC : в самом деле, три треугольника имеют одну и ту же высоту (перпендикуляр, опущенный из вершины A на BC) и основание BC третьего равно сумме оснований OB , OC двух первых.

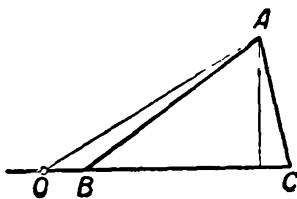
2°. Точка O лежит на продолжении одной из сторон. Если точку O взять на продолжении стороны BC треугольника ABC (черт. 243), то треугольника OBC не будет. Что касается двух треугольников OAC и OAB , то они действительно будут

иметь своей разностью треугольник ABC : в самом деле, три треугольника имеют одну и ту же высоту и основание BC третьего равно разности оснований OC , OB двух первых.

3°. Точка O лежит внутри треугольника (черт. 244). Продолжим отрезок OA до пересечения в точке I со стороной BC . Треуголь-



Черт. 242.



Черт. 243.

ник ABC равен сумме треугольников ABO , ACO , которые могут быть разложены на $AOB + BOI$, $AOC + COI$. Треугольники AOB и AOC будут положительными треугольниками, а треугольники BOI и COI дадут в сумме положительный треугольник BOC .

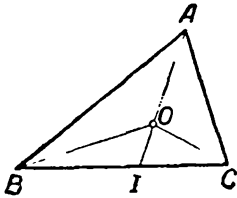
4°. Точка O лежит вне данного треугольника ABC , но внутри одного из его углов, например A (черт. 245). Если прямая OA пересекает сторону BC в точке I , то сумма треугольников OAB и OAC может быть заменена суммой треугольников AIB , AIC , OIB , OIC . Но сумма двух первых из этих четырех треугольников равна ABC , а сумма двух последних — OBC ; следовательно, будем иметь соотношение

$$OAB + OAC = ABC + OBC \text{ или } OAB + OAC - OBC = ABC,$$

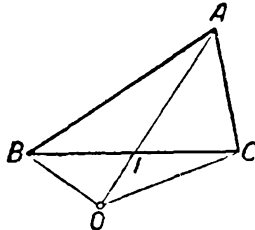
т. е. искомое соотношение, так как треугольник OBC — отрицателен.

5°. Точка O лежит внутри угла, вертикального одному из углов треугольника ABC , например углу A (черт. 246). При этом точка A лежит внутри треугольника OBC , и мы имеем (3°):

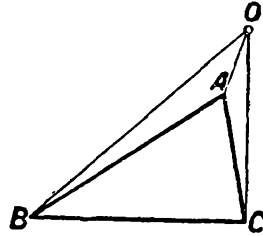
$OBC = ABC + OAB + OAC$ или $OBC - OAB - OAC = ABC$; это и есть искомое соотношение, так как треугольник OBC положителен, а два других — отрицательны.



Черт. 244.



Черт. 245.

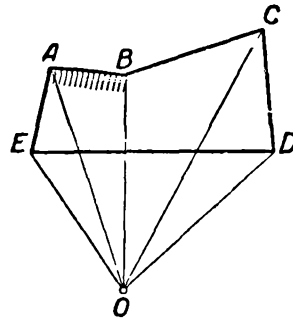


Черт. 246.

316. Пусть теперь $ABCDE$ — произвольный многоугольник (черт. 247), и O — какая-либо точка в плоскости этого многоугольника. Соединяя эту точку со всеми вершинами, мы опять получим ряд треугольников, имеющих общей вершиной точку O , а основаниями — стороны данного многоугольника; каждый из этих треугольников мы будем считать положительным или отрицательным, смотря по тому, лежит ли он с данным многоугольником¹⁾ по одну сторону или по разные стороны от их общего основания.

Теорема. Пусть даны: многоугольник, разложенный каким-либо способом на n треугольников, и какая-либо точка O в его плоскости, которую мы соединим со всеми вершинами многоугольника. Разность S между суммой площадей положительных треугольников с вершиной в точке O и суммой площадей отрицательных треугольников с той же вершиной (или первая из этих сумм, если отрицательных треугольников не будет) равняется сумме Σ площадей n треугольников, на которые разложен многоугольник.

Если теорема верна для двух смежных многоугольников P и P' , разложенных на треугольники, то она верна и для их суммы P'' . Дей-



Черт. 247.

¹⁾ Говоря о расположении многоугольника относительно одной из его сторон, мы подразумеваем при этом ту область, которая непосредственно примыкает к этой стороне. Например, треугольник OAB (черт. 247) будет положительным, так как он лежит по ту же сторону от AB , что и заштрихованная часть многоугольника.

ствительно, в контурах многоугольников P и P' следует различать две части: стороны или отрезки сторон¹⁾, не являющиеся общими, которые вместе с соответствующими им положительными или отрицательными треугольниками входят в состав многоугольника P'' , и стороны или отрезки сторон, общие обоим многоугольникам. Этим сторонам или отрезкам сторон соответствуют треугольники, которые будут положительными для одного из двух многоугольников P и P' и отрицательными для другого (потому что многоугольники P , P' расположены по обе стороны от их общей стороны) и которые, следовательно, взаимно уничтожаются, если составить сумму величин S , соответствующих двум многоугольникам. Следовательно, эта сумма будет действительно равна величине S для многоугольника P'' . Так как, с другой стороны, величина Σ для P'' будет, очевидно, равна сумме аналогичных величин для многоугольников P и P' , то равенство этих двух величин будет действительно иметь место для третьего многоугольника P'' , если оно имеет место для двух первых.

Теперь доказательство можно считать законченным, так как, с одной стороны, теорема доказана для $n=1$ (она совпадает в этом случае с предыдущей теоремой), а с другой, если она верна для одного значения n , то она верна и для следующего (так как многоугольник, составленный из $n+1$ треугольников, представляет собой сумму одного треугольника и многоугольника, составленного из n треугольников).

Следствия: *Величина S не зависит от выбора точки O , так как величина Σ от этого выбора не зависит.*

Точно так же величина Σ не зависит от способа разложения многоугольника на треугольники.

317. Назовём площадью многоугольника общее значение двух величин S и Σ .

Два равных многоугольника имеют одну и ту же площадь, так как их можно разложить на попарно равные треугольники; с другой стороны, предыдущее доказательство показывает, что если два многоугольника смежны между собой, то площадь составленного из них многоугольника равна сумме площадей обеих частей.

Короче говоря, *определённые таким образом площади обладают свойствами I и II.*

318. Отсюда следует, что *многоугольник невозможно разложить на такие части, которые, будучи расположены иначе (но так, чтобы они были смежными друг с другом), образовывали бы многоугольник, лежащий внутри первого многоугольника, так как*

¹⁾ Может оказаться необходимым разделить какую-либо сторону многоугольника P на отрезки (из которых одни будут общими с периметром многоугольника P' , другие нет) и заменить треугольник, имеющий O своей вершиной и данную сторону основанием, несколькими треугольниками, имеющими эти отрезки своими основаниями. Величина S при этом не изменится, так как (предыдущая теорема) эти треугольники имеют своей суммой исходный треугольник. Точно так же поступим и с P' и P'' .

второй многоугольник должен иметь необходимо ту же площадь, что и первый.

Это предложение оставалось вовсе не доказанным в теории, данной в тексте книги, так как там существование площадей представляло собой постулат.

319. До сих пор мы ничего не говорили о выборе числа k . Очевидно, что изменение этого числа сводится к замене всех площадей пропорциональными им площадями. Мы уже указывали (п. 244), что эта замена не нарушает обоих основных свойств площади.

Мы определим теперь k так, чтобы квадрат, построенный на единице длины, имел площадь, равную единице. Этот квадрат состоит из двух треугольников, каждый из которых имеет как основанием, так и высотой единицу длины. Следовательно, его площадь равна $2k$, так что мы выберем $k = \frac{1}{2}$; всякий треугольник будет при этом иметь

своей площадью половину произведения основания на высоту. Определённые этим путём площади совпадают при таком выборе k с теми, которые мы рассматривали в четвёртой книге¹⁾.

ПРИБАВЛЕНИЕ Е.

ЗАДАЧА МАЛЬФАТТИ.

320. Пользуясь основными свойствами окружностей, касательных к двум данным окружностям или к ним *изогональных* (т. е. пересекающих их под равными углами), изложенными как в дополнениях к третьей книге (пп. 227—236), так и в Прибавлении С, мы имеем возможность решить известную задачу Мальфатти, которая формулируется следующим образом.

Пусть даны три прямые (a_1) , (a_2) , (a_3) , лежащие на одной плоскости²⁾; требуется найти три окружности (x_1) , (x_2) , (x_3) , из которых первая касается прямых (a_2) и (a_3) , вторая — прямых (a_3) и (a_1) , а третья — прямых (a_1) и (a_2) , которые попарно касаются друг друга³⁾.

¹⁾ Рассуждения, приведённые выше, показывают, что данное нами определение площадей является единственным, которое обладает указанными выше двумя свойствами и удовлетворяет тому условию, что квадрат, построенный на единице длины, имеет своей площадью единицу.

²⁾ Мы будем формулировать решение задачи в общем предположении, что прямые образуют треугольник (вершины которого мы обозначим через A_1 , A_2 , A_3); в частном предположении, что две из этих прямых параллельны, можно было бы применить те же рассуждения.

³⁾ Мы предполагаем, что девять точек касания (искомых окружностей с данными прямыми и между собой) отличны друг от друга; иначе говоря, мы не рассматриваем того случая, когда прямая (a_1) , например, будет общей касательной к окружностям (x_2) и (x_3) в точке их прикосновения друг к другу (впрочем, пользуясь теми же самыми методами, можно было бы рассмотреть и этот случай).

321. Решенное, полученное впервые Штейнером, которое мы изложим, следуя Шрётеру, использует прежде всего свойство, доказанное в п. 228.

Мы видели там, что окружности Σ , касательные к двум определённым окружностям C и C' , или, общее, окружности, изогональные к этим окружностям, т. е. пересекающие их под равными углами, можно разделить в два семейства; каждое из этих двух семейств можно охарактеризовать (в случае, когда обе инверсии, преобразующие C в C' , имеют положительную степень) тем свойством, что окружности одного семейства пересекают под прямым углом некоторую окружность Γ , а окружности второго семейства — другую окружность Γ_1 .

Так как окружности Γ и Γ_1 аналогичны, как мы указывали, биссектрисам углов между двумя прямыми, то мы будем называть их в дальнейшем *биссектральными окружностями* (*cercles bissecteurs*) окружностей C и C' .

Одна из двух биссектральных окружностей обращается в прямую линию в том и только в том случае, когда окружности C и C' равны между собою (п. 225).

Если окружности C и C' касаются друг друга, то одно из двух семейств изогональных окружностей состоит, очевидно, из окружностей, проходящих через точку касания. Соответствующая биссектральная окружность обращается в ту же точку касания. При этом не существует соответствующей инверсии, которая преобразовывала бы окружность C в C' , так как степень этой инверсии равнялась бы нулю. В дальнейшем, когда мы будем говорить об окружностях Σ , изогональных к окружностям C и C' , касающимся друг друга, мы будем иметь в виду не эти окружности, проходящие через точку касания, а семейство окружностей Σ в собственном смысле, т. е. то семейство, окружности которого не проходят через одну и ту же точку и преобразуются сами в себя с помощью некоторой инверсии (со степенью, не равной нулю).

Если преобразовать окружности C и C' с помощью одной и той же инверсии в окружности C_1 и C_1' , то та же самая инверсия преобразует и биссектральные окружности окружностей C и C' в биссектральные окружности окружностей C_1 и C_1' . В самом деле, определение биссектральной окружности основано исключительно на понятии угла между двумя окружностями, а этот угол не изменяется при инверсии.

322. Пусть, с другой стороны, (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_3) — три окружности с центрами в точках ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , попарно касающиеся друг друга (для определённости — внешним образом) в точках π_1 , π_2 , π_3 (черт. 248). Соединим точки π_2 и π_3 прямой линией, и пусть μ_1 и ν_1 — вторые точки пересечения этой прямой соответственно с окружностями (ξ_2) и (ξ_3) .

Через точки μ_1 и ν_1 проходит новая окружность (α_1) , касающаяся в этих точках соответственно окружностей (ξ_2) и (ξ_3) , центр которой α_1 лежит в точке пересечения прямых $\mu_1\xi_2$ и $\nu_1\xi_3$. *Радиус этой окружности равен сумме радиусов трёх данных окружностей.*

Это видно из того, что прямые $\mu_1\xi_2$ и $\xi_1\xi_3$ параллельны, так как точка π_3 есть центр подобия окружностей (ξ_1) и (ξ_2) ; по аналогичной

причине прямые $\nu_1 \xi_3$ и $\xi_1 \xi_2$ также параллельны. Равенство противоположных сторон параллелограмма $\alpha_1 \xi_2 \xi_1 \xi_3$ показывает, что каждое из расстояний $\alpha_1 \mu_1$ и $\alpha_1 \nu_1$ равно сумме трёх радиусов.

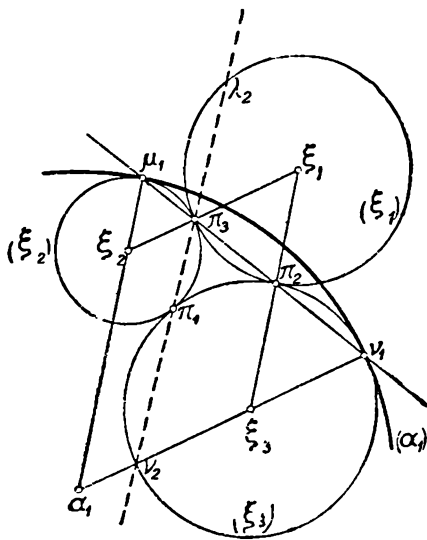
Если мы теперь соединим точно так же прямой линией точки π_1 и π_3 и обозначим через λ_2 и ν_2 точки пересечения этой прямой соответственно с окружностями (ξ_1) и (ξ_3) , то окружность (α_2) , касающаяся в этих точках соответственно окружностей (ξ_1) и (ξ_3) , равна окружности (α_1) , потому что к этой новой окружности приложимо предыдущее рассуждение.

Легко далее убедиться, что равенство окружностей (α_1) и (α_2) сохранило бы силу и в том случае, если бы не все окружности (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_3) попарно касались друг друга внешним образом¹⁾.

Из равенства этих окружностей легко выводится следующая лемма, на которой основаны наши дальнейшие рассуждения.

Лемма. Пусть три окружности (x_1) , (x_2) , (x_3) попарно касаются друг друга²⁾ в точках P_1 , P_2 , P_3 ; обозначим через (a_1) окружность, касательную к (x_2) и (x_3) в точках t_1 и n_1 ; через (a_2) — окружность, касательную к (x_1) и (x_3) в точках l_2 и n_2 , так что точки t_1 , n_1 , P_2 , P_3 лежат (пп. 227, 224)³⁾ на одной окружности (k_1) и точки l_2 , n_2 , P_1 , P_3 — на одной окружности (k_2) .

Точка пересечения N_3 (отличная от P_3) окружностей (k_1) и (k_2) лежит на биссектральной окружности⁴⁾ (g_3) окружностей (a_1) и (a_2) .



Черт. 248.

¹⁾ В этом случае две из окружностей (ξ) необходимо касались бы друг друга внешним образом, а третьей окружности — внутренним образом. Радиус каждой из окружностей (a) был бы при этом равен разности между радиусом большей окружности и суммой радиусов двух меньших.

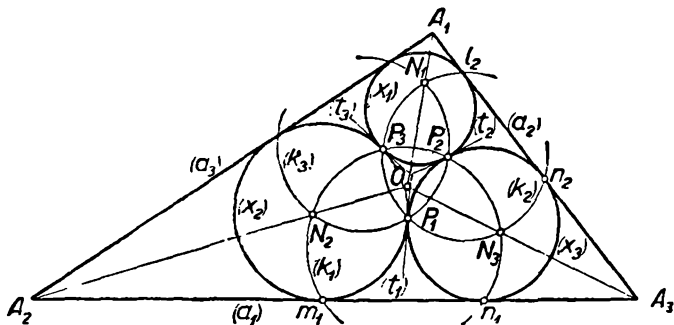
²⁾ Каждая из точек P есть точка касания двух окружностей (x) , индексы которых отличны от индекса данной точки P .

³⁾ Чтобы иметь право пользоваться теоремой п. 224, необходимо в общем случае убедиться, что окружности (a_1) и (x_1) принадлежат к одному и тому же семейству окружностей, касательных к (x_2) и (x_3) ; однако в данном случае существует лишь одно семейство (в собственном смысле).

⁴⁾ Это будет биссектральная окружность, соответствующая тому семейству окружностей, касательных к (a_1) и (a_2) , к которому принадлежит окружность (x_3) .

В самом деле, преобразуем с помощью обратных радиусов рассматриваемую фигуру, выбрав за полюс точку N_3 . Окружности (x_1) , (x_2) и (x_3) преобразуются в новые окружности (ξ_1) , (ξ_2) и (ξ_3) ; окружности (a_1) и (a_2) — в окружности (α_1) и (α_2) , окружности (k_1) и (k_2) — в две прямые¹⁾. Таким образом, мы получаем только что рассмотренную фигуру, и окружности (α_1) и (α_2) будут, как мы доказали, равны между собой. Их биссектральная окружность будет прямой линией, откуда и следует, что биссектральная окружность окружностей (a_1) и (a_2) проходит через точку N_3 , что и требовалось доказать.

Далее, окружность, проходящая через точки n_1 , n_2 , N_3 , ортогональна к окружностям (x_3) , (a_1) , (a_2) , (g_3) .



Черт. 249.

Окружность (k_1) пересекает окружности (a_1) и (g_3) под одним и тем же углом; точно так же окружность (k_2) — окружности (a_2) и (g_3) . Угол, который окружность (k_1) образует с окружностью (g_3) в точке N_3 , имеет направление, противоположное углу, который та же окружность образует в точке n_1 с окружностью (a_1) .

Все эти свойства непосредственно очевидны на фигуре (черт. 248), преобразованной с помощью инверсии, имеющей полюс в точке N_3 , где точки γ_1 и γ_2 — диаметрально противоположные точки окружности (ξ_3) .

323. Доказав эти свойства, мы можем приступить к решению поставленной задачи.

I. Обозначим, как и выше, через P_1 , P_2 , P_3 точки касания искомым окружностей (x_1) , (x_2) , (x_3) , взятых попарно (черт. 249). К этим трём окружностям мы можем применить только что доказанную лемму, принимая за окружности (a_1) и (a_2) соответственно прямые (a_1) и (a_2) . Мы видим, таким образом:

1) что через точки P_2 , P_3 и через точки касания m_1 и n_1 окружностей (x_2) и (x_3) со стороной (a_1) проходит окружность (k_1) ; через точки P_3 , P_1 и точки касания n_2 и l_2 окружностей (x_3) и (x_1) со сто-

¹⁾ Прямые $\mu_1\mu_1$ и $\lambda_2\lambda_2$ на чертеже 248. *Прим. ред. перевода.*

роной (a_2) — окружность (k_2); через точки P_1 , P_2 и через точки касания окружностей (x_1) и (x_2) со стороной (a_3) — окружность (k_3);

2) что, например, окружности (k_1) и (k_2) пересекаются, кроме точки P_3 , в некоторой точке N_3 , лежащей на биссектрисе (g_3) угла между прямыми (a_1) и (a_2), которая играет в данном случае роль биссектральной окружности (если, как мы пока будем предполагать, искомые окружности лежат внутри треугольника, то это будет биссектриса внутреннего угла); окружности (k_2) и (k_3) точно так же пересекаются в некоторой точке N_1 , лежащей на биссектрисе (g_1) угла между прямыми (a_2) и (a_3), а окружности (k_3) и (k_1) — в некоторой точке N_2 , лежащей на биссектрисе (g_2) угла между прямыми (a_3) и (a_1);

3) что окружность (k_1) пересекает прямые (a_1) и (g_3) под одним и тем же углом.

Можно сейчас же заметить, что по вполне аналогичной причине угол, образованный окружностью (k_1) с (g_2), равен углу, который окружность (k_1) образует с (a_1) или с (g_3).

Он равен также углу, который окружность (k_1) образует с окружностью (x_2) в точке m_1 (где последняя касается стороны a_1) или, что одно и то же, с точностью до направления¹⁾ в точке P_3 .

II. Обозначим через (t_1), (t_2), (t_3) общие касательные к искомым окружностям соответственно в точках касания P_1 , P_2 , P_3 . Мы видим, что прямая (t_3) пересекает окружность (k_1) под тем же углом, как и прямая (g_3), причём в точке P_3 этот угол имеет, как в этом легко убедиться с помощью сказанного выше¹⁾, направление, противоположное направлению аналогичного угла между (k_1) и (g_3) в точке N_3 .

Точка P_3 , очевидно, симметрична с точкой N_3 относительно линии центров окружностей (k_1) и (k_2); поэтому прямая (t_3) будет симметричной с (g_3) относительно той же прямой, так как обе прямые образуют с окружностью (k_1) равные углы, имеющие противоположные направления.

Наконец, по той же причине и прямая (t_2) пересекает окружность (k_1) под тем же углом: она симметрична с прямой (g_2) относительно линии центров окружностей (k_3) и (k_1).

Но прямые, пересекающие данную окружность под одним и тем же углом, будут, очевидно, касательными к одной и той же окружности, концентричной с данной окружностью.

Следовательно, пять прямых (a_1), (g_2), (g_3), (t_2), (t_3) касаются одной и той же окружности²⁾ (k_1'), концентричной с окружностью (k_1).

¹⁾ Чтобы определить направления рассматриваемых углов, приходится воспользоваться тем обстоятельством, что две окружности (или окружность и прямая), пересекающиеся в двух точках, образуют при этих точках углы, имеющие противоположные направления (это очевидно, так как эти углы симметричны друг с другом относительно некоторой прямой).

²⁾ На чертеже 249 не показаны окружности (k_1'), (k_2') и (k_3'), чтобы не усложнять чертежа.

Этот результат равносильно решению поставленной задачи. Действительно, окружность (k_1') можно считать известной, так как три из пяти её касательных, а именно (a_1) , (g_2) , (g_3) известны, коль скоро задан треугольник.

Так как те же самые рассуждения применимы и к окружностям (k_2') и (k_3') , аналогичным окружности (k_1') и соответственно concentричным с окружностями (k_2) и (k_3) , то мы приходим к следующему построению:

Пусть O — центр одной из окружностей, касательных к трём данным прямым; (g_1) , (g_2) , (g_3) — прямые, соединяющие точку O с вершинами треугольника, образованного данными прямыми.

Строим окружность (k_1') , касательную к прямым (a_1) , (g_2) , (g_3) ¹⁾, окружность (k_2') , касательную к прямым (a_2) , (g_3) , (g_1) , и окружность (k_3') , касательную к прямым (a_3) , (g_1) , (g_2) .

Пусть (t_1) — вторая общая касательная окружностей (k_2') и (k_3') , симметричная с (g_1) относительно линии центров этих окружностей; (t_2) — общая касательная окружностей (k_3') и (k_1') , симметричная с (g_2) относительно линии центров этих окружностей; (t_3) — общая касательная окружностей (k_1') и (k_2') , симметричная с (g_3) относительно линии центров этих окружностей.

Одна из искоемых окружностей (x_1) касается²⁾ прямых (a_2) , (a_3) , (t_2) , (t_3) ; точно так же окружность (x_2) касается прямых (a_3) , (a_1) , (t_3) , (t_1) , а окружность (x_3) — прямых (a_1) , (a_2) , (t_1) , (t_2) .

Прямые (g_1) , (g_2) , (g_3) могут быть при этом биссектрисами любых трёх углов, образованных данными прямыми, взятыми попарно, лишь бы они проходили через одну точку³⁾.

¹⁾ Существуют четыре окружности, касательные к прямым (a_1) , (g_2) , (g_3) . Если мы хотим, чтобы искомые окружности (x_1) , (x_2) , (x_3) лежали внутри данного треугольника, то необходимо, очевидно, чтобы окружность (k_1') была вписанной в треугольник, образованный этими прямыми. В противном случае за окружность (k_1') можно принять любую из этих четырёх окружностей; но в таком случае две другие аналогичные окружности будут вполне определены; действительно (возвращаясь с помощью инверсии с полюсом в N_3 к фигуре, рассмотренной вначале при доказательстве леммы), можно убедиться, что хорды N_3n_1 , N_3n_2 должны быть симметричны друг с другом относительно прямой (g_3) , так что тем же самым свойством должны обладать и биссектрисы углов между прямыми (a_1) и (g_3) и между прямыми (a_2) и (g_3) , проходящие соответственно через центры окружностей (k_1) и (k_2) .

²⁾ Центр этой окружности лежит на прямой (g_1) , а не на перпендикулярной к (g_1) биссектрисе угла треугольника; выбирая определённые направления на прямых (g) и (t) , можно также доказать, что он лежит на той из биссектрис углов между прямыми (t_2) и (t_3) , которая проходит через центр окружности (k_1) .

³⁾ Это следует из того, что искомые окружности необходимо должны касаться друг друга внешним образом, а прямые (a) должны быть внешними общими касательными [см. ниже аналогичное замечание для случая, когда (a_1) , (a_2) , (a_3) — окружности].

Осталось ещё доказать, что приведённое построение действительно даёт окружности, отвечающие условиям задачи. Мы не будем приводить здесь соответствующего доказательства, принадлежащего Петерсену¹⁾.

324. Замечательно, что предыдущее решение непосредственно распространяется на тот случай, когда вместо трёх прямых даны три произвольные окружности (a_1) , (a_2) , (a_3) ²⁾.

В этом случае (g_1) , (g_2) , (g_3) будут биссектральными окружностями соответственно для окружностей (a_2) , (a_3) ; (a_3) , (a_1) ; (a_1) , (a_2) ³⁾. При этом все предыдущие рассуждения, относящиеся к (a_1) , (a_2) , (a_3) , (g_1) , (g_2) , (g_3) , (k_1) , (k_2) , (k_3) (три последние окружности определяются как

¹⁾ Journal de Crelle, т. 89, стр. 130—135. Прежде всего, очевидно, необходимо доказать, что четыре прямые (a_2) , (a_3) , (t_2) , (t_3) касаются одной и той же окружности. Читатель, который решит упражнение 422, убедится, что это действительно так и будет, даже в том случае, когда O — произвольная точка (а не центр вписанной окружности), и что при тех же условиях прямые (t_1) , (t_2) , (t_3) проходят через одну точку.

Напротив, то обстоятельство, что три построенные таким образом окружности попарно касаются друг друга, существенно зависит от выбора точки O (см. цитированный мемуар Петерсена). Ограничиваясь случаем, когда окружности (x) лежат внутри данного треугольника, заметим, что существование решения очевидно из соображений непрерывности. Пусть построена какая-либо окружность (x_1) , касательная к прямым (a_2) и (a_3) и лежащая внутри треугольника; существует окружность (x_2) , также лежащая внутри треугольника и касательная к (a_1) , (a_3) и (x_1) , и точно так же — окружность (x_3) , лежащая внутри треугольника и касательная к (a_1) , (a_2) и (x_1) .

Очевидно, что обе окружности (x_2) и (x_3) пересекаются, если окружность (x_1) имеет очень малый радиус, и лежат одна вне другой, если (x_1) совпадает с вписанной окружностью треугольника. Следовательно, при некотором значении радиуса окружности (x_1) окружности (x_2) и (x_3) будут касаться друг друга.

²⁾ Эта новая задача непосредственно приводилась бы к предыдущей, если бы окружности (a_1) , (a_2) , (a_3) имели общую точку S (а именно: с помощью инверсии, имеющей точку S своим полюсом). Однако задачу приходится решать заново, если это условие не выполняется.

³⁾ Среди шести биссектральных окружностей данных окружностей (a_1) , (a_2) , (a_3) , взятых попарно, окружности (g_1) , (g_2) , (g_3) должны быть выбраны таким образом, чтобы они имели (задача 276) общую радикальную ось. В самом деле, предположим для определённости, что искомые окружности касаются друг друга внешним образом. Окружность (a_1) будет при этом иметь с окружностями (x_2) и (x_3) касание того же рода, что и окружность (x_1) , так как существует лишь одно семейство, в собственном смысле, окружностей, касательных к (x_2) и (x_3) ; точно так же (a_2) будет иметь с окружностями (x_3) и (x_1) касание одного и того же рода, а окружность (a_3) — касание одного и того же рода с окружностями (x_1) и (x_2) . Рассматривая все возможные предположения относительно характера касания этих окружностей, легко убедимся в том, что окружности (g) удовлетворяют указанному в тексте условию.

Случай, когда две из трёх окружностей касаются друг друга внутренним образом, сводится к предыдущему с помощью надлежащим образом выбранной инверсии (инверсия даёт также возможность упростить исследование первого случая).

и выше), т. е. все предыдущие рассуждения до части II п. 323, сохраняются без изменения¹⁾.

Чтобы распространить на настоящий случай и вторую часть решения предыдущей задачи, надо определить, что мы будем теперь понимать под (f_1) , (f_2) , (f_3) .

С этой целью обозначим через (C) окружность, ортогональную к окружностям (a_1) , (a_2) , (a_3) (предполагая для определённости, что такая окружность существует²⁾).

Мы будем обозначать через (f_1) окружность, касательную к окружностям (x_2) и (x_3) в их точке касания P_1 и в то же время ортогональную к (C) . Точно так же (f_2) и (f_3) будут окружностями, каждая из которых касается двух из искоемых окружностей в их точке касания и в то же время ортогональна к окружности (C) .

Проведённые выше рассуждения показывают, что окружность (k_1) пересекает под равными углами³⁾, с одной стороны, окружности (x_2) и (x_3) , а с другой стороны, — окружности (a_1) , (g_2) , (g_3) .

Три последние окружности ортогональны к (C) .

Отсюда следует (см. Прибавление C, в частности п. 310), что любая окружность (k_1') , имеющая общую радикальную ось⁴⁾ с окружностями (k_1) и (C) , также будет изогональна к окружностям (a_1) , (g_2) , (g_3) , и что если выбрать эту окружность так, чтобы она касалась одной из них (построение п. 311), то она будет касаться также и двух других.

Окружность (f_3) получается из (g_3) с помощью инверсии⁵⁾, которая преобразует самих в себя окружности (C) , (k_1) и (k_2) ; эта инверсия останется тою же самой, если заменить (k_1) и (k_2) через (k_1') и (k_2') .

Таким образом, получается следующее построение: пусть (a_1) , (a_2) , (a_3) — данные окружности и (g_1) , (g_2) , (g_3) — биссектральные окружности соответственно окружностей (a_2) и (a_3) , (a_3) и (a_1) , (a_1) и (a_2) , причём эти биссектральные окружности выбраны так, чтобы они имели общую радикальную ось; пусть далее (C) — окружность, ортогональная к трём данным.

¹⁾ Отсюда следует, что рассматриваемые биссектральные окружности необходимо существуют всякий раз, когда задача имеет решение, так как, например, окружность (g_1) должна иметь своим центром один из центров подобия окружностей (a_2) и (a_3) и проходить через точку N_3 .

²⁾ Эта окружность обращается в точку в случае, отмеченном в сноске ²⁾ на стр. 289.

³⁾ Относительно направления этих равных углов можно сделать те же замечания, что и выше.

⁴⁾ Понятно, что в отличие от того, что мы имели при решении первой задачи, окружность (k_1') не будет, вообще говоря, концентричной с (k_1) .

⁵⁾ Это вытекает, как и выше, из того, что окружность, которая получается из (g_3) путём указанной инверсии, удовлетворяет, — в отношении её точки пересечения с (g_1) , а также в отношении величины и направления угла, который она образует с (g_1) , — тем же условиям, как и окружность (f_3) , и, кроме того, она должна быть ортогональна (C) ; эти условия вполне определяют окружность (f_3) . Инверсия, о которой идёт речь, имеет своим полюсом общий радикальный центр трёх названных окружностей.

Определяем окружность (k_1') , касательную к (a_1) , (g_2) и (g_3) ; окружность (k_2') , касательную к (a_2) , (g_3) и (g_1) , и окружность (k_3') , касательную к (a_3) , (g_1) и (g_2) ¹⁾; или общее²⁾; определяем окружность (k_1'') , изогональную к (a_1) , (g_2) и (g_3) ; окружность (k_2'') , изогональную к (a_2) , (g_3) и (g_1) , и окружность (k_3'') , изогональную к (a_3) , (g_1) и (g_2) .

Пусть (g_1) преобразуется инверсией, преобразующей самих в себя окружности (C) , (k_3'') , (k_3') , в окружность (t_1) ; точно так же (g_2) — инверсией, преобразующей самих в себя окружности (C) , (k_3'') , (k_1'') , в окружность (t_2) ; наконец (g_3) — инверсией, преобразующей самих в себя окружности (C) , (k_1'') , (k_2'') , в окружность (t_3) .

Первая из искомых окружностей будет касательной к окружностям (a_2) , (a_3) , (t_2) , (t_3) , вторая — к окружностям (a_3) , (a_1) , (t_3) , (t_1) и третья — к окружностям (a_1) , (a_2) , (t_1) , (t_2) .

Нетрудно убедиться, что всё сказанное сохраняет силу и в том случае, когда радикальный центр I трёх окружностей (a_1) , (a_2) , (a_3) лежит внутри этих окружностей, так что окружность (C) не существует. В этом случае надо только заменить слова „окружность, ортогональная к (C) “, словами „окружность, относительно которой точка I имеет ту же степень, как и относительно окружностей (a_1) , (a_2) , (a_3) “, и условиться говорить, что „некоторая окружность (k_1') имеет общую радикальную ось с окружностями (k_1) и (C) “, если любая окружность, ортогональная к (k_1) и относительно которой точка I имеет ту же степень, как и относительно (a_1) , будет в то же время ортогональна и к (k_1') .

¹⁾ Как и выше, мы убедимся, что за (k_1') можно принять любую из окружностей, касательных к (a_1) , (g_2) и (g_3) ; но, что после того, как эта окружность выбрана, с необходимостью определяется то семейство окружностей, изогональных к окружностям (a_2) , (g_3) и (g_1) , к которому должна принадлежать окружность (k_2') или (k_2'') .

²⁾ Знать это обобщение весьма существенно; в самом деле, может случиться, что окружность (k_1') не существует (т. е. построение п. 311 окажется невозможным) даже и в том случае, когда рассматриваемая задача имеет решение.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ¹⁾.

343. Пусть A, B, C, D — четыре точки, лежащие на одной окружности (следующие друг за другом в том порядке, как они перечислены); возьмём середины a, b, c, d дуг AB, BC, CD, DA . Показать, что прямые ac и bd перпендикулярны.

344. На сторонах BC, CA, AB треугольника взяты три произвольные точки D, E, F и проведены окружности AEF, BFD, CDE . Доказать:

1) что эти три окружности проходят через одну точку O ;

2) что если соединить какую-нибудь точку P плоскости треугольника с его вершинами A, B, C , то вторые точки a, b, c , в которых эти прямые PA, PB, PC пересекают соответствующие окружности, лежат на одной окружности, проходящей через точки O и P .

345. Построим на каждой стороне вписанного четырёхугольника как на хорде какую-нибудь окружность. Четыре новые точки, в которых каждая из построенных таким образом окружностей пересекает следующую за ней, будут также вершинами вписанного четырёхугольника (доказать).

346. Пусть A и A' — точки пересечения окружности S_1 с окружностью S_2 ; B и B' — точки пересечения окружности S_2 с окружностью S_3 ; C и C' — точки пересечения окружности S_3 с окружностью S_4 ; D и D' — точки пересечения окружности S_4 с окружностью S_1 ; условие, при котором четырёхугольник $ABCD$ (а, следовательно, в силу предыдущего и четырёхугольник $A'B'C'D'$) может быть вписан в окружность, заключается в том, чтобы сумма углов между S_1 и S_2 и между S_3 и S_4 [при условии, что эти углы берутся в надлежащем направлении²⁾] равнялась сумме углов между S_2 и S_3 и между S_4 и S_1 (доказать).

347. Если четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4 таковы, что, построив „пару“ общих касательных (т. е. две внешних или две внутренних общих касательных) α и α' к S_1 и S_2 , пару общих касательных β и β' к S_2 и S_3 , пару общих касательных γ и γ' к S_3 и S_4 и пару общих касательных δ и δ' к S_4 и S_1 и выбрав „надлежащим образом“ по одной касательной из каждой пары, мы получим четыре прямые α, β, γ и δ , касательные к одной окружности, то и четыре прямые α', β', γ' и δ' будут касательными к одной окружности.

¹⁾ Задачи 349, 350, 353, 354, 384, 386, 387, 393, 394, 400, 404, 413 заимствованы из тем, предлагавшихся на „Concours général des lycées et collèges“; задачи 365, 374, 397, 406, 409, 412, 421 — из тем, предлагавшихся на „Concours de l'Agrégation des sciences mathématiques“. Впрочем, мы не считали необходимым воспроизводить в точности предлагавшиеся там формулировки; в частности, мы должны были внести в них некоторые изменения, чтобы привести их в согласие с упражнениями, предложенными в тексте настоящей книги.

²⁾ Следует стремиться, рассматривая направления углы и используя в случае надобности указания, имеющиеся в курсах тригонометрии, к получению доказательств, пригодных при любом расположении элементов фигуры.

Выбрав на каждой из четырёх окружностей определённое направление и рассматривая отрезки общих касательных как имеющие знак, выяснить, как именно следует выбирать четыре касательные α , β , γ и δ , чтобы это предположение имело место.

Это будет иметь место при условии, что сумма длин двух из общих касательных (считая от одной точки касания до другой) равняется сумме длин двух других общих касательных.

348. Около каждого треугольника, образованного тремя последовательными сторонами (или их продолжениями) произвольного пятиугольника, описана окружность. Доказать, что пять точек (отличных от вершин пятиугольника), в каждой из которых одна из окружностей пересекает следующую за ней, лежат на одной окружности (задача 106).

349. Даны два равных треугольника ABC и abc . Найти геометрическое место точек O таких, что если повернуть треугольник ABC около точки O так, чтобы сторона AB заняла положение $a'b'$, параллельное ac , то новое положение b' вершины B будет находиться на прямой OC . Найти также при этих условиях геометрические места, описываемые точками a' , b' , c' .

350. Пусть A' , B' , C' — точки, симметричные с точкой пересечения высот треугольника ABC относительно трёх его сторон BC , CA , AB . Пусть далее M и N — точки, в которых прямая $B'C'$ пересекает соответственно стороны AC и AB ; P и Q — точки, в которых прямая $C'A'$ пересекает BA и BC ; R и S — точки, в которых прямая $A'B'$ пересекает CB и CA . Показать, что прямые MQ , NR , PS пересекаются в одной точке (эта точка будет точкой пересечения высот треугольника ABC).

351. Вписать в данную окружность трапецию, зная её высоту и сумму или разность оснований.

352. Пусть AB — диаметр некоторой окружности, CMD — другая окружность с центром в точке A , пересекающая первую окружность в точках C и D ; точка M — произвольная точка второй окружности; N , P , Q — точки, в которых прямые BM , CM , DM пересекают соответственно первую окружность.

1°. Доказать, что $MPBQ$ — параллелограмм.

2°. Доказать, что MN — среднее пропорциональное между NC и ND .

353. Дан равнобедренный треугольник OAB ($OA=OB$). Опишем из вершины O , как из центра, окружность с переменным радиусом, к которой проведём соответственно из точек A и B две касательные, не пересекающиеся на высоте треугольника.

1°. Найти геометрическое место точек M пересечения этих двух прямых.

2°. Показать, что произведение $MA \cdot MB$ равно разности квадратов отрезков OM и OA .

3°. Найти геометрическое место точек I — концов отрезков, равных MA , отложенных на прямой MB от точки M .

354. Возьмём на основании BC какого-либо треугольника ABC произвольную точку D и опишем около треугольников ABD и ACD две окружности, центрами этих окружностей пусть будут O и O' .

1°. Показать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная.

2°. Найти положение точки D , для которого эти радиусы будут иметь наименьшую длину.

3°. Показать, что треугольник AOO' подобен треугольнику ABC .

4°. Найти геометрическое место точек M , делящих отрезок OO' в данном отношении; исследовать случай, когда соответствующая точка будет проекцией вершины A на прямую OO' .

355. Вокруг одной из точек пересечения двух окружностей вращается угол постоянной величины, стороны которого пересекают окружности соответственно в точках M и M' . Найти геометрическое место точек, де-

лящих отрезков MM' в данном отношении. Найти геометрическое место вершин треугольников, построенных на MM' как на основании и подобных данному треугольнику.

356. Если пять прямых A, B, C, D, E таковы, что на двух из них, например на A и B , три другие прямые отсекают пропорциональные отрезки, то и на двух любых из них три другие прямые будут отсекают пропорциональные отрезки (доказать).

(При доказательстве следует различать два случая, смотря по тому, принадлежит ли к числу тех двух прямых, для которых доказываеся теорема, одна из двух первых прямых или нет.)

357. Пусть a, b, c — стороны треугольника; x, y, z — расстояния какой-нибудь точки плоскости от его сторон. Доказать, что если эта точка лежит на окружности, описанной около треугольника, то одно из отношений $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$ будет равно сумме двух других. Рассмотреть обратную теорему.

358. Пусть C — некоторая точка отрезка AB ; найти геометрическое место точек пересечения переменной окружности, проходящей через точки A и B , с прямой, соединяющей точку C с точкой пересечения касательных к этой окружности в точках A и B .

359. Из переменной точки M , взятой на продолжении определённого диаметра окружности O , проведена касательная к этой окружности. Найти геометрическое место таких точек P на этих касательных, что $PM = MO$ (п. 92).

360. Из точки M , лежащей в плоскости прямоугольника, опущены перпендикуляры на его стороны, причём один из перпендикуляров пересекает две противоположные стороны (или их продолжения) в точках P и Q , а второй пересекает две другие стороны (или их продолжения) в точках R и S .

1°. Какова бы ни была точка M , точка пересечения H прямых PR и QS лежит всегда на одной и той же прямой; точка пересечения K прямых PS и QR также лежит всегда на одной и той же прямой, отличной от первой (доказать).

2°. Биссектриса угла HMK параллельна одной из сторон прямоугольника (доказать).

3°. Найти точку M , зная точки H и K .

4°. Последняя задача имеет два решения. Показать, что окружность, имеющая своими диаметрально противоположными точками точки M и M' , удовлетворяющие условиям задачи, пересекает ортогонально окружность, описанную около прямоугольника.

5°. Найти геометрическое место таких точек M , чтобы прямая PR была перпендикулярна к QS .

361. Если в треугольнике ABC через вершины B и C провести две прямые FB' и CC' , пересекающие треугольник так, чтобы отрезки этих прямых, считая от точек B и C соответственно до точек пересечения B' и C' со сторонами AC и AB , были равны между собою, то два угла — $\angle CBB'$ и $\angle B'BA$, на которые прямая BB' делит угол B , не могут быть оба больше или оба меньше аналогичных углов BCC' и $C'CA$, на которые прямая CC' делит угол C (т. е. что не может быть одновременно: $\angle CBB' > \angle BCC'$; $\angle B'BA > \angle C'CA$) (доказать).

(Дополнить треугольник $BB'C$ до параллелограмма $BB'CF$, принимая B и C за его противоположные вершины, и, соединив точки C' и F , сравнить углы при точках C' и F .)

Треугольник, имеющий две равные биссектрисы, — равнобедренный (доказать).

361a. Во всяком треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса (доказать).

(С помощью формулы п. 129 найти разность квадратов двух биссектрис и выделить в полученном выражении множитель, равный разности соответствующих сторон.)

362. Среди всех треугольников, вписанных в данный треугольник, найти тот, который имел бы наименьший периметр.

362а. Вписать в данный четырёхугольник $ABCD$ четырёхугольник $MNPQ$ с наименьшим периметром. Показать, что задача не имеет решений в собственном смысле этого слова (т. е. таких, чтобы получались настоящие четырёхугольники) в том случае, если данный четырёхугольник нельзя вписать в круг.

Но если $ABCD$ будет вписанным четырёхугольником, то существует бесчисленное множество четырёхугольников $MNPQ$ с одинаковым периметром, меньшим периметров всех других четырёхугольников, вписанных в $ABCD$. Этот общий периметр будет четвёртым пропорциональным к радиусу окружности $ABCD$ и диагоналям AC и BD .

Каким условиям должен, кроме того, удовлетворять четырёхугольник $ABCD$ для того, чтобы найденные таким образом различные четырёхугольники $MNPQ$ сами были вписанными?

Найти в этом случае геометрическое место центров описанных около них окружностей.

363. Показать, что если точка, найденная в задаче 105, лежит внутри треугольника, то она обладает тем свойством, что сумма её расстояний от трёх вершин будет наименьшей (упр. 269). Вычислить эту сумму (её квадрат равен полусумме квадратов трёх сторон, сложенной с произведением площади треугольника на $2\sqrt{3}$).

Что случится, если эта точка будет лежать вне треугольника? (Это будет в том случае, если один из углов, например угол A , будет больше 120° . Теорема Птолемея даёт отношение суммы $AB + AC$ к отрезку AI , отсекаемому описанной окружностью на биссектрисе угла A . Применяя теорему п. 237а к четырёхугольнику $BMC I$, увидим, что сумма $MA + MB + MC$ будет наименьшей, когда точка M совпадает с A .)

364. Найти такую точку, чтобы сумма её расстояний от трёх вершин данного треугольника ABC , соответственно умноженных на три данных положительных числа l, m, n , была наименьшей. Предполагается, что на трёх отрезках, пропорциональных данным числам, можно построить треугольник.

(Пусть T — такой треугольник: α, β, γ — его углы. Построим при точке A два угла BAC', CAB' , равные α ; при точке B — два угла CBA', ABC' , равные β ; при точке C — два угла ACB', BCA' , равные γ , так, чтобы все углы были расположены вне треугольника ABC . Прямые AA', BB', CC' пересекутся в одной точке, которая и будет искомой точкой, если она лежит внутри данного треугольника. В противном случае, а также в случае, если данные числа не пропорциональны сторонам треугольника, минимум будет иметь место в вершине треугольника ABC .)

В первом случае, когда минимум имеет место не для вершины треугольника, квадрат этого минимума может быть выражен через величины

$$l^2(b^2 + c^2 - a^2) + m^2(c^2 + a^2 - b^2) + n^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

и через произведение площадей треугольника ABC и треугольника T .)

365. Разделим каждую сторону треугольника на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, и соединим точки деления с противоположными вершинами. Доказать, что:

1) полученные таким образом прямые пересекаются в одной точке O' ;
2) эта точка совпадёт с точкой, которая получается в задаче 197, если принять за точку O центр тяжести треугольника;

3) эта точка будет центром тяжести треугольника PQR , образованного её проекциями на стороны данного треугольника.

366. Вписать в данный треугольник другой треугольник так, чтобы сумма квадратов его сторон была наименьшей. (Допустить, что минимум существует, и показать, что он будет иметь место только в случае треугольника PQR предыдущей задачи.)

Вывести отсюда, что точка O' , найденная в предыдущей задаче, обладает тем свойством, что сумма квадратов её расстояний от трёх сторон будет наименьшей (упр. 137, 140).

Более общая задача: вписать в данный треугольник другой треугольник так, чтобы сумма квадратов его сторон, умноженных соответственно на данные числа, была наименьшей.

367. Вписать в данную окружность такой треугольник, чтобы сумма квадратов его сторон, умноженных соответственно на данные числа, была наибольшей.

368. Для того чтобы задача, поставленная в упражнении 127 (найти точку, расстояния которой от трёх вершин треугольника ABC были бы пропорциональны трём данным числам m, n, p), имела решение, необходимо и достаточно, чтобы можно было построить треугольник, длины сторон которого были бы соответственно равны $m \cdot BC, n \cdot CA, p \cdot AB$.

369. Пусть через вершины A, B, C треугольника проведены три прямые таким образом, что отрезки AD, BE, CF этих прямых от вершин до противоположных сторон равны между собою. Если провести через любую точку O внутри треугольника прямые, параллельные этим прямым, до пересечения с соответствующими сторонами, то сумма отрезков, полученных таким образом из этих прямых, считая от точки O , будет постоянной, где бы ни была расположена эта точка.

370. Если три прямые проходят через одну точку, то всегда существуют такие два числа, что расстояния любой точки плоскости от одной из прямых будет равно сумме или разности расстояний той же точки от двух других прямых, умноженных на эти числа (доказать). Сформулировать результат так, чтобы он совершенно не зависел от положения точки (с помощью соответствующего условия относительно знаков).

Обратно, сумма или разность расстояний любой точки M плоскости от двух данных прямых, умноженных соответственно на данные числа, будет пропорциональна расстоянию точки M от некоторой прямой, проходящей через точку пересечения двух первых прямых (доказать).

371. Найти геометрическое место таких точек, что сумма их расстояний от n данных прямых, взятых с надлежащими знаками и умноженных на какие-либо данные числа, будет постоянна; другими словами, найти геометрическое место таких точек, чтобы алгебраическая сумма площадей треугольников, имеющих вершинами каждую из них и основаниями n данных отрезков, была постоянной. (Предыдущее упражнение даёт возможность решить задачу для некоторого значения n , если она уже решена для предыдущего значения.)

Вывести отсюда, что середины трёх диагоналей полного четырёхсторонника лежат на одной прямой.

371а. Три окружности, имеющие своими диаметрами диагонали полного четырёхсторонника, имеют общую радикальную ось. Эта радикальная ось проходит через точки пересечения высот четырёх треугольников, образованных сторонами четырёхсторонника, взятыми по три (доказать).

372. Противоположные стороны и диагонали любого четырёхугольника образуют три таких угла, что поляры любой точки O плоскости относительно каждого из этих углов пересекаются в одной точке (доказать).

(Преобразовать взаимными полярами, принимая точку O за центр направляющей окружности.)

Те же прямые отсекают на любой прямой три таких отрезка, что отрезок, делящий гармонически два из них (если такой отрезок существует), делит гармонически и третий (доказать).

Три отрезка, обладающие этим свойством, называются отрезками, находящимися в инволюции.

373. Прямая Симсона (упр. 72), соединяющая основания перпендикуляров, опущенных на три стороны треугольника из точки P описанной окружности, делит на две равные части отрезок, соединяющий эту точку с точкой пересечения H высот треугольника. (Для доказательства показать,

используя упражнение 70, что точки, симметричные с точкой P относительно трёх сторон, лежат на одной прямой, проходящей через точку H .

Вывести из этой теоремы и из результата, полученного в задаче 106, что точки пересечения высот четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми, взятыми по три, лежат на одной прямой.

374. Точка пересечения M двух прямых Симсона относительно треугольника ABC , вписанного в данную окружность S , соответствующих двум точкам P и P' этой окружности, описывает окружность S' , если точка C описывает окружность S (а точки A, B, P, P' — неподвижны) (доказать).

Найти геометрическое место центров окружностей S' , если точки A и B остаются неподвижными, а точки P и P' перемещаются по окружности S , оставаясь на постоянном расстоянии одна от другой.

Найти также геометрическое место, описываемое точкой M , если (при неподвижных точках A, B и C) точки P и P' перемещаются, оставаясь диаметрально противоположными друг другу.

375. Найти геометрическое место середин сторон треугольников, вписанных в данную окружность и имеющих одну и ту же точку пересечения высот.

376. Окружность девяти точек (задача 101) какого-нибудь треугольника преобразована с помощью инверсии, имеющей полюс в середине одной из сторон треугольника и степень, равную степени полюса инверсии относительно вписанной окружности, или, что сводится к тому же (упр. 90а), — относительно внеписанной окружности, соответствующей выбранной стороне. Показать, что прямая, в которую преобразуется окружность девяти точек, будет общей касательной к двум последним окружностям (отличной от стороны треугольника).

Отсюда следует, что окружность девяти точек касается вписанной и внеписанных окружностей треугольника.

377. Между радиусами R и r описанной и вписанной окружностей треугольника и расстоянием d между их центрами существует соотношение

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

(доказать, пользуясь задачей 103 и п. 126)¹⁾.

Обратно, если между радиусами двух окружностей и расстоянием между их центрами существует предыдущее соотношение, то можно вписать в первую из них бесчисленное множество треугольников, описанных около второй (доказать).

Получить аналогичный результат, заменив вписанную окружность внеписанной.

378. Во всяком треугольнике ABC :

1) прямая, соединяющая проекцию вершины B на биссектрису угла C с проекцией вершины C на биссектрису угла B , совпадает с хордой, соединяющей точки касания E и F (черт. 102 и упр. 90а) вписанной окружности с прямыми AC и AB ;

2) прямая, соединяющая проекцию вершины B на биссектрису угла C с проекцией вершины C на биссектрису внешнего угла при точке B , совпадает с хордой, соединяющей точки касания E_3 и F_3 внеписанной окружности, лежащей внутри угла C , с теми же прямыми;

3) прямая, соединяющая проекцию вершины B на биссектрису внешнего угла при точке C с проекцией вершины C на биссектрису внешнего угла при точке B , совпадает с хордой, соединяющей точки касания E_1 и F_1 внеписанной окружности, лежащей внутри угла A , с теми же прямыми;

4) проекции точки A на биссектрисы внутреннего и внешнего углов с вершиной в точке B и на биссектрисы внутреннего и внешнего углов с вершиной в точке C лежат на одной прямой, параллельной BC , на расстояниях, последовательно равных $p - c$, $p - a$, $p - b$ друг от друга;

¹⁾ См. другое решение той же задачи в упражнении 411.

5) проектируя вершины каждого из углов A, B, C треугольника на биссектрисы внешних углов, к ним не прилежащих, получим шесть точек, лежащих на одной окружности (сводится к задаче 102); эта окружность ортогональна к внеписанной окружностям данного треугольника; её центр будет центром окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$, имеющий своими вершинами середины сторон треугольника ABC ; её радиус равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами, равными полупериметру треугольника $A'B'C'$ и радиусу вписанной в него окружности; существуют ещё три аналогичные окружности, каждая из которых проходит через две проекции вершин на внешние биссектрисы и через четыре проекции вершин на внутренние биссектрисы (доказать).

379. Соединим между собою точки касания каждой из внеписанных окружностей треугольника с продолжениями его сторон. Показать, что построенные прямые образуют треугольник, вершины которого лежат на соответствующих высотах первого треугольника, и что центр описанной около второго треугольника окружности лежит в точке пересечения высот первого треугольника.

380. Пусть дана точка O , соответствующая самой себе (п. 150) в двух подобных и имеющих одинаковое направление вращения фигурах F и F' , а также треугольник T , подобный треугольнику, образованному этой точкой и двумя какими-нибудь их соответственными точками (п. 150); далее, пусть даны точка O' , сама себе соответствующая в двух подобных и имеющих одинаковое направление вращения фигурах F'' и F''' , а также треугольник T' , подобный треугольнику, образованному точкой O' и двумя какими-нибудь соответственными точками этих двух фигур. Построить точку, соответствующую самой себе в двух фигурах F и F' , и треугольник, подобный треугольнику, который образован этой точкой и двумя любыми соответственными точками фигур F и F' .

381. Построить многоугольник, зная вершины треугольников, имеющих своими основаниями стороны многоугольника и соответственно подобных данным треугольникам (предыдущее упражнение позволяет свести задачу, относящуюся к многоугольнику с определённым числом сторон, к задаче, относящейся к многоугольнику, число сторон которого на единицу меньше предыдущего; таким же образом можно поступать до тех пор, пока не сведём задачу к определению двух вершин многоугольника).

В каких случаях задача будет невозможна или неопределённа?

382. Пусть дан треугольник ABC и четыре произвольные точки O, a, b и c . Построим на BC , как на основании, треугольник BCA' , подобный треугольнику bcO и имеющий с ним одинаковое направление вращения (причём точки B и C соответствуют точкам b и c ; точно так же — на CA , как на основании, треугольник CAB' , подобный caO , и на AE , как на основании, треугольник ABC' , подобный треугольнику abO . Доказать, что треугольник $A'B'C'$ будет подобен треугольнику, имеющему вершинами точки, обратные точкам a, b, c в инверсии с полюсом в точке O , причём эти треугольники будут иметь противоположные направления вращения.

383. Опишем на двух данных отрезках две дуги окружностей, вмещающие каждая один и тот же угол V . Показать, что если угол V изменится, то радикальная ось двух окружностей, построенных таким образом, будет вращаться около некоторой определённой точки (положение этой точки определяется тем, что треугольники, которые мы получим, соединяя эту точку с концами каждого отрезка, будут равновелики и имеют равные углы при их общей вершине).

384. Дан четырёхугольник $ABCD$ (ромбoid), у которого две прилежащие стороны AD, AB равны между собою, так же как и другие две стороны CB и CD . Доказать, что стороны этого четырёхугольника касаются двух окружностей. Найти геометрические места центров этих окружностей при условии, что данный четырёхугольник — шарнирный и одна из сторон остаётся неподвижной.

385. Дан шарнирный четырёхугольник $ABCD$, описанный около окружности, причём его сторона AB остаётся неподвижной; при этих условиях он продолжает оставаться описанным (упр. 87). Найти геометрическое место центров O вписанных окружностей.

(Предполагая для определённости, что эта окружность лежит внутри четырёхугольника, отложить на AB отрезки $AE=AD$, $BF=BC$; тогда, принимая во внимание упражнение 89, мы придём к упражнению 257.)

Показать, что отношение расстояний от точки O до двух противоположных вершин A и C (или B и D) остаётся постоянным при деформации четырёхугольника.

386. Пусть даны четыре точки A, B, C, D , лежащие на одной окружности; возьмём какую-нибудь точку P в плоскости этой окружности и построим окружности PAB, PCD , пересекающиеся во второй раз в точке Q . Найти геометрическое место точки Q , если точка P описывает прямую или окружность. Найти также геометрическое место точки P при условии, что она совпадает с точкой Q .

387. Соединим вершины квадрата A, B, C, D с какой-нибудь точкой P его плоскости; полученные прямые пересекут окружность, описанную около квадрата, в четырёх новых точках A', B', C', D' . Доказать, что в четырёхугольнике $A'B'C'D'$ произведения противоположных сторон будут равны между собой:

$$A'B' \cdot C'D' = A'D' \cdot B'C'.$$

Обратно, пусть имеем вписанный четырёхугольник $A'B'C'D'$, произведения противоположных сторон которого равны между собой; найти такую точку P , что прямые PA', PB', PC', PD' пересекают описанную окружность в вершинах квадрата. (Этот вопрос является частным случаем упр. 270, 5°). Однако задача допускает здесь два решения, в то время как в общем случае она имеет только одно. Выяснить причину этого различия.)

388. Найти такую инверсию, чтобы вершины данного вписанного четырёхугольника $A'B'C'D'$ преобразовались в вершины прямоугольника (обобщение задачи 387). Показать, что полюсы инверсии будут предельными точками (упр. 152) описанной окружности и третьей диагонали четырёхсторонника, полученного продолжением сторон четырёхугольника $A'B'C'D'$.

389. Преобразовать с помощью инверсии четыре данные точки в четыре вершины параллелограмма (дальнейшее обобщение задач 387 и 388).

390. Даны две окружности и точка A ; найти такую инверсию, чтобы точка, соответственная точке A , совпала с одним из центров подобия окружностей, в которые преобразуются данные окружности.

391. Соединим переменную точку M данной окружности с двумя определёнными точками A и B ; пусть P и Q — вторые точки пересечения полученных прямых с данной окружностью, R — вторая точка пересечения той же окружности с прямой, параллельной AB и проходящей через точку P . Показать, что прямая QR пересекает AB в неподвижной точке.

Вывести отсюда способ вписать в данную окружность треугольник, две стороны которого проходят через данные точки, а третья параллельна данному направлению; или треугольник, все три стороны которого проходят через данные точки (эти оба вопроса сводятся один к другому и к задаче 115). Решить аналогичную задачу для многоугольника с любым числом сторон (другой способ был предложен в упр. 253а).

392. Описать около окружности треугольник, вершины которого лежат на данных прямых.

393. Построим две переменные окружности, касательные к одной прямой в двух её определённых точках A и B и в то же время касательные между собой. Эти две окружности имеют ещё одну общую касательную $A'B'$. Доказать, что окружности, имеющие своими диаметрами отрезки $A'B'$, касаются одной и той же окружности, и найти геометрическое место середины отрезков $A'B'$.

394. Две переменные окружности C и C_1 касаются данной окружности в двух данных ее точках A и B и, кроме того, касаются друг друга в точке M .

1°. Найти геометрическое место этой точки.

2°. Найти геометрическое место вторых центров подобия N окружностей C и C_1 .

3°. Каждой точке N предыдущего геометрического места соответствуют две пары окружностей C и C_1 , C' и C'_1 , удовлетворяющих указанным условиям, и, следовательно, две точки прикосновения M и M' (доказать).

4°. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников NMM' .

5°. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в эти треугольники.

6°. Найти геометрическое место точек пересечения их высот.

7°. Доказать, что всякая точка, общая двум из этих геометрических мест, будет принадлежать и третьему из них.

395. Пусть даны две пересекающиеся окружности C и C' . Опишем окружность около треугольника, образованного одной из их точек пересечения A и точками прикосновения P и P' одной из их общих касательных. Показать, что угол, под которым отрезок PP' виден из центра этой окружности, равен углу между окружностями C и C' и что радиус этой окружности есть среднее пропорциональное между радиусами данных окружностей (откуда следует предложение, указанное в упр. 262, 3°).

Доказать, что $\frac{AP}{AP'}$ есть корень квадратный из отношения тех же радиусов.

396. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять четыре окружности A, B, C, D , для того чтобы можно было преобразовать с помощью инверсии фигуру, образованную первыми двумя окружностями, в фигуру, равную той, которую образуют две последние (или, употребляя выражения, введенные в прибавлении А, пп. 289, 294, найти инварианты фигуры, образованной двумя окружностями, относительно группы инверсий).

1°. Если окружности A и B имеют общую точку, то необходимо и достаточно, чтобы угол между этими двумя окружностями был равен углу между окружностями C и D , или, что сводится к тому же (предыдущая задача), что отношение отрезка общей касательной к среднему пропорциональному их радиусов имеет одинаковую величину в обоих случаях.

2°. Если окружности A и B не имеют общих точек, то необходимо и достаточно, чтобы отношение радиусов концентрических окружностей, в которые их можно преобразовать одной и той же инверсией (упр. 248), было равно отношению радиусов концентрических окружностей, в которые можно преобразовать окружности C и D также одной и той же инверсией (вообще говоря, отличной от первой).

(Пользуясь терминологией, введенной в Прибавлении А, можно сказать: необходимо и достаточно, чтобы фигуры (A, B) и (C, D) имели одну и ту же приведенную форму относительно инверсии.)

Этот результат может быть выражен иначе. Сложное отношение (п. 212) точек пересечения двух окружностей A и B с любой из окружностей, им ортогональных, есть величина постоянная, и то же самое имеет место для сложного отношения двух из этих точек и двух предельных точек. Искомое условие состоит в том, чтобы это сложное отношение имело одинаковое значение как для окружностей C и D , так и для окружностей A и B (доказать).

Наконец, если r, r' — радиусы окружностей A и B , d — расстояние между их центрами, то величина $\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'}$ должна иметь то же числовое значение, как и аналогичная величина, вычисленная для окружностей C и D (доказать).

Можно ещё сказать, что если две окружности A и B имеют общую касательную (например внешнюю) длины t , и то же имеет место для окружностей C и D , то отношение $\frac{t}{\sqrt{rr'}}$ должно иметь одно и то же значение в обоих случаях.

397. Пусть даны две точки A, A' и две прямые D, D' , параллельные прямой AA' и находящиеся от неё на одинаковом расстоянии.

1°. Доказать, что каждой точке P , взятой на прямой D , соответствует точка P' , лежащая на D' и обладающая тем свойством, что прямая PP' будет общей касательной к окружностям PAA' и $P'AA'$.

2°. Доказать, что произведение расстояний от точек A, A' до прямой PP' есть величина постоянная.

3°. Найти геометрическое место проекций точки A на прямые PP' .

4°. Найти такую точку P , чтобы прямая PP' проходила через данную точку Q .

5°. Доказать, что угол между окружностями PAA' и $P'AA'$, а также угол PAP' постоянны.

398. Пусть AB — диаметр окружности C ; D — перпендикуляр к этому диаметру, по предположению пересекающий C ; c и c' — окружности, имеющие своими диаметрами соответственно отрезки, на которые D делит AB . Строим окружность, касательную к C, c, D , и окружность, касательную к C, c', D . Показать, что эти две последние окружности равны между собою: их общий радиус будет четвёртым пропорциональным к радиусам окружностей C, c, c' .

399. [Арбелос¹⁾ греческой геометрии.] Пусть A и B — две окружности, касающиеся друг друга; C — окружность, касающаяся их обеих; C_1 — окружность, касающаяся A, B, C ; C_2 — окружность, касающаяся A, B, C_1 ; C_3 — окружность, касающаяся A, B, C_2 ; и т. д.; C_n — окружность, касающаяся A, B, C_{n-1} . Рассмотрим расстояние центра одной какой-нибудь из окружностей C, C_1, C_2, \dots, C_n от линии центров окружностей A и B и отношение этого расстояния к диаметру соответствующей окружности. Доказать, что это отношение изменится на единицу, если перейти к одной из окружностей C_n к окружности, непосредственно за ней следующей, по крайней мере, в случае, если эти окружности будут касаться внешним образом (что всегда будет иметь место, если окружности A и B касаются друг друга внутренним образом), и их центры будут лежать по одну сторону от линии центров окружностей A и B . Показать, как следует изменить эту формулировку в остальных случаях.

400. Пусть A, B, C — три окружности с центрами соответственно в вершинах треугольника и попарно касающиеся друг друга внешним образом (упр. 91).

Зная стороны a, b и c данного треугольника, вычислить радиусы окружностей, касающихся этих трёх окружностей (предыдущая задача и упр. 301).

401. Даны три окружности с центрами A, B, C и радиусами a, b, c ; пусть H — радикальный центр трёх других окружностей, концентрических первым и имеющих радиусы, равные $a+h, b+h, c+h$; на AH возьмём такую

точку N , что $\frac{AN}{AH} = \frac{a}{a+h}$. Показать, что с изменением h точки H и N

описывают прямые, первая из которых проходит через центры окружностей, касающихся данных окружностей (одинаковым образом), а вторая — через точки прикосновения этих окружностей к окружности A .

Найти аналогичную теорему для случая окружностей, имеющих с окружностями A, B, C разноимённые касания.

402. Найти окружность, пересекающую четыре данные окружности под равными углами.

¹⁾ Арбелос — греческое слово, обозначающее серп.

403. Найти окружность, пересекающую три данные окружности под данными углами.

(В силу упр. 256 известен угол, под которым искомая окружность пересекает какую-либо из окружностей, имеющих с данными окружностями общий радикальный центр. Среди этих окружностей надо, пользуясь п. 311, найти три окружности, для которых этот угол равен нулю, и, таким образом, свести задачу к задаче о касании окружностей; или иначе ¹⁾: найти среди тех же окружностей две окружности, для которых этот угол будет прямой, и тогда задача будет сведена к упражнению 259.)

403а. Даны три окружности; построить такую четвертую окружность, чтобы отрезки общих касательных к этой окружности и к каждой из трёх данных окружностей имели данные длины.

(Эта задача может быть сведена к предыдущей, если провести через точку касания каждой искомой общей касательной окружность, концентрическую соответствующей данной окружности.)

404. Даны: окружность, две точки A, A' на этой окружности и прямая D . Показать, что на прямой D существуют две такие точки I, I' , что если через P, P' обозначить точки пересечения прямой D с прямыми, соединяющими точки A, A' с произвольной точкой M окружности, то произведение $IP \cdot I'P'$ постоянно, т. е. не зависит от положения точки M .

405. При тех же обозначениях, что и в предыдущей задаче, показать, что если прямая D не пересекает окружности, то существуют с той и с другой стороны от прямой по такой точке, что из каждой из них отрезок PP' виден под постоянным углом (задача 278).

406. Даны две непересекающиеся окружности S и Σ с центрами O и ω и радиусами, соответственно равными R и r , рассмотрим окружности C , касающиеся окружности S и ортогональные к окружности Σ .

1°. Доказать, что все эти окружности касаются одной и той же окружности, отличной от S .

2°. Пусть M и M' — точки пересечения окружностей C и Σ ; проведём через определённую точку A , лежащую на прямой $O\omega$, прямые, параллельные биссектрисам углов $O\omega M, O\omega M'$, до пересечения их в точках P, P' с данной прямой D , перпендикулярной к прямой $O\omega$. Доказать, что существуют две такие точки, что прямые, соединяющие каждую из них соответственно с точками P, P' , будут взаимно перпендикулярны.

3°. Доказать, что существуют две такие точки, что из каждой из них отрезок PP' виден под постоянным углом (предыдущая задача).

4°. Пусть C_1 — то положение окружности C , при котором она пересекает окружность Σ в точках M, M' ; C_2 — второе положение той же окружности, при котором она пересекает Σ в точке M' и третьей точке M'' ; C_3 — положение той же окружности, при котором она пересекает Σ в точках M'' и M''' ; и т. д. Найти условие, при котором окружность C_{n+1} совпадает с C_1 .

(Обозначим расстояние $O\omega$ через d ; тогда прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна $d^2 - R^2 - r^2$ (или $R^2 + r^2 - d^2$), а один из катетов равен $2Rr$, должен иметь один из острых углов, равный половине центрального угла, соответствующего стороне правильного выпуклого или звездчатого многоугольника, число сторон которого равно n или одному из делителей числа n .)

Если окружности S и Σ пересекаются, то точки M, M', M'', M''', \dots будут иметь своим предельным положением одну из их точек пересечения.

407. На прямой, проведённой через точку пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника и перпендикулярной к радиусу, проходящему

¹⁾ Задача, рассмотренная в п. 311, не всегда имеет решение, так как упомянутая там точка a может лежать внутри данных окружностей; это может иметь место даже в том случае, когда рассматриваемая сейчас задача имеет решение; показать, что этого затруднения всегда можно избежать, комбинируя надлежащим образом оба указанных нами метода.

через эту точку, две противоположные стороны четырёхугольника отсекают равные отрезки (доказать).

408. Даны две окружности C , C' и две пересекающие их прямые. Показать, что окружность, проходящая (задача 107а) через точки пересечения хорд, стягивающих дуги, отсечённые на окружности C , с хордами, стягивающими дуги, отсечённые на окружности C' , будет иметь общую радикальную ось с окружностями C и C' (воспользоваться упр. 149).

409. Даны две концентрические окружности S и S_1 и третья окружность C_1 . Геометрическое место центров таких окружностей, ортогональных к S , что радикальная ось какой-либо из них и окружности C_1 касается S , есть окружность S_1 , концентрическая с C_1 (доказать).

Обратно, геометрическое место центров таких окружностей, ортогональных к окружности C_1 , что радикальная ось каждой такой окружности и окружности S касается окружности S_1 , есть окружность S (доказать).

410. Примем каждую точку данной окружности C за центр новой окружности, радиус которой находится в данном отношении к расстоянию от этой точки до данной точки A плоскости (или, вообще, к отрезку касательной, проведённой из этой точки к некоторой второй окружности). Показать, что существует точка P , имеющая одну и ту же степень относительно всех построенных таким образом окружностей.

Радикальная ось каждой из этих окружностей и окружности C будет касательной к определённой окружности с центром в точке P (доказать).

411. Проводим через какую-нибудь точку окружности C касательные к окружности C' . Показать, что прямая, соединяющая между собой вторые точки пересечения этих касательных с окружностью C , будет в свою очередь касательной к некоторой определённой окружности (сводится к предыдущей задаче). Эта окружность имеет общую радикальную ось с окружностями C и C' .

Вычислить радиус этой новой окружности и расстояние от её центра до центра окружности C , зная радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами.

Вывести отсюда решение задачи 377.

412. Даны угол AOB и точка P .

1°. Найти на стороне OA такую точку M , чтобы две окружности C и C' , касательные к OB и проходящие через точки M и P , пересекались под данным углом.

2°. Изучить изменение угла между окружностями C и C' при перемещении точки M по OA .

3°. Пусть Q и Q' будут точками (отличными от M), в которых эти окружности пересекают сторону OA . Показать, что окружность, проходящая через точки P , Q , Q' , остаётся касательной к некоторой определённой прямой при перемещении точки M по OA (сводится к предыдущей задаче).

413. Отложим на двух данных параллельных прямых от точек их пересечения A и B с их общим перпендикуляром два таких отрезка AC и BD , чтобы площадь трапеции $ABDC$ была равна площади данного квадрата. Найти геометрическое место точек H — проекций середины отрезка AB на прямую CD (надо рассмотреть два случая, в зависимости от того, будут ли отрезки AC и BD отложены в одном направлении или в противоположных направлениях).

414. Дать другое решение вопроса, предложенного в задаче 329 (провести через точку, данную внутри угла, секущую так, чтобы она образовала со сторонами угла треугольник данной площади). Построить сначала параллелограмм с вершиной в данной точке, один из углов которого совпадает со сторонами данного угла. Этот параллелограмм выделяет из искомого треугольника две треугольные части, сумма площадей которых известна. Таким образом, вопрос можно свести к задаче 216.

415. Построить треугольник по углу, периметру и площади (упр. 90а, 299).

Из всех треугольников с одинаковым углом и с одинаковым периметром определить тот, который имеет наибольшую площадь.

416. Построить треугольник по стороне, периметру и площади (можно построить фигуру, образованную вписанной и невписанной окружностями).

Среди всех треугольников с общей стороной и одинаковой площадью найти тот, который имеет наименьший периметр. Из всех треугольников с общей стороной и одинаковым периметром определить тот, который имеет наибольшую площадь.

417. Из всех треугольников с одинаковым периметром определить тот, который имеет наибольшую площадь.

418. Построить четырёхугольник по четырём его сторонам и площади (пусть $ABCD$ будет искомым четырёхугольником, так что $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Пусть ABC_1 — треугольник, внешний по отношению к этому четырёхугольнику, равновеликий треугольнику ADC и имеющий $\angle C_1BA = \angle ADC$. Надо доказать последовательно, что известны следующие величины: 1) сторона BC_1 ; 2) разность квадратов AC и AC_1 ; 3) проекция CC_1 на AB ; 4) наконец, при помощи данной площади можно узнать проекцию CC_1 на перпендикуляр к AB , что позволит, отложив где-нибудь отрезок $AB=a$, построить отрезок, равный и параллельный CC_1 , и, следовательно, закончить требуемое построение).

Если задача возможна, то она имеет в общем случае два решения. Для обоих получающихся четырёхугольников треугольник, рассмотренный в упражнении 270, имеет одну и ту же форму, и, следовательно (упр. 270, 5°), оба четырёхугольника можно рассматривать как взаимно обратные (доказать).

Дан некоторый четырёхугольник; построить второй четырёхугольник, не равный данному, но имеющий те же стороны и ту же площадь.

Доказать, что среди всех четырёхугольников с данными четырьмя сторонами наибольшую площадь будет иметь вписанный четырёхугольник.

418а. Доказать, что произведение диагоналей e и f четырёхугольника выражается в функции его сторон a , b , c и d и его площади S формулой

$$4e^2f^2 = (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 + 16S^2,$$

а угол между диагоналями — формулой

$$\operatorname{tg} V = \frac{4S}{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}.$$

Вывести отсюда новое решение предыдущей задачи (задавись положением одной из сторон, мы определим каждую из остальных вершин как точку пересечения двух окружностей).

419. Построить вписанный четырёхугольник по четырём сторонам.

419а. Доказать, что из всех многоугольников с одинаковым числом сторон и одинаковым периметром наибольшую площадь будет иметь правильный многоугольник.

(Допустить, что существует многоугольник с наибольшей площадью; тогда можно доказать при помощи задачи 418, что этим многоугольником может быть только правильный многоугольник).

Предыдущий результат может быть иначе сформулирован так: если обозначить площадь многоугольника через S , а его периметр через p , то

отношение $\frac{S}{p^2}$ будет для правильного многоугольника больше, чем для неправильного многоугольника с тем же числом сторон.

420. Среди всех замкнутых линий одинаковой длины окружность ограничивает наибольшую площадь (доказать).

(Рассмотреть отношение $\frac{S}{p^2}$ для правильного многоугольника, вписанного в окружность, и для многоугольника, вписанного в кривую выпуклую замкнутую линию той же длины, при условии, что число сторон одинаково в том и в другом случае и безгранично возрастает.)

420а. Если O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, то центры O_1, O_2, O_3, O_4 окружностей, описанных около треугольников OAB, OBC, OCD, ODA , образуют параллелограмм P .

1°. Если этот параллелограмм дан, то площадь четырёхугольника, а также длины его диагоналей тем самым определяются (доказать).

2°. Если точки O_1, O_2, O_3, O_4 даны и точка O описывает прямую Δ , то вершины четырёхугольника описывают стороны параллелограмма P' (доказать). Рассмотреть изменение этого параллелограмма в связи с перемещением Δ . Найти такое положение прямой Δ , для которого его площадь будет наибольшей.

3°. Построить четырёхугольник $ABCD$, зная два угла этого четырёхугольника и параллелограмм P или зная P и отношения $\frac{AB}{AD}, \frac{CB}{CD}$ (исследовать).

421. Радиусы кругов, описанных (упр. 66) около четырёхугольников, образованных один биссектрисами внутренних углов, а другой биссектрисами внешних углов данного четырёхугольника, относятся, как $\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}$ (a, b, c, d — стороны данного четырёхугольника, взятые в последовательном порядке).

421а. Продолжим до их пересечения в точках E и F противоположные стороны вписанного четырёхугольника и проведём биссектрисы полученных таким образом углов. Показать:

1) что эти прямые пересекаются на прямой, соединяющей середины диагоналей данного четырёхугольника, и делят отрезок этой прямой между серединами диагоналей в отношении, равном отношению диагоналей;

2) что они будут также биссектрисами углов, под которыми этот отрезок виден из точек E и F ;

3) что они пересекают стороны данного четырёхугольника в четырёх точках (отличных от E и F), которые будут вершинами ромба. Стороны этого ромба параллельны диагоналям данного четырёхугольника; их длина есть четвертая пропорциональная к этим диагоналям и их сумме;

4) сформулировать аналогичные предложения для биссектрис углов, образованных двумя противоположными сторонами, одна из которых продолжена до точки их пересечения, а другая — за точку их пересечения;

5) показать, что отрезок EF относится к отрезку, соединяющему середины диагоналей, как удвоенное произведение этих последних к разности их квадратов. Вычислить длину отрезка EF , зная стороны четырёхугольника.

422. Пусть O — внутренняя точка треугольника $A_1A_2A_3$; $(k_1'), (k_2')$ (k_3') — окружности, вписанные в треугольники $A_2A_3O, A_3A_1O, A_1A_2O$. Доказать, что:

1°. Если (k_1) — какая-нибудь окружность, концентрическая с (k_1') , то можно присоединить к ней окружность (k_2) , концентрическую с (k_2') , и окружность (k_3) , концентрическую с (k_3') , так что $(k_2), (k_3)$ будут пересекаться в точке N_1 , расположенной на A_1O ; $(k_3), (k_1)$ — в точке N_2 , расположенной на A_2O ; $(k_1), (k_2)$ — в точке N_3 , расположенной на A_3O .

2°. Окружность (k_1) пересекает сторону A_2A_3 в двух точках m_1 и n_1 , таких, что $A_2m_1 = A_2N_2$ и $A_3n_1 = A_3N_3$.

Точно так же окружность (k_2) пересекает A_3A_1 в двух точках l_2 и n_2 , таких, что $A_1l_2 = A_1N_1$ и $A_3n_2 = A_3N_3$; окружность (k_3) пересекает A_1A_2 в двух точках l_3 и m_3 , таких, что $A_1l_3 = A_1N_1$ и $A_2m_3 = A_2N_2$.

3°. Если радиус окружности (k_1) изменяется и одновременно с ним изменяются радиусы окружностей (k_2) и (k_3) так, что сохраняются указанные в 1° соотношения между ними, то точки P_1, P_2, P_3 , отличные от N_1, N_2, N_3 , в которых попарно пересекаются три окружности, описывают пря-

мые (t_1) , (t_2) , (t_3) — общие касательные соответственно к парам окружностей (k_2') и (k_3') , (k_3') и (k_1') , (k_1') и (k_2') . Эти три прямые пересекаются в одной точке, которая получается из O построением, указанным в задаче 197; при этом треугольник, о котором там говорится, в данном случае будет образован центрами окружностей (k_1') , (k_2') и (k_3') .

4°. Четыре точки P_2 , P_3 , l_2 , l_3 лежат (применить задачу 345) на одной и той же окружности (x_1') , которая пересекает стороны A_1A_2 , A_1A_3 и прямые (t_2) , (t_3) под одинаковым углом; точно так же P_3 , P_1 , m_3 , m_1 лежат на одной окружности (x_2') , пересекающей под одинаковым углом A_2A_3 , A_2A_1 , (t_3) , (t_1) ; P_1 , P_2 , n_1 , n_2 лежат на одной окружности (x_3') , пересекающей под одинаковым углом A_3A_1 , A_3A_2 , (t_1) , (t_2) .

Центр окружности (x_1') остаётся неподвижным, если радиусы окружностей (k_1) , (k_2) , (k_3) изменяются, как было указано в 3°; прямая, соединяющая его с центром окружности (k_1') , проходит через точку пересечения прямых (t_1) , (t_2) , (t_3) . То же для центров окружностей (x_2') и (x_3') .

Существуют: окружность (x_1) , касательная к A_1A_2 , A_1A_3 , (t_2) , (t_3) ; окружность (x_2) , касательная к A_2A_3 , A_2A_1 , (t_3) , (t_1) ; окружность (x_3) , касательная к A_3A_1 , A_3A_2 , (t_1) , (t_2) .

5°. Точка пересечения прямых m_1P_3 и n_1P_2 лежит на радикальной оси окружностей (x_2') , (x_3') ; она описывает [если радиусы окружностей (k_1) , (k_2) , (k_3) изменяются] прямую, соединяющую точку пересечения прямых (t_1) , (t_2) , (t_3) с точкой прикосновения окружности (k_1') к прямой A_2A_3 .

Условие, при котором окружности (x_2) , (x_3) будут касаться друг друга, состоит в том, что указанная прямая совпадает с прямой (t_1) .

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ.

КНИГА ПЕРВАЯ. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

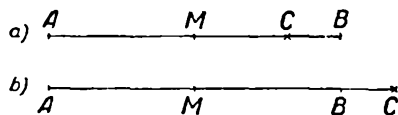
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I (стр. 35).

1. Если точка C лежит между M и B (черт. 250а), то из равенства $AM = MB$ следует, что $AC - MC = MC + CB$, откуда $MC = \frac{1}{2}(AC - CB)$, и аналогично, если точка C лежит между A и M .

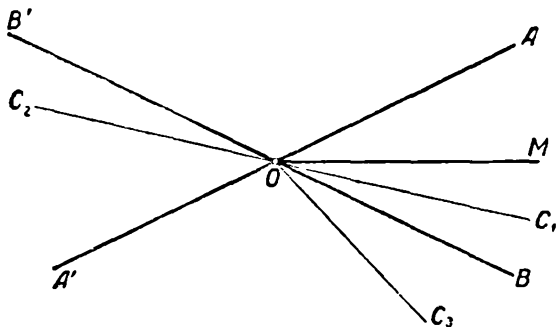
Если точка C лежит на продолжении отрезка AB за точку B (черт. 250 б), то $AC - MC = MC - BC$, откуда $MC = \frac{1}{2}(AC + BC)$, и аналогично, если точка C лежит на продолжении отрезка AB за точку A .

2. Если полупрямая OC_1 проходит внутри угла MOB (черт. 251), то $\angle AOC_1 - \angle MOC_1 = \angle MOC_1 + \angle C_1OB$, откуда

$\angle MOC_1 = \frac{1}{2}(\angle AOC_1 - \angle C_1OB)$, и аналогично, если полупрямая AC_1 проходит внутри угла AOM .



Черт. 250.

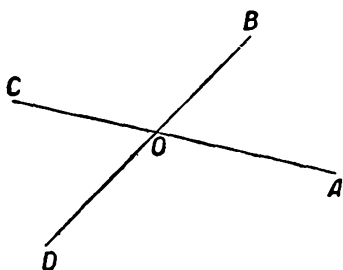


Черт. 251.

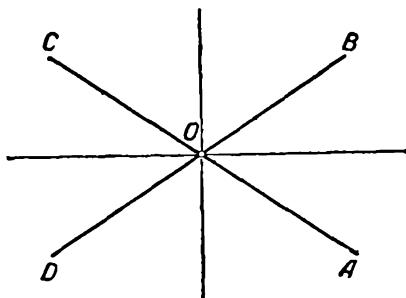
Если полупрямая OC_2 проходит внутри угла $A'OB'$, то её продолжение OC_1 проходит внутри угла AOB , и $\angle MOC_2 = 180^\circ - \angle MOC_1$.

Если полупрямая OC_3 проходит внутри угла BOA' , то $\angle AOC_3 = \angle MOC_3 = \angle MOC_3 - \angle BOC_3$, откуда $\angle MOC_3 = \frac{1}{2}(\angle AOC_3 + \angle BOC_3)$, и аналогично, если OC_3 проходит внутри угла AOB' .

3. Из условия следует, что $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle DOA$ (черт. 252); но, очевидно, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 4d$; следовательно, $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle DOA = 2d$. Из последних равенств следует (на основании обратной теоремы п. 15),



Черт. 252.



Черт. 253.

что OA и OC образуют продолжения одна другой. Таким же образом доказывается, что BOD есть прямая линия.

4. По условию имеем (черт. 253): $\frac{1}{2}\angle AOB + \angle BOC + \frac{1}{2}\angle COD = 2d$; $\frac{1}{2}\angle COD + \angle DOA + \frac{1}{2}\angle AOB = 2d$, откуда $\angle BOC = \angle DOA$.

Аналогично покажем, что $\angle AOB = \angle COD$. В силу упражнения 3 четыре полупрямые попарно представляют продолжения одна другой.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II (стр. 43).

5. 1°. Если в треугольнике ABC имеем $\angle BAD = \angle CAD$ и $\angle BDA = \angle CDA = d$ (черт. 254), то треугольники ABD и ACD , имеющие общую сторону AD и соответственно равные углы при A и D , равны. Из равенства этих треугольников и следует, что $AB = AC$.

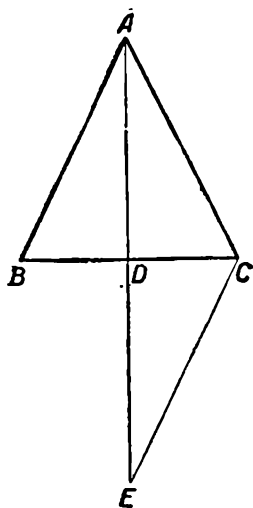
2°. Если имеем $\angle BDA = \angle CDA = d$ и $BD = CD$, то треугольники ABD и ACD равны по равенству двух сторон и заключенного между ними угла, и $AB = AC$.

3°. Пусть $\angle BAD = \angle CAD$ и $BD = CD$. Откладываем $DE = AD$ (черт. 254). Треугольники ABD и ECD равны (п. 24, второй признак), откуда $AB = EC$ и $\angle BAD = \angle CED$. В силу равенств $\angle BAD = \angle CAD$ и $\angle BAD = \angle CED$ имеем $\angle CAD = \angle CED$, так что треугольник AEC — равнобедренный (п. 23, обратная теорема), и $AC = EC$. Так как $AB = EC$ и $AC = EC$, то $AB = AC$.

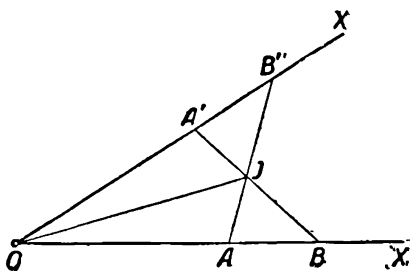
6. Треугольники OAB' и $OA'B$, имеющие общий угол O и соответственно равные стороны OA и OA' , OB' и OB , равны; следовательно, $\angle OB'A = \angle OBA'$ и $\angle OAB' = \angle OA'B$ (черт. 255). Так как углы OAB' и $OA'B$ равны, то равны и смежные с ними углы: $\angle B'A'B = \angle BAB'$. Треугольники IAB и $IA'B'$ равны ($AZ = A'B'$; $\angle IAB = \angle IA'B'$; $\angle IBA = \angle IB'A'$) и потому $IA = IA'$. Наконец треугольники OIA и OIA' равны (по равенству трёх сторон), откуда $\angle AOI = \angle A'OI$.

7. Пусть BD — медиана данного треугольника ABC и $BD = DE$ (черт. 27). При этом треугольники DAE и DCB равны (п. 25), откуда $AE = BC$; $\angle DEA = \angle DBC$. Если $BC > BA$, то в треугольнике ABE имеем $AE > AB$, откуда по известной теореме (п. 25) $\angle ABE > \angle AEB$, т. е. $\angle ABD > \angle DBC$.

8. Для любой точки M плоскости треугольника ABC имеем: $MB + MC \geq BC$;



Черт. 254.



Черт. 255.

$MC + MA \geq CA$; $MA + MB \geq AB$, причём три знака равенства одновременно невозможны, так как точка M не может лежать одновременно на всех трёх прямых BC , CA и AB . Отсюда $MA + MB + MC > \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$.

Так как периметр выпуклой ломаной меньше периметра огибающей её ломаной, то для точки M , лежащей внутри треугольника, имеем по п. 27 неравенства $MB + MC < AB + AC$; $MC + MA < BC + BA$; $MA + MB < AC + BC$. Складывая и деля на два, получим $MA + MB + MC < BC + CA + AB$.

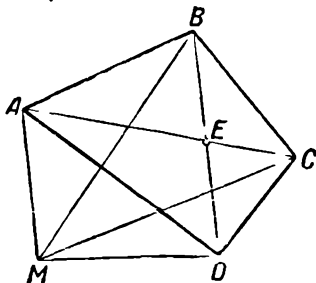
8а. Если $ABC \dots KL$ — произвольный многоугольник, и M — взятая точка, то $MA + MB \geq AB$; $MB + MC \geq BC$; $MC + MD \geq CD$; ...; $ML + MA \geq LA$, причём невозможно, чтобы имели место все знаки равенства одновременно. Складывая и деля на два, получим $MA + MB + \dots + ML > \frac{1}{2}(AB + BC + \dots + LA)$.

9. Если E — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ (черт. 256), то $AC < AB + BC$; $AC < AD + DC$; $BD < BC + CD$; $BD < BA + AD$. Складывая и деля на два, находим $AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

Если четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый, то $AC = AE + EC$; $BD = BE + ED$ и $AE + EB > AB$; $BE + EC > BC$; $CE + ED > CD$; $DE + EA > AD$. Складывая последние неравенства и деля на два, получим $AE + BE + CE + DE >$

$$> \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD), \quad \text{т. е.}$$

$$AC + BD > \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD).$$



Черт. 256.

Примечание. Первое из доказанных свойств $AC + BD < AB + BC + CD + AD$ сохраняет силу и для вогнутого четырёхугольника. Второе свойство $AC + BD > \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD)$ не всегда

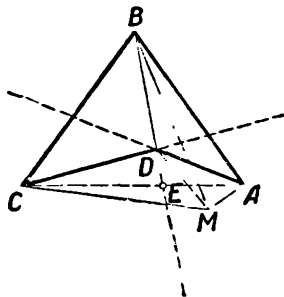
имеет место в случае вогнутого четырёхугольника (так на черт. 257 $AC + BD$, очевидно, меньше полупериметра).

10. Пусть E — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, и M — произвольная точка в его плоскости, отличная от E (черт. 256). Имеем $MA + MC \geq EA + EC$; $MB + MD \geq EB + ED$, причём два знака равенства одновременно невозможны, так как точка M отлична от E . Складывая по-членно, получим: $MA + MB + MC + MD > EA + EB + EC + ED$.

Примечание. Точка пересечения диагоналей E вогнутого четырёхугольника рассматриваемым свойством не обладает. Чтобы в этом убедиться, обозначим через D ту из вершин во-



Черт. 257.



Черт. 258.

гнутого четырёхугольника $ABCD$ (черт. 258), которая лежит внутри треугольника ABC , образованного тремя другими вершинами.

Пусть точка M лежит внутри (или на стороне) угла, вертикального углу BDC . В таком случае $MB + MC > DB + DC$. Кроме того, $MD + MA \geq AD$. Отсюда

$$MA + MB + MC + MD > DA + DB + DC. \quad (1)$$

То же самое неравенство получается и для точек M , лежащих внутри (или на стороне) угла, вертикального углу ADB , а также для точек M , лежащих внутри угла, вертикального углу ADC . Таким образом, неравенство

(1) имеет место для всякой точки M , отличной от D (в том числе и для точки пересечения диагоналей E).

Итак, точка D (а не точка E) есть точка плоскости, которая имеет наименьшую возможную сумму расстояний до четырёх вершин.

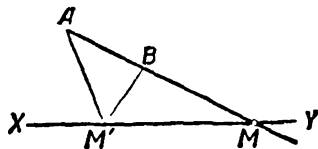
11. На чертеже 27 в треугольнике ABE имеем $2BD < AB + AE$, т. е. $BD < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

В треугольниках ABD и BCD имеем $BD > AB - AD$; $BD > BC - DC$. Складывая и деля на два, получаем $BD > \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$.

12. Если AA' , BB' , CC' — медианы треугольника ABC , то в силу упражнения 11 имеем $\frac{1}{2}(AB + AC - BC) < AA' < \frac{1}{2}(AB + AC)$; $\frac{1}{2}(AB + BC - AC) < BB' < \frac{1}{2}(AB + BC)$; $\frac{1}{2}(AC + BC - AB) < CC' < \frac{1}{2}(AC + BC)$. Складывая, найдём: $\frac{1}{2}(AB + AC + BC) < AA' + BB' + CC' < AB + AC + BC$.

Примечание. Пользуясь теоремой п. 56, можно доказать неравенство $\frac{3}{4}(AB + BC + AC) < AA' + BB' + CC'$, дающее более узкие границы для суммы медиан. Если G — точка пересечения медиан, то $BC < GB + GC$, т. е. $BC < \frac{2}{3}(BB' + CC')$. Аналогично $AC < \frac{2}{3}(AA' + CC')$ и $AB < \frac{2}{3}(AA' + BB')$. Складывая, легко получаем $\frac{3}{4}(AB + BC + AC) < AA' + BB' + CC'$.

13. Если данные точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой XU , то искомой точкой будет точка пересечения M прямых XU и AB , так как если M' — произвольная точка прямой XU , отличная от M , то $MA + MB = AB < M'A + M'B$.



Черт. 259.

Если данные точки A и B лежат по одну сторону от XU , то для любой точки M' прямой XU имеет место равенство $M'A + M'B = M'A + M'B'$.

где B' — точка, симметричная с B относительно XU . Искомой точкой будет точка пересечения M прямых AB' и XU .

14. Если B' — точка, симметричная с B относительно XU , то $\angle BMU = \angle B'MU$, и, следовательно, точки A , M , B' лежат на одной прямой в силу равенства $\angle AMX = \angle B'MU$. Искомая точка есть точка пересечения прямых AB' и XU .

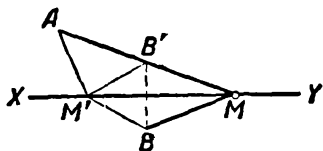
15. Если данные точки A и B лежат по одну сторону от данной прямой XU (черт. 259), то искомой точкой будет точка пересечения M прямых XU и AB , так как если M' — произвольная точка прямой XU , отличная от M , то $|MA - MB| = AB > |M'A - M'B|$.

Если данные точки A и B лежат по разные стороны от XU , то обозначим через B' (черт. 260) точку, симметричную с B относительно XU . При этом для любой точки M' прямой XU имеет место равенство $M'A - M'B = M'A - M'B'$. Следовательно, искомой точкой M будет точка пересечения прямых AB' и XU .

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III (стр. 47).

16. Если в двух прямоугольных треугольниках ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами при A и A' катеты удовлетворяют условиям $AB < A'B'$ и $AC < A'C'$, то строим $A'D = AB$ и $A'E = AC$ (черт. 261). При этом $BC = DE$. Так как $A'E < A'C'$, то и $DE < DC'$ и аналогично $DC' < B'C'$, так что $DE < B'C'$, т. е. $BC < B'C'$.

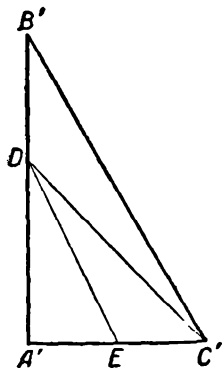
17. Пусть AD — медиана, AE — биссектриса, AH — высота треугольника ABC , в ко-



Черт. 260.



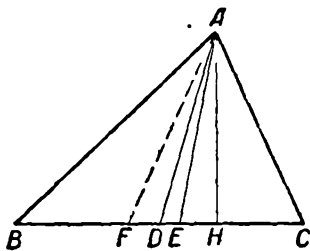
Черт. 261.



тором $AB > AC$ (черт. 262). В силу упражнения 7 $\angle BAD < \angle DAC$, так что медиана лежит между стороной AB и биссектрисой AE .

Если отложить $HF = HC$, то $AC = AF$ и, в силу неравенства $AB > AC$, также $AB > AF$. Следовательно, $BH > FH$, и точка F лежит ближе к H , чем точка B , так что $\angle CAH = \angle FAH < \angle BAH$ и высота AH лежит между биссектрисой AE и стороной AC .

18. Так как $HE < HD$ (см. решение упр. 17 и черт. 262), то и $AE < AD$.



Черт. 262.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV (стр. 49).

19. Если высоты BD и CE треугольника ABC (черт. 263) равны, то прямоугольные треугольники BCD и BCE равны по равенству катета и гипотенузы,

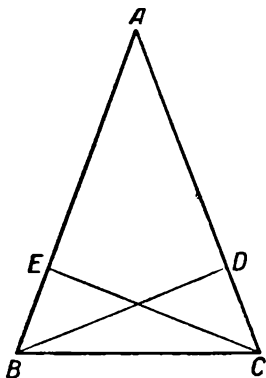
откуда $\angle BCD = \angle CBE$ и треугольник ABC — равнобедренный.

Примечание. Относительно аналогичного свойства медиан см. задачу 39 и биссектрис — см. задачи 361 и 361а

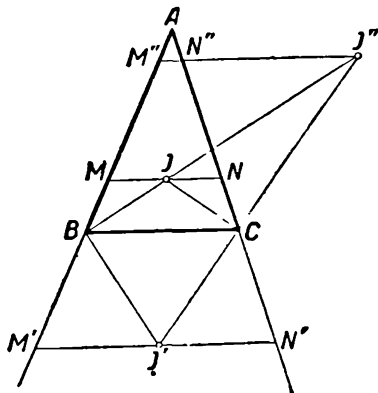
20. Если BD и CE — высоты треугольника ABC , в котором $AB > AC$, и, следовательно, $\angle ACB > \angle ABC$, то к треугольникам BCD и BCE применима теорема п. 35, в силу которой $BD > CE$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V (стр. 54).

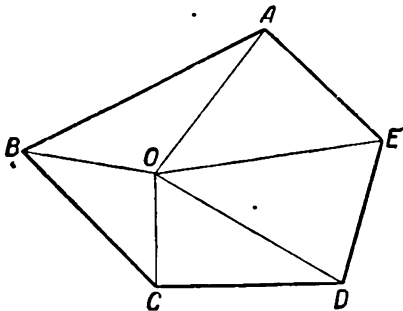
21. Пусть I — точка пересечения биссектрис углов B и C (черт. 264). Имеем $\angle NCI = \angle ICB = \angle NIC$ (как внутренние накрестлежащие); треугольник NIC — равнобедренный и $IN = CN$. Аналогично $IM = BM$, откуда $MN = BM + CN$.



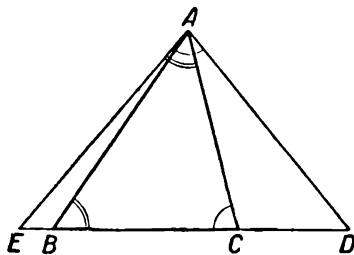
Черт. 263.



Черт. 264.



Черт. 265.



Черт. 266.

Если I' — точка пересечения внешних биссектрис углов при B и C и $M'I'N'$ — прямая, параллельная BC , то треугольники $M'BI'$ и $N'CI'$ оба равнобедренные и $M'N' = BM' + CN'$.

Наконец, если I'' — точка пересечения биссектрисы угла при B с внешней биссектрисой угла C и $M''I''N''$ — прямая, параллельная BC , то треугольники $M''BI''$ и $N''CI''$ — равнобедренные и $M''N'' = M''I'' - N''I'' = BM'' - CN''$.

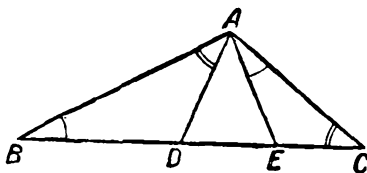
22. Пусть дан многоугольник $ABCDE$ (черт. 265). Соединяя точку O , лежащую внутри многоугольника, с его вершинами, мы разобьём его на треугольники, которых будет столько же, сколько сторон. Сумма всех углов этих треугольников будет $2dn$ (n — число сто-

рон многоугольника). Чтобы получить сумму углов многоугольника, надо из этой суммы вычесть сумму углов при точке O , т. е. $4d$.

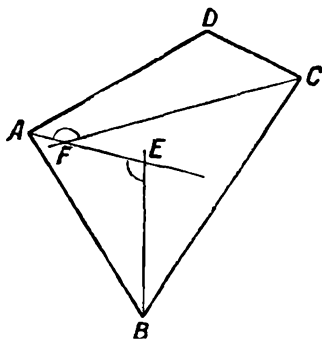
23. Если угол при A острый, то сумма $\angle B + \angle C$ больше угла A (черт. 266). Из треугольника ABD имеем: $\angle ADE = 2d - \angle B - \angle C = \angle A$; точно так же из треугольника ACE имеем $\angle AED = 2d - \angle B - \angle C = \angle A$, откуда $\angle ADE = \angle AED$.

Если угол при A тупой, то $\angle B + \angle C < \angle A$ (черт. 267). Из треугольников ABD и ACE имеем: $\angle ADE = \angle B + \angle C$; $\angle AED = \angle B + \angle C$, откуда $\angle ADE = \angle AED$.

Если угол при A прямой, точки D и E совпадают, так как угол A равен сумме $\angle B + \angle C$.



Черт. 267.



Черт. 268.

24. 1°. Пусть AE — биссектриса, AH — высота и $AB > AC$, так что угол B острый (черт. 262). При этом $\angle EAH = \angle BAH - \angle BAE = (90^\circ - \angle B) - \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ - \angle B - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle B - \angle C) = \frac{1}{2} (\angle C - \angle B)$.

2°. Если I — точка пересечения биссектрис углов B и C (черт. 264), то $\angle BIC = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C \right) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

3°. Если I' — точка пересечения биссектрис внешних углов при B и C , то $\angle BI'C = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle B) - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle C) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

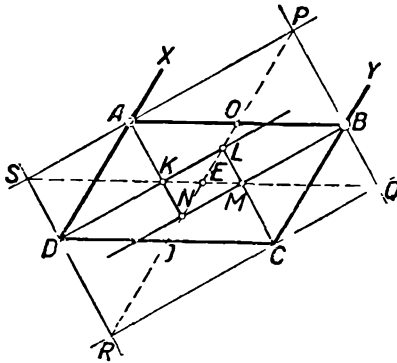
25. 1°. Если AE и BE — биссектрисы углов A и B (черт. 268), то из треугольника ABE имеем: $\angle AEB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} (\angle C + \angle D)$.

2°. Если AF и CF — биссектрисы углов A и C , то из четырёхугольника $ADCF$ (мы предполагаем, что из двух четырёхугольников $ABCF$ и $ADCF$ выпуклым является $ADCF$, как на черт. 268) имеем:
 $\angle AFC = 360^\circ - \angle D - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle C = 360^\circ - \angle D - \frac{1}{2} (360^\circ - \angle B - \angle D) = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle D - \angle B)$.

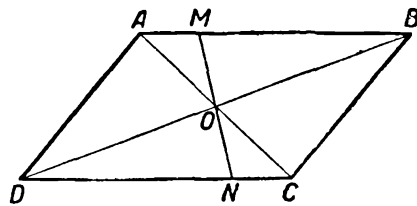
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI (стр. 61).

26. Если AN и BN — биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ (черт. 269), то $\angle ANB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B = 180^\circ -$

$-90^\circ = 90^\circ$, так как сумма двух смежных углов параллелограмма равна 180° ; если AP и BP — биссектрисы внешних углов при A и B ,



Черт. 269.



Черт. 270.

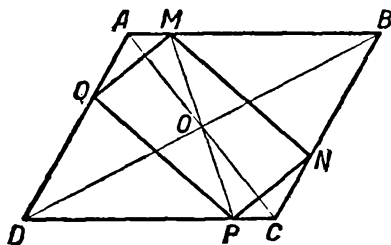
то $\angle A^oB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle XAB - \frac{1}{2} \angle YBA = 90^\circ$. Аналогично покажем, что и остальные углы четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$ — прямые.

27. Если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма (черт. 270) и MN — произвольная прямая, проходящая через O , то треугольники AOM и CON равны ($AO = OC$; $\angle MAO = \angle NCO$; $\angle AOM = \angle CON$), откуда $OM = ON$.

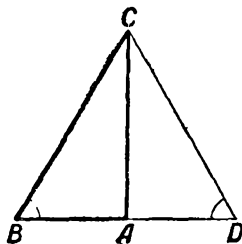
28. Пусть O — середина диагонали MP параллелограмма $MNPQ$, описанного в данный параллелограмм $ABCD$ (черт. 271). Треугольники AMQ и CPN равны, так как $MQ = PN$ и $\angle AMQ = \angle CPN$, $\angle AQM = \angle CNP$, как углы с параллельными сторонами, имеющими противоположные направления. Следовательно, $AM = CP$. Далее треугольники AOM и COP равны, так как $AM = CP$; $OM = OP$; $\angle AMO = \angle CPO$. Отсюда следует, что $\angle AOM = \angle COP$ и $OA = OC$, так что AOC — прямая линия (упражнение 3), а O — середина диагонали AC параллелограмма $ABCD$.

29. Если BO — медиана треугольника ABC и $BO = OD$ (черт. 50), то к треугольникам ABC и ABD применима теорема (п. 28) о двух

треугольниках, имеющих две пары соответственно равных сторон, но неравные углы, заключённые между ними. В зависимости от того, будет ли $AC < 2OB$, $AC = 2OB$, $AC > 2OB$, будем иметь $AC < BD$, $AC = BD$, $AC > BD$, и, следовательно, $\angle ABC < \angle BAD$, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle ABC > \angle BAD$. Так как $\angle ABC + \angle BAD = 2d$, то будем иметь соответственно $\angle ABC < d$, $\angle ABC = d$, $\angle ABC > d$.



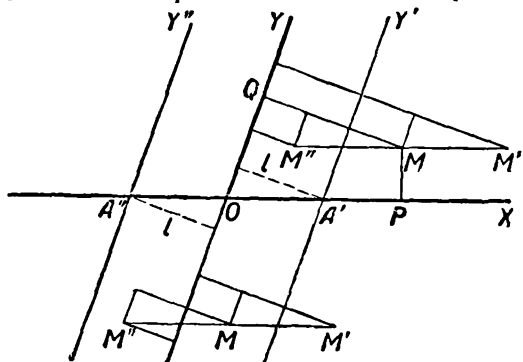
Черт. 271.



Черт. 272.

30. Пусть в треугольнике ABC (черт. 272) угол B вдвое более угла C . Если на продолжении стороны AB отложить отрезок $AD = BA$, то все углы треугольника BCD будут равны между собой; откуда $BC = BD = 2BA$.

31. Пусть даны две пересекающиеся прямые OX и OY (черт. 273). Обозначим через A' и A'' точки пересечения прямой OX с прямыми



Черт. 273.

$A'Y'$ и $A''Y''$, параллельными OY и отстоящими от неё на расстоянии, равном l .

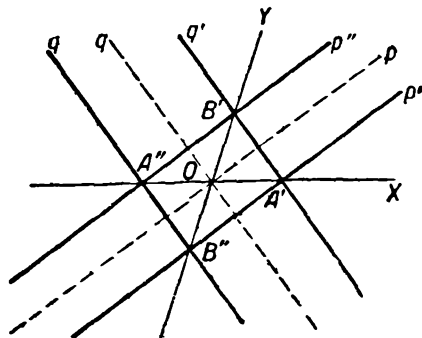
Пусть M — произвольная точка плоскости, и MP и MQ — её расстояния от прямых OX и OY . С помощью двух поступательных перемещений, определяемых по величине и по направлению отрезками OA' и OA'' , мы получим из точки M две новые точки M' и M'' ,

расстояния которых от прямой OX будут равны MP , а расстояния от прямой OY будут равны $MQ + l$ и $l - MQ$ или $MQ + l$ и $MQ - l$, смотря по тому, лежит ли точка M между прямыми $A'Y'$ и $A''Y''$ или нет (оба случая показаны на черт. 273).

Пусть теперь для некоторой точки плоскости M выполняется одно из условий $MP + MQ = l$, $MP - MQ = l$, $MQ - MP = l$, т. е. одно из условий $MP = l - MQ$; $MP = MQ + l$; $MP = MQ - l$. В таком

случае одна из точек M' или M'' , получающаяся из точки M с помощью указанных выше поступательных перемещений, будет равноудалена от прямых OX и OY . Отсюда следует, что и обратно, точки M , удовлетворяющие условию задачи, получаются из точек, равноудалённых от данных прямых, с помощью поступательных перемещений OA' и OA'' .

Так как геометрическое место точек, равноудалённых от данных прямых OX и OY , есть пара прямых p, q , делящих пополам углы между данными прямыми, то геометрическое место точек M , для которых сумма или разность их расстояний от данных прямых OX и OY равна l , представляет собой две пары прямых p', q' и p'', q'' , получаемых из p, q с помощью тех же поступательных перемещений (черт. 274).



Черт. 274.

Остаётся ещё решить вопрос, для каких точек этих четырёх прямых отрезок l будет равен сумме и для каких — разности расстояний от данных

прямых. Ограничимся решением вопроса для точек прямой q' . Из чертежа легко усмотреть, что для точек отрезка $A'B'$ (черт. 274) сумма расстояний будет равна l , а для точек, лежащих на продолжении отрезка $A'B'$, разность расстояний будет равна l .

Таким образом, геометрическое место точек, для которых сумма их расстояний от двух данных прямых равна l , есть совокупность четырёх сторон прямоугольника $A'B'A''B''$, а геометрическое место точек, для которых разность расстояний равна l , — совокупность продолжений всех сторон того же прямоугольника за его вершины.

Пусть теперь данные прямые XX' и YY' параллельны и ZZ' — прямая, равноудалённая от них. Обозначим через MP, MQ и MN расстояния от точки M соответственно до прямых XX', YY' и ZZ' .

Если расстояние между данными прямыми меньше l , то геометрическое место точек M , для которых $MP + MQ = l$, есть пара прямых, отстоящих от прямой ZZ' на $\frac{1}{2}l$, так как в силу упражнения 1 имеем

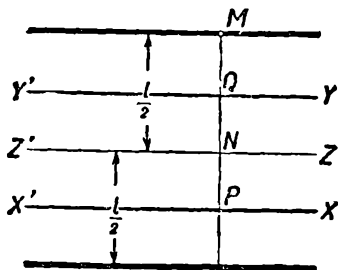
(черт. 275) $MP + MQ = 2MN$. В этом случае не существует, очевидно, точек, для которых $MP - MQ = \pm l$.

Если расстояние между данными прямыми больше l , то не существует, очевидно, точек M , для которых $MP + MQ = l$. В этом случае геометрическое место точек, для которых $MP - MQ = \pm l$, состоит из двух прямых, отстоящих от ZZ' на $\frac{1}{2}l$, так как в силу

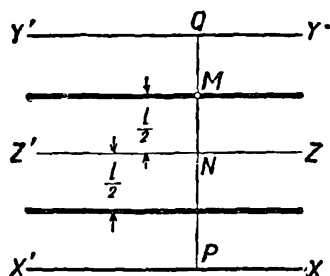
упражнения 1 имеем $MP - MQ = \pm 2MN$ (черт. 276).

Наконец, если расстояние между данными прямыми равно l , то для любой точки M , лежащей между двумя данными прямыми или на одной из них, имеем $MP + MQ = l$. Для любой точки, лежащей вне полосы, образованной двумя данными прямыми, или на одной из них, имеем $MP - MQ = \pm l$.

32. Из сказанного в п. 284, пример I, вытекает следующий способ построения точки N :



Черт. 275.

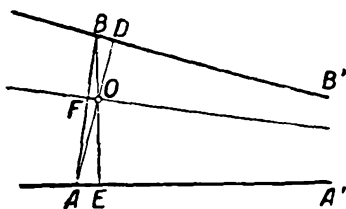


Черт. 276.

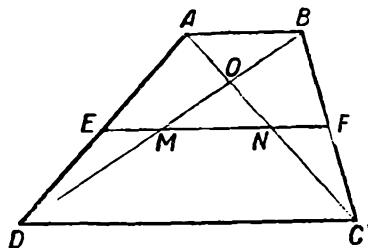
Через точку A проводим прямую, имеющую данное направление, и на этой прямой откладываем отрезок AC , равный искомому отрезку MN (определение длины последнего не представляет затруднений). Соединив точки B и C , получим в пересечении с одной из данных прямых точку N .

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII (стр. 64).

33. Пусть требуется соединить точку O с точкой пересечения прямых AA' и BB' (черт. 277). Проводим через O прямые AD и BE , соответственно перпендикулярные к BB' и AA' . Прямая OF , перпендику-



Черт. 277.



Черт. 278.

лярная к AB , проходит через точку пересечения прямых AA' и BB' , так как OF есть третья высота треугольника, образованного прямыми AA' , BB' и AB .

Это построение пригодно лишь в предположении, что точки A и B и отрезок AB лежат в пределах чертежа.

34. Пусть E и F — середины непараллельных сторон AD и BC , M и N — середины диагоналей BD и AC трапеции (черт. 278). Прямая EM соединяет середины сторон треугольника ABD и потому параллельна AB (п. 55); прямая EN , соединяющая середины сторон треугольника ACD , параллельна CD и, следовательно, параллельна AB . Отсюда следует, что прямые EM и EN совпадают. Точки E , M , N лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что точки F , M , N лежат на одной прямой. Последняя прямая совпадает с EMN , так как она имеет с ней две общие точки M и N . Итак, все четыре точки E , F , M , N лежат на одной прямой.

Из треугольников ABD , ABC , BCD имеем

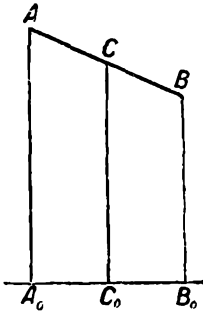
$$EM = \frac{1}{2} AB; FN = \frac{1}{2} AB; MF = \frac{1}{2} CD.$$

Отсюда

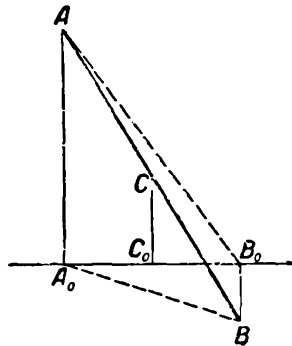
$$EF = EM + MF = \frac{1}{2} (AB + CD);$$

$$MN = MF - FN = \frac{1}{2} (CD - AB).$$

35. Пусть AA_0 и BB_0 — перпендикуляры из точек A и B на данную прямую и C_0 — середина отрезка A_0B_0 .



Черт. 279.



Черт. 280.

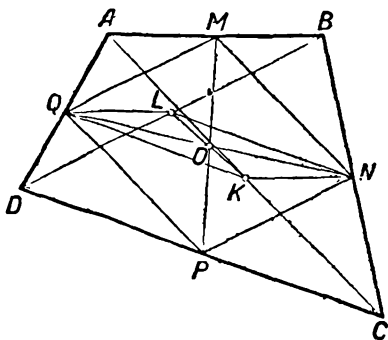
Если точки A и B лежат по одну сторону от данной прямой (черт. 279), то AA_0B_0B — трапеция. Прямая CC_0 будет параллельна основаниям трапеции: в силу упражнения 34, прямая, проходящая через середину стороны AB и параллельная основаниям трапеции, делит пополам и сторону A_0B_0 . Отрезок CC_0 равен $\frac{1}{2} (AA_0 + BB_0)$.

Если точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой (черт. 280), то AB и A_0B_0 — диагонали трапеции AA_0BB_0 . В силу упражнения 34, так как прямая CC_0 делит обе диагонали пополам, то

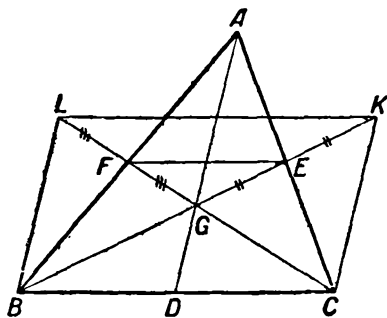
$$CC_0 = \frac{1}{2} (AA_0 - BB_0).$$

36. Пусть M, N, P, Q, K, L — соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA и диагоналей AC, BD четырёхугольника $ABCD$ (черт. 281). Отрезок MN , соединяющий середины двух сторон треугольника ABC , параллелен AC и равен $\frac{1}{2}AC$. По той же причине отрезок PQ параллелен AC и равен $\frac{1}{2}AC$. Четырёхугольник $MNPQ$ есть параллелограмм.

Прямые MP и NQ делятся в точке пересечения O пополам, как диагонали параллелограмма $MNPQ$. Отрезок KN , соединяющий середины сторон треугольника ABC , параллелен AB и равен $\frac{1}{2}AB$; аналогично отрезок LQ параллелен AB и равен $\frac{1}{2}AB$. Следовательно, $KNLQ$ есть параллелограмм, и отрезок KL проходит через середину O отрезка NQ , как диагональ нового параллелограмма, и делится в ней пополам.



Черт. 281.



Черт. 282.

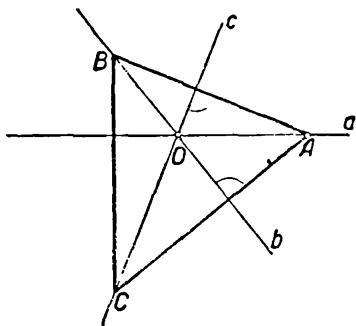
37. Пусть G — точка пересечения медиан BE и CF треугольника ABC (черт. 282), а точки K и L выбраны так, что $EK = EG$; $FL = FG$. Отрезок EF , соединяющий середины сторон в каждом из треугольников ABC и GKL , параллелен как BC , так и KL и равен как $\frac{1}{2}BC$,

так и $\frac{1}{2}KL$. Отсюда следует, что отрезки BC и KL параллельны и равны. Четырёхугольник $BCKL$ есть параллелограмм, так что $BG = GK = 2GE$ и $CG = GL = 2GF$. Следовательно, медиана BE проходит через точку G , отсекающую одну треть отрезка CF .

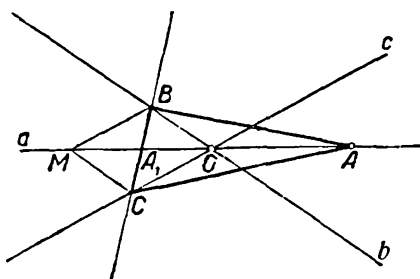
Точно таким же путём можно показать, что и третья медиана AD отсекает $\frac{1}{3}$ от отрезка CF и, следовательно, проходит через ту же точку.

38. Пусть a, b, c — данные прямые, проходящие через O , и A — точка на прямой a .

1°. Стороны AB и AC треугольника с вершиной A , имеющего данные прямые своими высотами, должны быть соответственно перпенди-



Черт. 283.

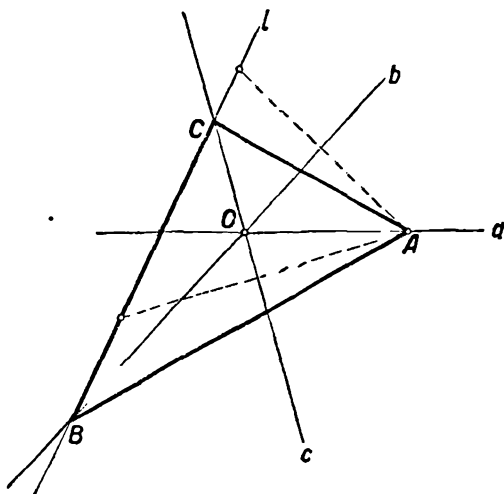


Черт. 284.

кулярны к c и b (черт. 283). Этим определяется положение вершин B и C на прямых b и c . Если прямые b и c перпендикулярны, то прямые, проходящие через A и перпендикулярные к прямым b и c , будут, очевидно, параллельны соответственно прямым c и b , и предыдущее построение невыполнимо. В этом случае не существует треугольника, имеющего данные прямые своими высотами и точку A — своей вершиной.

2°. Строим $OA_1 = \frac{1}{2}OA$ (черт. 284); точка A_1 есть середина BC .

Если $A_1M = A_1O$, то $OBMC$ есть параллелограм. Точки B и C лежат на прямых, проходящих через M и параллельных c и b . При этом точка O будет точкой пересечения медиан треугольника ABC (так как $A_1O = \frac{1}{3}A_1A$), а, следовательно, прямые OB и OC будут действительно медианами треугольника ABC .



Черт. 285.

3°. Если прямые a , b и c — биссектрисы углов искомого треугольника ABC , то прямые AB и BC симметричны относительно прямой b , а прямые AC и BC — относительно c (черт. 285). Следовательно, точки, симметричные с данной точкой A относительно прямых b и c , лежат на прямой l , проходящей через точки B и C . Это даёт возможность построить прямую l , а затем и вершины B и C .

Если прямые b и c перпендикулярны между собой, то построенная прямая l проходит, как легко видеть, через точку O , и задача не имеет решения. Если прямая a перпендикулярна к одной из прямых b и c , то прямая l будет параллельна другой из них, и задача опять не имеет решения. В остальных случаях, т. е. когда никакие две из данных прямых не перпендикулярны друг другу, задача имеет единственное решение.

4°. Рассматриваем треугольник ABC , имеющий прямые a , b , c своими высотами (см. 1°), и через его вершины проводим прямые, параллельные его противоположным сторонам (сравнить известное доказательство теоремы о высотах треугольника, п. 53).

ЗАДАЧИ К ПЕРВОЙ КНИГЕ (стр. 65).

39. Пусть AD , BE , CF — медианы треугольника ABC (черт. 286) и G — точка их пересечения. Если $AB > AC$, то из треугольников ABD и ACD , имеющих две пары соответственно равных сторон, но неравные третьи стороны, имеем $\angle ADB > \angle ADC$ (п. 28, обратная теорема). Из треугольников GBD и GCD следует, что $BG > GC$ (п. 28), т. е. $\frac{2}{3} BE > \frac{2}{3} CF$, $BE > CF$.

Точно так же, если $AC > AB$, то $CF > BE$. Следовательно, из $BE = CF$ следует $AB = AC$.

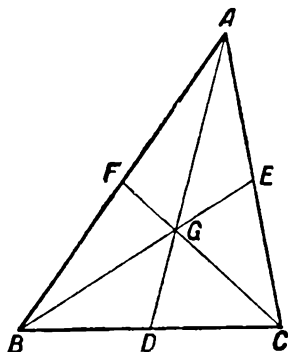
40. Пусть для определённости даны четыре прямые D_1 , D_2 , D_3 , D_4 ; обозначим через $AXYZUB$ искомую ломаную (черт. 287). Предполагая, что точки X , Y , Z уже построены, мы получим точку U , соединяя точку Z с точкой B' , симметричной с точкой B относительно прямой D_4 (упр. 14). Таким образом, мы приходим к построению ломаной $AXYZB'$ для случая трёх прямых D_1 , D_2 , D_3 . Аналогично для построения точки Z мы должны соединить точку Y с точкой B'' , симметричной с B' относительно D_3 , и т. д.

Окончательно приходим к следующему построению: строим точку B' , симметричную с B относительно D_4 , затем точку B'' , симметричную с B' относительно D_3 , затем точку B''' , симметричную с B'' относительно D_2 , и, наконец, точку B^{IV} , симметричную с B''' относительно D_1 . Прямая AB^{IV} определяет точку X , прямая XB''' — точку Y , прямая YB'' — точку Z , прямая ZB' — точку U . Метод решения не зависит от числа данных прямых.

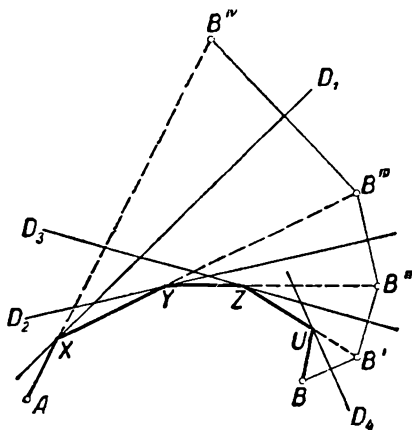
Длина ломаной $AXYZUB$ равна $AXYZUB = AXYZB' = AXYB'' = AXB''' = AB^{IV}$. Длина любой другой ломаной с концами A и B и

вершинами на прямых D_1, D_2, D_3, D_4 равна длине некоторой ломаной, соединяющей A и B^{IV} , и потому больше AB^{IV} .

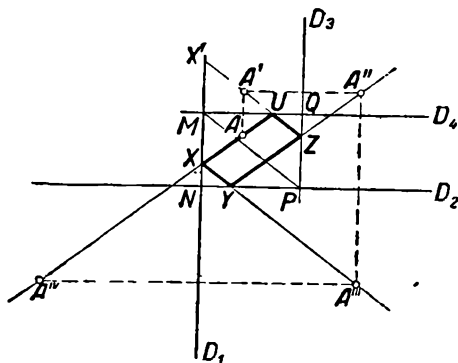
Частный случай, когда D_1, D_2, D_3, D_4 — стороны прямоугольника и точки A и B совпадают, представлен на чертеже 288. При этом



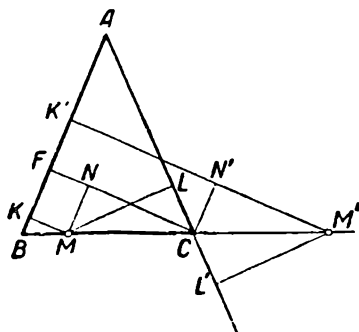
Черт. 286.



Черт. 287.



Черт. 288.



Черт. 289.

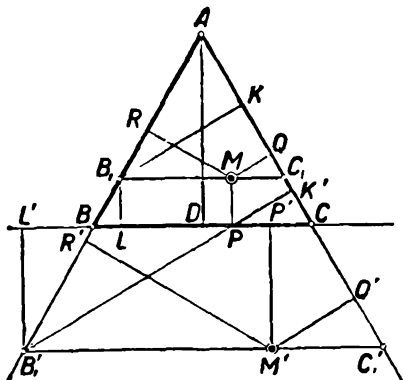
$XYZU$ — параллелограмм и $MX = PZ = MX'$. Отсюда $XU + UZ = X'Z = MP$, так как $MPZX'$ — параллелограмм. Таким образом $XY + YZ + ZU + UX = 2MP$ (обозначения точек понатыны из чертежа).

41. Точка K (черт. 269), лежащая на биссектрисах углов DAB и ADC , равноудалена от прямых AB и CD (п. 36), и тем же свойством обладают точки M, Q, S . Поэтому точки K, M, Q, S лежат на прямой — геометрическом месте точек, равноудалённых от прямых AB и CD . Точно так же точки L, N, P, R лежат на прямой — геометрическом месте точек, равноудалённых от прямых BC и AD .

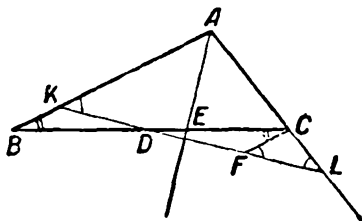
Далее $SM = AB$, так как $ABMS$ — параллелограм, и $SK = MQ = BC$, так как $AKDS$ и $BQCM$ — прямоугольники. Отсюда $SQ = SM + MQ = AB + BC$ и $KM = SM - SK = AB - BC$.

42. Пусть точка M лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC (черт. 289), и MK , ML , MN — перпендикуляры из точки M на стороны AB , AC и на высоту CF треугольника. При этом $\angle CMN = \angle CBA = \angle BCL$, и прямоугольные треугольники CMN и MCL равны. Следовательно, $ML = CN$. Кроме того, $MK = NF$. Откуда

$ML + MK = CN + NF = CF$.
Итак, сумма расстояний точки M от сторон AB и AC равна высоте CF треугольника.



Черт. 290.



Черт. 291.

Если точка M' лежит на продолжении BC , например, за точку C , то аналогично $M'K' - M'L' = M'K' - M'N' = N'K' = CF$.

Пусть теперь точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC (черт. 290) и MP , MQ , MR — перпендикуляры из этой точки на BC , AC , AB . Проводим через точку M прямую B_1C_1 , параллельную BC , и из точки B_1 опускаем перпендикуляры B_1K и B_1L на стороны AC и BC . Применяем теперь доказанное свойство равнобедренного треугольника дважды: один раз к треугольнику AB_1C_1 , другой раз к треугольнику ABC . Получаем $MQ + MR = B_1K$; $MP + MQ + MR = B_1L + B_1K = AD$, где AD — высота треугольника ABC .

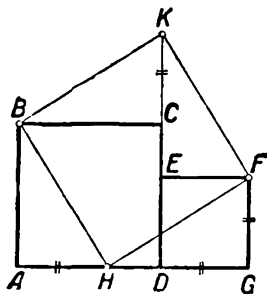
Если точка M' лежит вне треугольника, например, в области, внутренней по отношению к углу BAC , то $-M'P' + M'Q' + M'R' = -B_1'L' + B_1'K' = AD$. Во всех случаях будем иметь $\pm MP \pm MQ \pm MR = AD$.

43. Пусть прямая KL , проходящая через середину D стороны BC треугольника ABC и перпендикулярная к биссектрисе AE , пересекает прямые AB и AC в точках K и L (черт. 291). Так как в треугольнике AKL биссектриса совпадает с высотой, то (упр. 5) $AK = AL$ и $\angle AKL = \angle ALK$. Треугольники BDK и CDL , где CF параллельно AB , равны, откуда $BK = CL$. Далее $\angle CFL = \angle AKL = \angle ALF$, и потому $CF = CL$, так что $BK = CL$. Итак, $AB = AK + BK$, $AC = AL - CL = AK - BK$, откуда $AK = AL = \frac{1}{2}(AB + AC)$; $BK = CL = \frac{1}{2}(AB - AC)$.

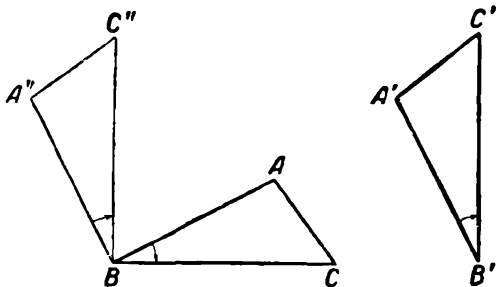
44. Имеем ряд равных треугольников ABH , CBK , EKF , GHF (черт. 292), откуда $HB=HK=KF=FN$. Угол BKF — прямой, так как он равен сумме острых углов треугольника BKC . Отсюда уже следует, что $HBKF$ — квадрат.

45. При решении предложенной задачи мы воспользуемся следующим замечанием.

Если в двух равных треугольниках, имеющих одинаковое направление вращения, какая-либо сторона одного перпендикулярна



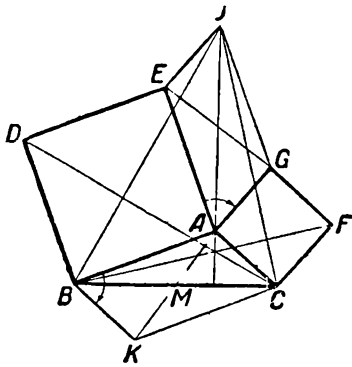
Черт. 292.



Черт. 293.

к соответственной стороне другого, то и каждая сторона одного из этих треугольников перпендикулярна к соответственной стороне другого.

В самом деле, пусть сторона BC треугольника ABC (черт. 293) перпендикулярна к соответствующей ей стороне $B'C'$ треугольника $A'B'C'$, равного ABC и имеющего то же направление вращения. Отложим от точки B отрезки BA'' и BC'' , соответственно равные и параллельные $B'A'$ и $B'C'$ и направленные в ту же сторону. Углы $A''BC''$ и $A'B'C'$ будут при этом равны и одинаково направлены. Так как углы ABC и $A'B'C'$ по предположению равны и имеют одинаковое направление, то и углы $A''BC''$ и ABC равны и имеют одинаковое направление. Отсюда следует, что углы $C''BC$ и $A''BA$ равны, как получающиеся путём прибавления к двум равным углам $A''BC''$ и ABC одного и того же угла $C''BA$. Но угол $C''BC$ — прямой, так как BC'' параллельно $B'C'$, а $B'C'$ перпендикулярно к BC . Следовательно, и угол $A''BA$, равный углу $C''BC$, также прямой, а потому и BA'' , а значит и $A'B'$ перпендикулярны к AB . Таким же путём доказывается, что и $A'C'$ перпендикулярно к AC .



Черт. 294.

Переходим к решению предложенной задачи:

1°. Продолжим медиану AM треугольника ABC (черт. 294) на равный ей отрезок MK . При этом $AB=AE$, $BK=AC=AG$ и $\angle ABK = \angle EAG$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, имеющие одинаковое направление, так что треугольники ABK и EAG равны и имеют одинаковое направление вращения. Отсюда следует, что $EG=AK=2AM$. В силу сделанного вначале замечания из равенства этих треугольников следует, кроме того, что EG перпендикулярно к AK (так как AB перпендикулярно к EA).

2°. Параллелограмм $AEIG$ равен параллелограмму $BACK$ в силу равенства треугольников AEG и BAK . Следовательно, равны и треуголь-

ники EAI и ABC . Кроме того, эти треугольники имеют одинаковое направление вращения, и EA перпендикулярно к AB , так что и AI перпендикулярно к BC (опять-таки в силу сделанного вначале замечания). Другими словами, точка I лежит на высоте треугольника ABC .

3°. Отрезки CD и BI равны и перпендикулярны, так как треугольники BCD и AIB равны и имеют одинаковое направление вращения и, кроме того, их соответственные стороны BD и AB перпендикулярны. Таким же

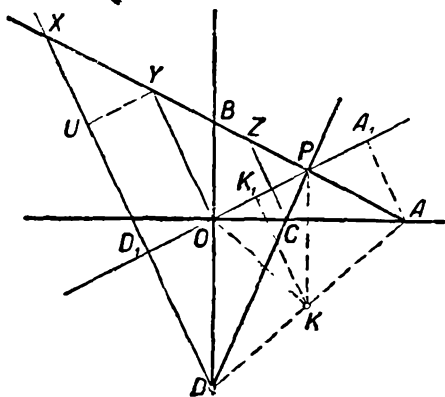
путём доказывается, что отрезки BF и CI равны и перпендикулярны.

Наконец, прямые CD , BF и AI проходят через одну точку как высоты треугольника BCI .

46. Пусть K — середина AD (черт. 295); при этом $KA=KP=KO=KD$, так как в каждом из прямоугольных треугольников APD и AOD медианы KP и KO равны половине гипотенузы (п. 48). Если из точек A , K , D опустить перпендикуляры AA_1 , KK_1 , DD_1 на прямую OP , то $OK_1=K_1P$ (в силу $KO=KP$) и $D_1K_1=K_1A_1$ (ср. решение упр. 35), откуда $D_1O=PA_1$.

Если X — точка пересечения прямых AB и DD_1 и прямая OY перпендикулярна к OP , а YU перпендикулярна к DX , то треугольники XYU и APA_1 равны ($UY=D_1O=PA_1$; $\angle XYU=\angle APA_1$), и $XY=PA$.

Пусть теперь прямая CZ перпендикулярна к OP . Повторяя рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, в которых вместо A берём B , вместо C — D , вместо X — Z , а точки P и Y сохраняют своё значение, можно доказать, что $YZ=BP$.



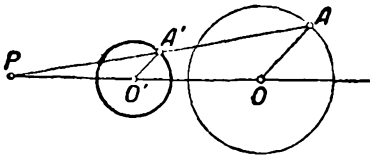
Черт. 295.

КНИГА ВТОРАЯ.
ОКРУЖНОСТЬ.

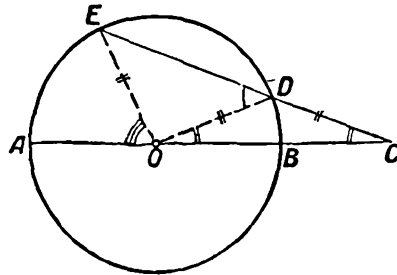
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I (стр. 69).

47. Если из центра O и из произвольной точки A данной окружности провести (в одну и ту же сторону) равные и параллельные отрезки OO' и AA' , то фигура $OO'A'A$ будет параллелограмом, так что $O'A' = OA$, и геометрическим местом точек A' будет окружность, равная данной и имеющая своим центром точку O' .

То же следует и из общей теоремы п. 51.



Черт. 296.



Черт. 297.

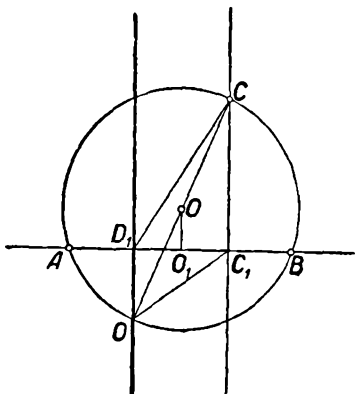
48. Пусть A' — середина отрезка PA , соединяющего данную точку P (которая может лежать вне окружности, на окружности или внутри её) с произвольной точкой A окружности O , и O' — середина отрезка PO (черт. 296). В силу того, что отрезок $O'A'$ соединяет середины двух сторон треугольника POA , имеем (п. 55) $O'A' = \frac{1}{2} OA$, так что геометрическое место точек A' есть окружность с центром O' .

49. Так как $OD = DC$ (черт. 297), то $\angle DOB = \angle DCO$ и $\angle EDO = \angle DOB + \angle DCO = 2\angle DOB$, как внешний угол треугольника DOC (п. 44, следствие I); далее, так как $OD = OE$, то $\angle EDO = \angle DEO = 2\angle DOB$ и $\angle EOA = \angle DCO + \angle CEO = \angle DOB + 2\angle DOB = 3\angle DOB$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II (стр. 72).

50. Пусть D — точка рассматриваемой окружности, диаметрально-противоположная точке C (черт. 298), C_1 — точка пересечения данной прямой с AB ; D_1 — основание перпендикуляра из точки D на прямую AB и O_1 — середина отрезка C_1D_1 . Прямая, соединяющая центр O окружности с точкой O_1 , параллельна данной прямой, так как она проходит через середины диагоналей трапеции CC_1DD_1 (упр. 34) и, следовательно, перпендикулярна к AB . Отсюда следует, что точка O_1 есть середина отрезка AB .

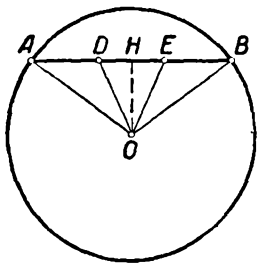
Таким образом, положение точки O_1 на прямой AB не зависит от выбора той или иной окружности, проходящей через A и B . В силу равенства $O_1C_1 = O_1D_1$ и положение точки D_1 на прямой AB не зависит от выбора окружности. Следовательно, геометрическое место точек D есть перпендикуляр к прямой AB в точке D_1 .



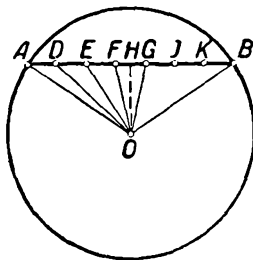
Черт. 298.

В приведённом решении неявно предполагалось, что данная прямая CC_1 пересекает самый отрезок AB , а не его продолжение. Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда она пересекает продолжение отрезка AB . Однако в этом случае точки O и O_1 будут серединами непараллельных сторон (а не серединами диагоналей) соответствующей трапеции.

51. Пусть $AD = DE = EB$ (черт. 299). Опустив из центра O окружности перпендикуляр OH на данную хорду, мы видим, что $OE = OD < OA$ (по теореме о длине наклонных, п. 29). Прямая OD есть медиана треугольника OAE , и из неравенства $OE < OA$ следует (упр. 7), что $\angle DOE > \angle DOA$. По той же причине и $\angle DOE > \angle EOB$.



Черт. 299.



Черт. 300.

Аналогично, если хорда AB разделена на n равных частей, то наибольшим из углов при центре будет угол, внутри которого проходит перпендикуляр OH (при нечётном n) или каждый из двух углов, имеющих OH своей стороной (при чётном n). Действительно (черт. 300, для $n=7$), $OA > OD > OE > OF$ (п. 29, 3°), и применение упражнения 7 к треугольникам OAE , ODF , OEG даёт $\angle AOD < \angle DOE < \angle EOF < \angle FOG$, так что угол FOG будет наибольшим.

52. Опустим из центра O перпендикуляры OH и OH' (черт. 301) на равные хорды AB и $A'B'$, продолжения которых пересекаются в

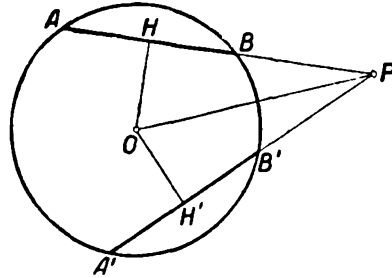
точке P ; при этом $HA = HB = H'A' = H'B'$ (п. 63) и $OH = OH'$ (п. 66). Прямоугольные треугольники ONP и $ON'P$ равны (общая гипотенуза, $OH = OH'$), откуда $PH = PH'$.

Следовательно, $PA = PH + HA = PH' + H'A' = PA'$ и $PB = PH - HB = PH' - H'B' = PB'$.

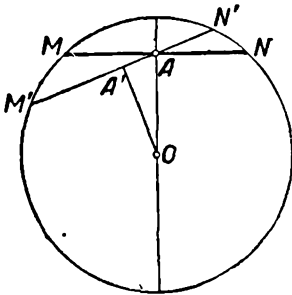
Те же рассуждения применимы и к равным хордам, пересекающимся внутри окружности.

53. Так как середина хорды есть основание перпендикуляра, опущенного из центра на хорду, и равные хорды равноудалены от центра, то геометрическое место середин равных хорд есть окружность, концентрическая с данной. Радиус этой последней окружности равен расстоянию от центра данной окружности до каждой из данных хорд.

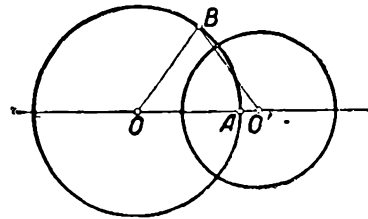
54. Наименьшая хорда, которая проходит через данную точку A , лежащую внутри данной окружности, наиболее удалена от центра O этой окружности из всех хорд, проходящих через A . Но из хорд, проходящих через A , наиболее удалённой от центра является хорда MN (черт. 302), перпендикулярная к OA . Действительно, расстояние



Черт. 301.



Черт. 302.



Черт. 303.

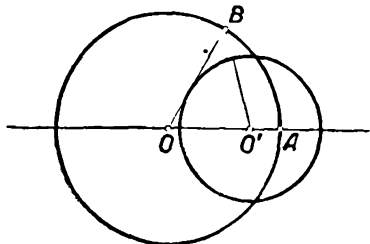
OA' от точки O до какой-либо другой хорды $M'N'$, проходящей через A , есть перпендикуляр к хорде $M'N'$, а этот перпендикуляр короче наклонной ($OA' < OA$).

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III (стр. 76).

55. 1°. Если точка O' лежит на продолжении отрезка OA за точку A и окружности пересекаются (черт. 303), то точка A лежит внутри окружности O' . Одна из точек пересечения обеих окружностей будет лежать на дуге AB , если точка B будет лежать вне окружности O' , т. е. если $O'B > R'$, откуда $R + R' - OO' < OB + O'B - OO'$.

2°. Если точка O' лежит на самом отрезке OA и окружности пересекаются (черт. 304), то точка A лежит внутри окружности O' .

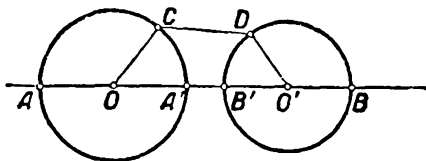
Одна из точек пересечения будет лежать на дуге AB , если точка B будет лежать вне окружности O' , т. е. если $O'B > R'$, или $OO' - (R - R') < OO' - (OB - O'B)$.



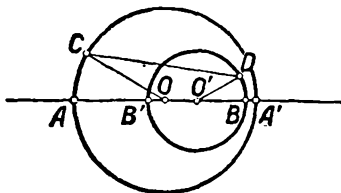
Черт. 304.

3°. Если точка O' лежит на продолжении отрезка OA за точку O и окружности пересекаются, то точка A лежит вне окружности O' . Одна из точек пересечения обеих окружностей будет лежать на дуге AB , если точка B будет лежать внутри окружности O' , т. е. если $O'B < R'$, откуда $OO' - (R' - R) < < OO' - (O'B - OB)$.

56. Пусть линия центров OO' данных окружностей пересекает окружность O в точках A и A' , окружность O' — в точках B и B' . Выберем обозначения так, чтобы OA было направлено в сторону, противоположную OO' и $O'B$ — в сторону, противоположную $O'O$. Обозначим далее через C и D две произвольные точки, лежащие соответственно на окружностях O и O' так, что хотя бы одна из них не лежит на прямой OO' .



Черт. 305.



Черт. 306.

При этом $CD < COO'D = CO + OO' + O'D = AO + OO' + O'B = AB$, и каждый из отрезков $A'B'$, $A'B$, AB' также меньше AB , так что AB есть *наибольшее* расстояние между точками обеих окружностей. Это рассуждение сохраняет силу независимо от того, будут ли данные окружности располагаться одна вне другой (черт. 305), одна внутри другой (черт. 306), пересекаться (черт. 307) или касаться одна другой.

Переходим к отысканию *наименьшего* расстояния.

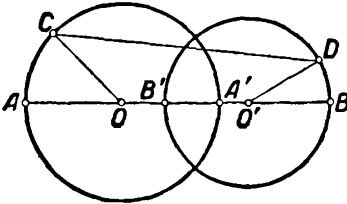
Если окружности лежат одна вне другой, то $OO' < OCD O' = OC + CD + DO'$, откуда $CD > OO' - OA' - O'B' = A'B'$, и каждый из отрезков AB , AB' , $A'B$ также больше $A'B'$ (черт. 305), так что $A'B'$ есть *наименьшее* расстояние.

Если окружность O' лежит внутри окружности O , то $OC < OO' + O'D + DC$, так что $CD > OC - OO' - O'D = OA' - OO' - O'B' = A'B$, и $A'B$ меньше каждого из отрезков AB , AB' , $A'B'$ (черт. 306), так что отрезок $A'B$ есть *наименьшее* расстояние. В случае двух кон-

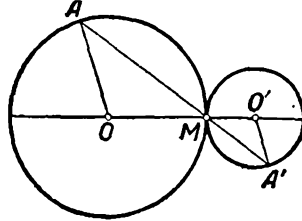
центрических окружностей за $A'B$ можно принять соответствующий отрезок любого из радиусов.

Если окружности пересекаются или касаются, вопрос о наименьшем расстоянии отпадает.

57. Центр O' окружности радиуса R' , касающейся данной окружности O радиуса R , удовлетворяет условию $OO' = R + R'$, если ка-



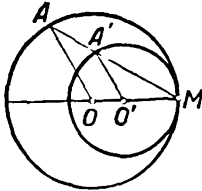
Черт. 307.



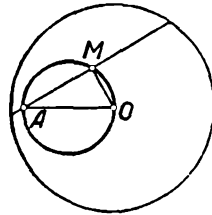
Черт. 308.

сание внешнее, и условию $OO' = |R - R'|$, если касание внутреннее. Отсюда следует, что геометрическое место точек O' есть пара окружностей, концентрических с данной.

58. Если прямая AA' проходит через точку касания M окружностей O и O' (черт. 308 и 309), то $\angle OAM = \angle OMA = \angle O'MA' = \angle O'A'M$, откуда и следует, что OA параллельно $O'A'$.



Черт. 309.



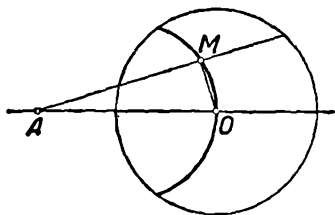
Черт. 310.

59. Окружности остаются касающимися друг друга, так как условия $OO' = |R - R'|$ в случае внутреннего касания и $OO' = R + R'$ в случае внешнего касания остаются в силе при указанных в тексте задачи изменениях радиусов.

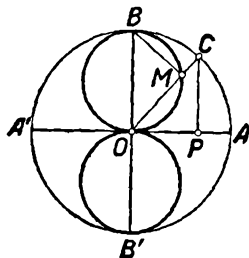
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV (стр. 81).

60. Если O — центр данной окружности и A — данная точка, то из середины M любой хорды, проходящей через A , отрезок OA виден под прямым углом. Искомое геометрическое место есть окружность, построенная на OA как на диаметре, если A лежит внутри данной окружности (черт. 310) или на данной окружности, и дуга аналогичной окружности, если A лежит вне окружности (черт. 311).

61. Пусть AA' — данный диаметр окружности O (черт. 312), BB' — диаметр, к нему перпендикулярный. На каждом радиусе OC откладываем отрезок OM , равный расстоянию CP точки C от AA' . Треугольники OCP и BOM равны (так как $OC=BO$, $CP=OM$,



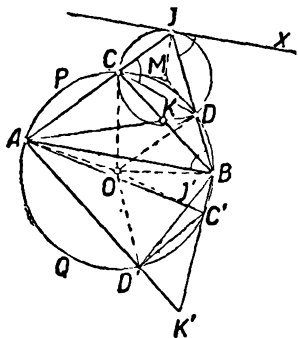
Черт. 311.



Черт. 312.

$\angle OCP = \angle BOM$), откуда следует, что угол OMB — прямой. Геометрическое место точек M состоит из двух окружностей, построенных на отрезках OB и OB' как на диаметрах.

62. Пусть APB — меньшая, AQB — большая из дуг, на которые точки A и B делят окружность (черт. 313). Обозначим $\angle AOB = \alpha$; $\angle COD = \beta = \angle C'OD'$.



Черт. 313.

1°. Если точки C и D лежат на дуге APB , то $\angle AIB = \frac{1}{2} \widehat{AQB} - \frac{1}{2} \widehat{CD} = \frac{1}{2} (360^\circ - \alpha - \beta)^1$; то же самое выражение для угла AIB получается в том случае, если только одна из точек C и D лежит на дуге APB . Если точки C' и D' обе лежат на дуге AQB , то $\angle A'I'B = \frac{1}{2} \widehat{APB} + \frac{1}{2} \widehat{C'D'} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$. Следовательно,

геометрическое место точек I и I' есть вполне определённая окружность, проходящая через точки A и B (на чертеже не показана), так как отрезок AB виден из точек I под постоянным углом $\frac{1}{2} (360^\circ - \alpha - \beta)$, а из точек I' — под постоянным углом $\frac{1}{2} (\alpha + \beta)$, и эти два угла составляют в сумме 180° .

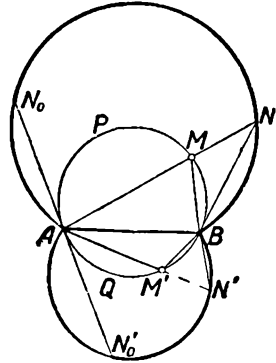
2°. Если точки C и D лежат на дуге APB , то $\angle AKB = \frac{1}{2} \widehat{AQB} + \frac{1}{2} \widehat{CD} = \frac{1}{2} (360^\circ - \alpha + \beta)$. Если точки C' и D' обе лежат

¹⁾ Знаком $\widehat{\quad}$ обозначается дуга; по поводу равенства числовых значений дуг и углов см. пп. 17, 18.

на дуге AQB , то $\angle AK'B = \frac{1}{2} \widehat{APB} - \frac{1}{2} \widehat{C'D'} = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$; то же

самое выражение для угла $AK'B$ получается и в том случае, если только одна из точек C' и D' лежит на дуге AQB . Геометрическое место точек K и K' есть также окружность (по той же причине, что и для точек I и I').

3°. Пусть M — центр окружности, описанной около треугольника ICD , и IX — касательная к этой окружности в точке I . Так как вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то $\angle CMD = 2 \angle CID = 360^\circ - \alpha - \beta$. Следовательно, углы равнобедренного треугольника CMD не изменяются при перемещении хорды CD . Так как сторона CD также имеет постоянную длину, то и отрезки $MC = MD = MI$ сохраняют постоянную длину. Далее, $\angle XID = \angle ICD = 180^\circ - \angle ACD = \angle ABD$ (так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный), так что прямая IX параллельна AB , а значит прямая MI перпендикулярна к AB . Аналогичные рассуждения применимы и к тому случаю, когда точки C и D занимают положение C' и D' на дуге AQB , а точка I — положение I' .



Черт. 314.

Так как геометрическое место точек I (и I') есть окружность, а отрезок IM сохраняет постоянную величину и направление, то геометрическое место точек M получается из геометрического места точек I посредством поступательного перемещения (п. 51), определяемого отрезком IM . Следовательно, геометрическое место точек M есть окружность, равная той, которую описывают точки I и I' (упр. 47).

Тем же путём доказывается, что геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников KCD (и $K'C'D'$) есть окружность, равная той, которую описывают точки K и K' .

Примечание. Из того, что стороны и углы треугольников COD и CMD не изменяются при перемещении хорды CD , следует, что и расстояние OM при этом не изменяется.

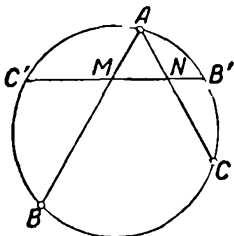
Поэтому центр окружности, являющейся геометрическим местом точек M , совпадает с центром данной окружности. То же справедливо и для геометрического места центров окружностей, описанных около треугольников KCD .

63. Если точка M лежит на дуге APB (черт. 314), то $\angle ANB = \angle MBN = \frac{1}{2} \angle AMB$. Так как при перемещении точки M по дуге

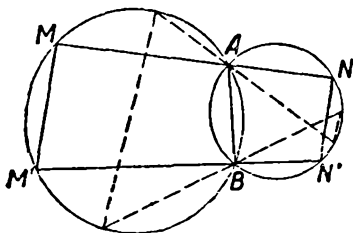
APB угол AMB сохраняет постоянную величину, то и угол ANB сохраняет постоянную величину. Следовательно, точка N лежит на вполне определённой дуге окружности, имеющей своими концами точки A и B

(и представляющей собой геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом). При этом точка N лежит от касательной AN_0 в точке A к данной окружности по ту же сторону, что и точка B . Поэтому геометрическое место точек N есть дуга N_0NB .

Аналогичное рассуждение применимо и в том случае, если точка M' лежит на дуге AQB : если точка M' описывает дугу AQB , то точка N' описывает дугу $N_0'N'B$ аналогичную дуге N_0NB .



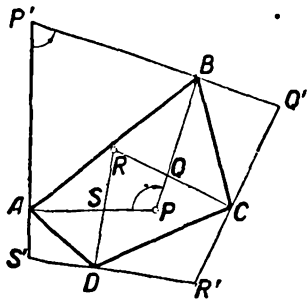
Черт. 315.



Черт. 316.

64. Если B' и C' — середины дуг AC и AB и M, N — точки пересечения прямой $B'C'$ с хордами AB и AC (черт. 315), то $\angle AMN = \frac{1}{2} \widehat{AB'} + \frac{1}{2} \widehat{BC'}$; $\angle ANM = \frac{1}{2} \widehat{AC'} + \frac{1}{2} \widehat{B'C}$. Следовательно, $\angle AMN = \angle ANM$ и $AM = AN$.

65. Если MAN и $M'BN'$ — две секущие (черт. 316), пересекающиеся вне обеих окружностей, то $\angle M'MA = 180^\circ - \angle M'BA = \angle ABN' = 180^\circ - \angle ANN'$. Отсюда $\angle M'MA + \angle INN' = 180^\circ$, так что MM' и NN' параллельны. Аналогичные рассуждения применимы, если секущие пересекаются внутри одной из данных окружностей (как показано на черт. 316 пунктиром).



Черт. 317.

66. Если AP и BP — биссектрисы углов A и B четырёхугольника $ABCD$ (черт. 317), то из треугольника ABP имеем $\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B$.

Аналогично из треугольника CRD , где CR и DR — биссектрисы углов C и D , имеем

$\angle CRD = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle C - \frac{1}{2} \angle D$. Складывая, имеем $\angle APB + \angle CRD = 360^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. Следовательно, четырёхугольник $PQRS$ может быть вписан в окружность.

Если AP' и BP' — биссектрисы внешних углов при вершинах A и B , то AP' и BP' соответственно перпендикулярны к AP и BP , и, следова-

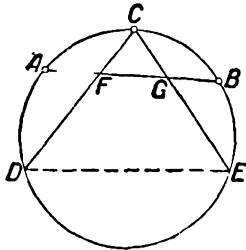
тельно, $\angle AP'B = 180^\circ - \angle APB$. Точно так же, если CR' и DR' — биссектрисы внешних углов при вершинах C и D , то $\angle CR'D = 180^\circ - \angle CRD$. Отсюда $\angle AP'B + \angle CR'D = 360^\circ - (\angle APB + \angle CRD) = 180^\circ$, и четырёхугольник $P'Q'R'S'$ также можно вписать в окружность.

$$67. \text{ Имеем } \angle CED = \frac{1}{2} \widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{AC} + \frac{1}{2} \widehat{AD};$$

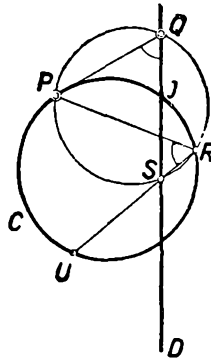
$$\angle BFD = \frac{1}{2} \widehat{AC} + \frac{1}{2} \widehat{BED} \text{ (черт. 318);}$$

$$\text{отсюда } \angle CED + \angle BFD = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BED} + \widehat{AD}) = 180^\circ.$$

68. Обозначим данную окружность буквой C , данную прямую — буквой D (черт. 319). Имеем $\angle PRS = \angle PQS$. Но угол PQS не зависит от выбора произвольной окружности, так как точки P и Q и прямая D даны. Следовательно, и угол PRS сохраняет постоянное



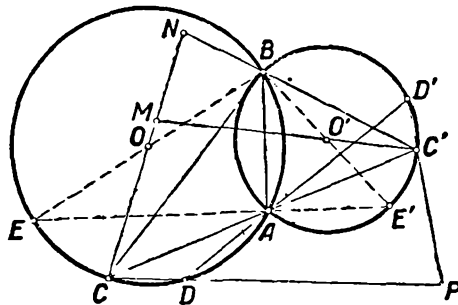
Черт. 318.



Черт. 319.

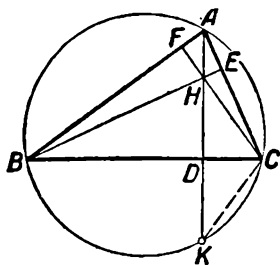
значение. Так как вписанный в окружность C угол PRS , или, что то же, угол PRU , сохраняет постоянную величину, то положение точки U не зависит от выбора окружности PQR (так обозначается окружность, проходящая через точки P , Q и R).

69. Проведём через точку A секущую EE' (черт. 320), перпендикулярную к AB , и обозначим через E и E' вторые точки её пересечения с окружностями O и O' . Прямые BE и BE' будут диаметрами окружностей. Из треугольников BCC' и BEE' имеем $\angle CBC' = 180^\circ - \angle C'CB - \angle CC'B = 180^\circ - \angle E'EB - \angle EE'B = \angle EBE' = \angle OBO'$. Таким образом, угол BCC' сохраняет постоянную величину.



Черт. 320.

Из равенства углов $\angle C'BO'$ и $\angle OBO'$ следует, что $\angle CBO = \angle C'BO'$. Таким образом, имеем $\angle BCO = \angle CBO = \angle C'BO' = \angle BC'O'$. Если M — точка пересечения прямых CO и $C'O'$, N — точка пересечения прямых CM и BC' , то в треугольниках BCN и MCN мы имеем по два равных угла. Следовательно, равны и третьи углы: $\angle CBC' = \angle MNC$. Итак, угол $\angle CBC'$ равен углу между прямыми OC и $O'C'$.

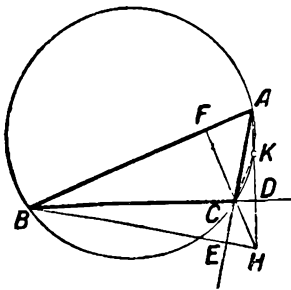


Черт. 321.

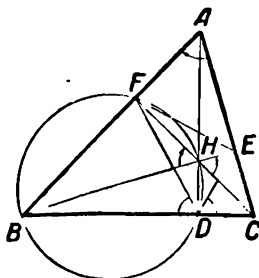
Угол $\angle CPD'$ между хордами CD и $C'D'$ равен $180^\circ - \angle PDA - \angle AD'C' = 180^\circ - \angle CBA - \angle ABC = 180^\circ - \angle CBC'$.

Если отрезок CC' будет неподвижным, а прямая DD' будет совпадать с CC' , то прямые CD и $C'D'$ обратятся в касательные в точках C и C' , и мы получаем такой результат: угол между касательными в точках C и C' равен углу $\angle CBC'$ или углу, ему дополнительному.

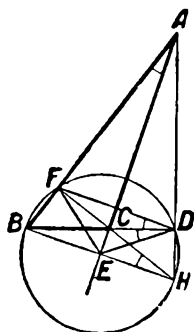
70. Пусть AD , BE , CF — высоты треугольника ABC (черт. 321 и 322); H — точка их пересечения; K — точка прямой AD , симметричная с H относительно прямой BC . Прямоугольные треугольники CDH и CDK равны (по равенству катетов), и потому $\angle CKD = \angle CHD$. Но $\angle CHD = \angle ABC$ как углы с соответственно перпендикулярными



Черт. 322.



Черт. 323.



Черт. 324.

сторонами. Следовательно, $\angle CKD = \angle CBA$, и четыре точки A , B , C , K лежат на одной окружности.

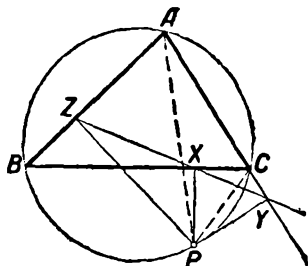
Таким же путём доказывается, что и точки, симметричные с H относительно AB и AC , также лежат на описанной окружности.

71. Пусть AD , BE и CF — высоты треугольника ABC , и H — точка их пересечения (черт. 323 и 324). Четырёхугольник $BDHF$ можно вписать в окружность, так как $\angle BDH = \angle BFH = 90^\circ$. Отсюда следует, что $\angle BDF = \angle BHF$. Аналогично докажем, пользуясь четырёхугольником $CDHE$, что $\angle CDE = \angle CHE$. Так как $\angle BHF = \angle CHE$, то и $\angle BDF = \angle CDE$. Прямые DE и DF , равно наклонены к

нённые к BC , равно наклонены и к высоте AD . Высота AD треугольника ABC есть (внутренняя или внешняя) биссектриса угла EDF треугольника DEF .

Примечание. Так как углы BHF и CAB имеют соответственно перпендикулярные стороны и одинаковое направление вращения, то $\angle BHF = \angle A$. Мы доказали выше, что $\angle BDF = \angle CDE = \angle BHF$. Следовательно, $\angle BDF = \angle CDE = \angle A$. Итак, отрезки, соединяющие основания высот треугольника, образуют с каждой его стороной углы, равные тому углу треугольника, который лежит против этой стороны.

72. Пусть P — точка окружности, описанной около треугольника ABC , и X, Y, Z — основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны BC, AC, AB треугольника. Предположим для определённости, что точка P лежит на дуге BC (черт. 325). Так как точки P, X, C, Y лежат на одной окружности, то $\angle PYX = \angle PCX$; аналогично $\angle PYZ = \angle PAZ$. Но $\angle PCX = \angle PAZ$, так как точки P, A, B, C лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle PYX = \angle PYZ$, и прямая XY совпадает с ZY . Точки X, Y, Z лежат на одной прямой.



Черт. 325.

Аналогично доказывается и обратное предложение: так как точки P, X, Y, C лежат на одной окружности, то $\angle PYX = \angle PCX$, и аналогично $\angle PYZ = \angle PAZ$. Так как точки X, Y, Z лежат на одной прямой, то углы PYX и PYZ совпадают, так что $\angle PCX = \angle PAZ$. Отсюда следует, что точки P, A, B, C лежат на одной окружности.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V (стр. 94).

73. 1°. Строим окружности данного радиуса с центрами в данных точках. Если эти две окружности пересекаются (касаются), то их общие точки служат центрами искомых окружностей; если они не имеют общих точек, то задача не имеет решений.

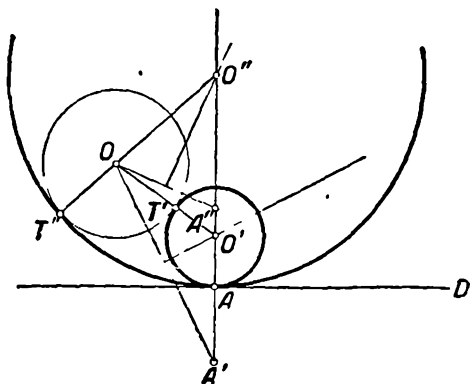
2°. Строим прямую, параллельную данной прямой, расположенную от неё с той же стороны, что и данная точка, и отстоящую от неё на расстоянии, равном радиусу. Строим окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному радиусу. Общие точки построенной прямой и построенной окружности будут центрами искомых окружностей. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Если данная точка лежит на данной прямой, построение упрощается.

3°. Если данные прямые пересекаются, то строим две пары прямых, параллельных данным прямым и отстоящих от них на расстоянии, равном радиусу. Точки их пересечения между собой будут центрами искомых окружностей. Задача имеет четыре решения.

Если данные прямые параллельны, то задача невозможна, за исключением того случая, когда расстояние между ними вдвое более данного радиуса; в последнем случае задача имеет бесчисленное множество решений.

4°. Строим пару окружностей — геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности (упр. 57), и пару прямых, параллельных данной прямой и отстоящих от неё на



Черт. 326.

расстоянии, равном данному радиусу. Каждая из точек пересечения одной из построенных окружностей с одной из построенных прямых есть центр одной из искоемых окружностей. Наибольшее возможное число решений — восемь.

74. Пусть O — данная окружность, D — данная прямая и A — данная точка (черт. 326). Центр O' искомой окружности лежит на перпендикуляре, восставленном к D в точке A . Если

отложить на этом перпендикуляре отрезок AA' , равный радиусу данной окружности, то $O'A' = O'O$. Отсюда такое построение. На перпендикуляре к прямой D в точке A откладываем в обе стороны радиус данной окружности $AA' = AA''$. Прямые, проходящие через середины отрезков OA' и OA'' и к ним перпендикулярные, определяют положение точек O' и O'' — центров искоемых окружностей — на прямой AA' .

Задача имеет два решения. Однако, если данная прямая касается данной окружности и точка A не лежит на окружности, то только одно; если же точка A лежит на самой окружности, то бесчисленное множество решений (если данная прямая касается данной окружности) или вовсе не имеет решения (если данная прямая пересекает данную окружность).

75. Если через все точки одной из данных прямых (или окружностей) C провести отрезки данной длины и данного направления, то геометрическим местом их концов будет прямая линия C'' на основании п. 51 (или окружность C'' , равная C , на основании упр. 47). Точка пересечения прямой (окружности) C'' с другой данной прямой (или окружностью) C' определяет положение концов искомого отрезка.

Так как прямая (окружность) C'' может занимать два различных положения на плоскости, то в случае, когда даны прямые линии, задача может вовсе не иметь решений, иметь два решения или бесчисленное множество решений; если даны две окружности, то задача

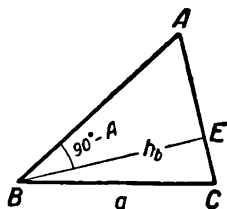
может вовсе не иметь решения, иметь 1, 2, 3, 4 или бесчисленное множество решений.

76. Если на каждой касательной к данной окружности C отложить отрезок AM , равный данному отрезку a , то геометрическим местом концов M этих отрезков будет окружность C' , concentрическая с данной (черт. 327). Действительно, если $AM = a$, то $OM = \text{const.}$ Искомые касательные выходят из точек пересечения M_1 и M_2 данной прямой D с этой окружностью C' . Наибольшее возможное число решений — четыре.

77. Пусть даны сторона $BC = a$, угол A и высота h_a , выходящая из вершины A . Строим произвольно основание BC , затем геометрическое место точек, из которых отрезок BC виден под данным углом A (п. 77). Точка A определяется как точка пересечения этого геометрического места с прямой, параллельной BC и отстоящей от неё на расстоянии h_a .

Пусть теперь даны сторона $BC = a$, угол A и высота h_b , выходящая из вершины B . Строим прямоугольный треугольник BCE (черт. 328) по гипотенузе $BC = a$ и катету $BE = h_b$. Затем строим угол EBA , равный $90^\circ - \angle A$ (или $\angle A - 90^\circ$). Пересечение второй стороны этого угла с прямой CE определяет положение вершины A .

78. Через конец B данного отрезка AB проводим произвольную прямую и откладываем на ней в обе стороны равные отрезки $BM = BN$. Прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка AN , отсекает от отрезка AB одну треть, так как она является медианой треугольника AMN .



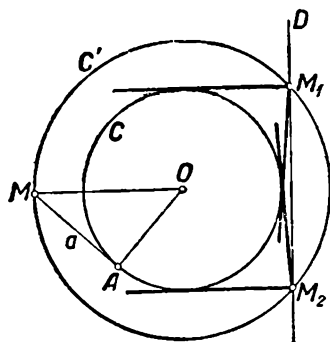
Черт. 328.

79. 1°. Пусть даны стороны AB и BC и медиана AD , выходящая из вершины A ; в таком случае можно построить треугольник ABD по трём сторонам и отложить $DC = BD$ (черт. 286).

Пусть теперь даны стороны AB и BC и медиана BD , выходящая из их общей вершины; если $DE = BD$ (черт. 27), то можно построить треугольник ABE по трём сторонам, разделить BE пополам в точке D и отложить $DC = AD$.

2°. Пусть даны сторона AB и медианы AD и BE , выходящие из концов данной стороны. Если G — точка пересечения медиан (черт. 286),

то можно построить треугольник ABG по трём сторонам AB , $\frac{2}{3}AD$, $\frac{2}{3}BE$ и отложить на лучах AG и BG соответственно отрезки AD и BE . Пересечение AE и BD даёт C .

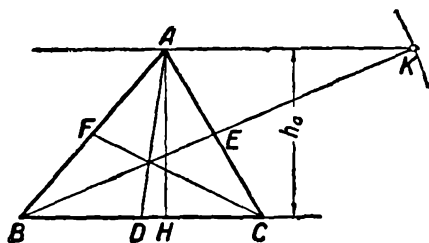


Черт. 327.

Пусть теперь даны сторона AB , медиана AD , выходящая из её конца, и медиана CF , проходящая через её середину (черт. 286). Можно построить треугольник AFG , где G — точка пересечения медиан, по трём сторонам $AF = \frac{1}{2} AB$, $AG = \frac{2}{3} AD$ и $FG = \frac{1}{3} CF$, а затем построить точки B и C .

3°. Пусть даны три медианы AD , BE , CF . На чертеже 282 (упр. 37) треугольники AEF и CEK равны, откуда $AG = CK$. Можно построить треугольник CGK по трём сторонам $CK = \frac{2}{3} AD$, $GK = \frac{2}{3} BE$, $CG = \frac{2}{3} CF$. Далее, откладывая $GB = GK$, получаем точку B , а деля пополам GK и откладывая $EA = EC$, — точку A .

80. Обозначая через a , b , c стороны BC , AC , AB искомого треугольника (черт. 329), через h_a и m_a — высоту и медиану, выходящие из вершины A , и аналогично — через m_b и m_c две другие медианы, получим, принимая за данную высоту $AH = h_a$, следующие пять различных случаев:



Черт. 329.

1) a , h_a , m_a ; 2) a , h_a , m_b ; 3) c , h_a , m_c ; 4) c , h_a , m_a ; 5) c , h_a , m_b . Все остальные возможности по существу не отличаются от какой-либо одной из пяти перечисленных.

1°. Строим прямоугольный треугольник AHD по катету $AH = h_a$ и гипотенузе $AD = m_a$, и на прямой DH откладываем в обе стороны от точки D отрезок $DB = DC = \frac{1}{2} a$.

2°. Строим $BC = a$, проводим прямую, параллельную BC на расстоянии h_a от неё, и радиусом $2m_b$ делаем из точки B засечку на этой прямой. Если K — полученная точка, то середина E отрезка BK будет и серединой стороны AC .

3°. Строим прямоугольный треугольник AHB по катету $AH = h_a$ и гипотенузе $AB = c$. Вершина C есть точка пересечения прямой BH с окружностью радиуса m_c с центром в середине F стороны AB .

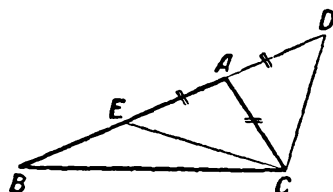
4°. Строим тот же прямоугольный треугольник AHB . Середина D стороны BC есть точка пересечения прямой BH с окружностью радиуса m_a с центром в точке A .

5°. Строим тот же прямоугольный треугольник AHB . Проводим через A прямую, параллельную BH , и из точки B , как из центра, описываем окружность радиуса $2m_b$. Их пересечение даёт некоторую точку K . Середина E отрезка BK есть середина стороны AC .

Наиболее возможное число решений — одно в первом из рассмотренных случаев и два — в каждом из остальных.

$\angle BEC = \angle BAC + \angle ACE = \angle A + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$. Таким образом, треугольник BCD (или BCE) можно построить по сторонам BC, BD (или BC, BE) и углу BDC (или BEC), противолежащему одной из них (п. 87).

После того как треугольник BCD (или BCE) построен, точка A определяется как точка пересечения прямой BD (или BE) с перпендикуляром, восстановленным в середине стороны CD (или CE).



Черт. 331.

83. Пусть ABC — искомый треугольник (черт. 331), в котором даны BC , угол B и $AB + AC$ (или $AB - AC$, или $AC - AB$).

Задача решается так же, как и упражнение 82; только треугольник BCD (или BCE) строится по двум сторонам BC и BD (или BC и BE) и заключённому между ними углу B (или $180^\circ - \angle B$, если $AC > AB$).

84. Пусть даны угол A , высота h_a , выходящая из вершины A , и периметр треугольника. Если на продолжениях стороны BC за точки B и C отложить отрезки $BB' = BA$ и $CC' = CA$, то отрезок $B'C'$ будет равен периметру треугольника, а углы $BB'A$ и $CC'A$ соответственно равны $\frac{1}{2} \angle B$ и $\frac{1}{2} \angle C$, откуда следует, что $\angle B'AC' = 180^\circ -$

$-\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$. Таким образом, треугольник $AB'C'$ можно построить по основанию $B'C'$, равному периметру искомого треугольника, углу при вершине A и высоте (упр. 77). Точки B и C лежат на перпендикулярах, восстановленных в серединах сторон AB' и AC' .

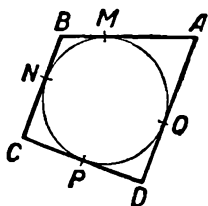
Пусть теперь даны угол A , высота h_b , выходящая из вершины, отличной от A , и периметр треугольника. Строим прямоугольный треугольник ABH с углом A (или $180^\circ - \angle A$) и катетом $BH = h_b$. Гипотенуза AB будет одной из сторон искомого треугольника. Последний можно построить, зная сторону AB , прилежащий угол A и сумму двух других сторон, равную разности между данным периметром и стороной AB (упр. 83).

85. В обозначениях упражнения 82 (черт. 331) имеем: $\angle ADC = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle A$, откуда $\angle BCD = \angle C + \frac{1}{2} \angle A = \angle C + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B - \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$; $\angle AEC = \angle ACE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$, откуда $\angle BCE = \angle C - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle A) = \angle C - 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$. Если даны BC и $AB + AC$ (или $AB - AC$), то можно по-

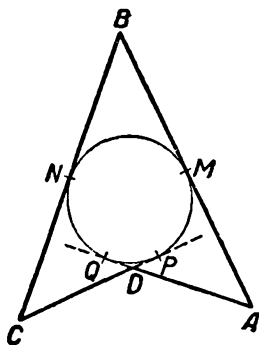
строить треугольник BDC (или BEC) по сторонам BC , BD (или BC , BE) и углу BCD (или BCE), противолежащему одной из них (п. 87). Построение заканчивается, как в упражнении 82.

86. Проводим прямые, соответственно параллельные данным прямым и отстоящие от них на одном и том же расстоянии a ; точка пересечения построенных прямых лежит на искомой биссектрисе. Повторяя построение для расстояния a' , отличного от a , находим вторую точку биссектрисы.

87. Существует два вида описанных четырёхугольников, у которых окружность заключена внутри его: выпуклый четырёхугольник (черт. 332), у которого окружность касается всех сторон, и невыпуклый четырёхугольник (черт. 333), у которого окружность касается двух сторон и продолжений двух других сторон. Если

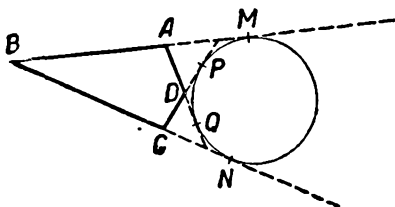


Черт. 332.

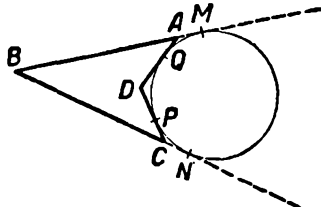


Черт. 333.

M , N , P , Q — точки касания, то в первом случае $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + NB + CN + QD = BC + AD$, во втором случае $AB + CD = AM + MB + CP - DP = AQ + NB + CN - DQ = BC + AD$, так как касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны.



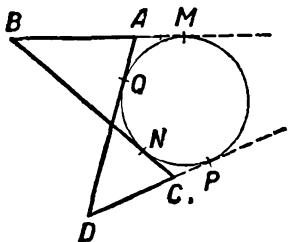
Черт. 334.



Черт. 335.

Существует три типа описанных четырёхугольников, у которых окружность расположена вне четырёхугольника: выпуклый, у которого окружность касается продолжений всех четырёх сторон (черт. 334), невыпуклый, у которого окружность касается двух смежных сторон и продолжений двух других сторон (черт. 335), и несобст-

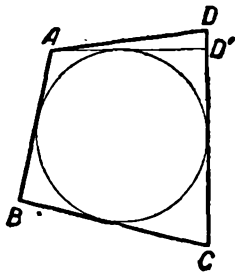
венный (п. 21), у которого окружность касается двух противоположных сторон и продолжений двух других сторон (черт. 336). В первом случае (черт. 334) имеем: $AB + AD = BM - AM + AQ - DQ = BM - DQ = BN - DP = BN - CN + CP - DP = BC + CD$; во втором случае (черт. 335) $AB + AD = BM - AM + AQ + DQ = BM + DQ = BN + DP = BN - CN + CP + DP = BC + CD$; в третьем (черт. 336) $AB + AD = BM - AM + AQ + DQ = BM + DQ = BN + DP = BN + CN - CP + DP = BC + CD$, так как касательные к окружности из одной точки равны.



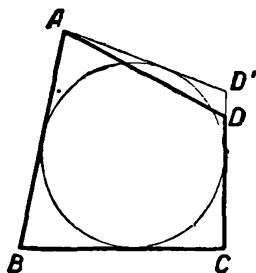
Черт. 336.

Обратно, пусть, например, в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 337 и 338) суммы противоположных сторон равны: $AB + CD = BC + AD$. Построим окружность, касающуюся сторон AB , BC , CD четырёхугольника и расположенную с той же стороны от каждой из этих сторон, что и внутренняя область четырёхугольника.

Предположим, что эта окружность не касается стороны AD . Проведя из точки A касательную AD' к построенной окружности, будем иметь $AB + CD' = BC + AD'$. Из этого и из предыдущего равенств находим $AD - AD' = CD - CD' = DD'$, если $CD > CD'$, и $AD' - AD = CD' - CD = DD'$, если $CD' > CD$. В обоих случаях разность



Черт. 337.



Черт. 338.

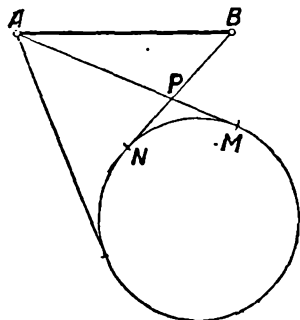
двух сторон треугольника ADD' оказывается равной третьей стороне, что невозможно. Следовательно, точки D и D' совпадают. Итак, если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то существует окружность, заключённая внутри четырёхугольника и касающаяся его сторон.

Аналогичные обратные теоремы имеют место и в остальных случаях. Доказываются они совершенно так же, как только что доказанная.

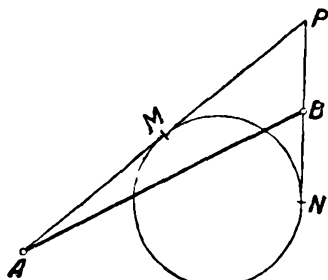
88. Пусть окружность касается сторон AB , BC , CD четырёхугольника $ABCD$, и AD' — касательная из точки A к этой окружности, так что $AB + CD' = BC + AD'$ (упр. 87). Если сторона AD

не пересекает окружности (черт. 337), то $AB + CD' + D'D = BC + AD' + D'D$. Но $CD' + D'D = CD$, $AD' + D'D > AD$, откуда $AB + CD > BC + AD$. Если AD пересекает окружность (черт. 338), то $AB + CD' - D'D = BC + AD' - D'D$. Но $CD' - D'D = CD$, $AD' - D'D < AD$, откуда $AB + CD < BC + AD$.

Итак, если AD касается окружности, то $AB + CD = BC + AD$; если AD не пересекает окружности, то $AB + CD > BC + AD$,



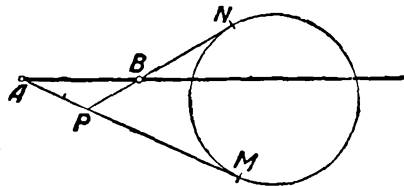
Черт. 339.



Черт. 340.

и если AD пересекает окружность, то $AB + CD < BC + AD$. Так как перечисленные случаи охватывают все возможности, то справедливы и обратные предложения.

88а. Если AB не пересекает окружности (черт. 339), AM и BN — касательные к окружности и P — точка их пересечения, то $AB < AP + BP < AM + BN$; $AB > AP - BP = (AP + PM) - (PM + BP) = AM - BN$. Если AB пересекает окружность и точки A и B лежат по разные стороны от окружности (черт. 340), AM и BN — касательные, P — точка их пересечения, то $AB > AP - BP = (AM + MP) - (PN - BN) = AM + BN$; если же точки A и B лежат по одну сторону от окружности (черт. 341), то $AB < AP + BP = (AM - PM) + (PN - BV) = AM - BN$.

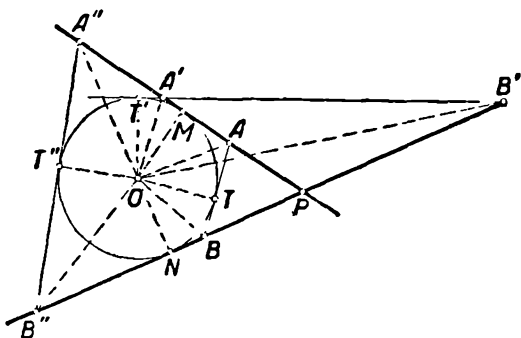


Черт. 341.

89. Угол, под которым отрезок AB подвижной касательной, заключенный между двумя неподвижными касательными PM и PN (черт. 342), виден из центра O окружности, сохраняет постоянную величину, пока окружность остается внеписанной в треугольник, образованный тремя касательными (подвижная касательная занимает положение AB или $A'B'$), и заменяется дополнительным углом, если окружность становится вписанной (подвижная касательная занимает положение $A''B''$). Действительно, $\angle AOB = \angle AOT + \angle TOB =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \angle MOT + \frac{1}{2} \angle TON = \frac{1}{2} \angle MON; \text{ точно так же } \angle A'OB' = \\
 &= \angle BOT' - \angle A'OT' = \frac{1}{2} \angle T'ON - \frac{1}{2} \angle T'OM = \frac{1}{2} \angle MON; \\
 \angle A''OB'' &= \angle A''OT'' + \angle T''OB'' = \frac{1}{2} \angle MOT'' + \frac{1}{2} \angle T''ON = \\
 &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle MON \quad (T, T', T'' - \text{точки касания}).
 \end{aligned}$$

Если данные касательные в точках M и N параллельны, то отрезок подвижной касательной, заключённый между ними, виден из центра под прямым углом.



Черт. 342.

90. Пусть PM и PN (черт. 342) — неподвижные касательные к окружности, AB — отрезок подвижной касательной, точка прикосновения которого T лежит на меньшей дуге MTN ; тогда $PA + PB + AB = PA + PB + AT + BT = PA + PB + AM + BN = PM + PN$. Но PM и PN имеют постоянную длину.

Если точка прикосновения T' (или T'') подвижной касательной лежит на большей дуге $MT'N$, то возможны несколько случаев.

1°. Подвижная касательная пересекает прямую PM в точке A' , лежащей за точкой M , и прямую PN в точке B' , лежащей за точкой P . В этом случае постоянную величину имеет $PA' + A'B' - PB' = PM + MA' + A'B' - (B'N - PN) = PM + T'A' + A'B' - B'N + PN = PM + T'B' - BN + PN = PM + PN$.

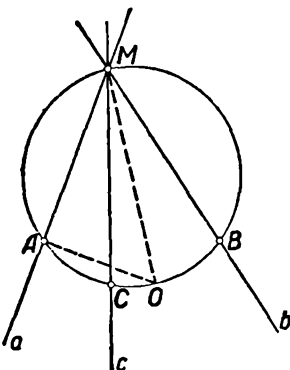
2°. Подвижная касательная пересекает прямую PM в точке, лежащей за точкой P , и прямую PN — в точке, лежащей за точкой N . Этот случай вполне аналогичен предыдущему.

3°. Подвижная касательная пересекает прямую PM в точке A'' , лежащей за точкой M , и прямую PN в точке B'' , лежащей за точкой N . При этом постоянную величину имеет $PA'' + PB'' - A''B'' = PA'' + PB'' - A''T'' - T''B'' = PA'' + PB'' - A''M - B''N = PM + PN$.

Итак, во всех трёх случаях можно сказать: если точка прикосновения лежит на большей из двух дуг, то постоянную величину сохраняет разность между суммой двух сторон треугольника, образованного тремя касательными, и его третьей стороной (причём роль этой третьей стороны играет отрезок одной из неподвижных или подвижной касательной в зависимости от расположения последней).

90а. Так как касательные к окружности из одной точки равны между собой, то (черт. 102) $AE = AF$; $BF = BD$; $CD = CE$. Далее в силу этих равенств имеем $AF + BF = AE + BF = c$, $BD + CD = BF + CD = a$, $CE + AE = CD + AE = b$. Отсюда $AE + BF + CD = p$ и $AE = p - a$, $BF = p - b$, $CD = p - c$. Далее $AB + BD_1 + CD_1 + AC = 2p$, откуда, в силу $BD_1 = BF_1$, $CD_1 = CE_1$, $AF_1 = AE_1$, получим $AE_1 = AF_1 = p$; далее имеем $BD_1 = BF_1 = AF_1 - AB = p - c$; аналогично $CD_1 = CE_1 = p - b$, и т. д.

91. Если три окружности с центрами в вершинах A, B, C треугольника ABC попарно касаются одна другой, то точки касания лежат на сторонах треугольника (или их продолжениях). Если окружности касаются одна другой внешним образом в точках D, E, F на сторонах BC, AC, AB , то $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$ и $AE + CD = b$, $BF + AE = c$, $CD + BF = a$; откуда следует (упр. 90а), что точки D, E, F совпадают с точками касания вписанной окружности. Если окружность с центром A касается внутренним образом окружностей с центрами B и C , то аналогично найдём, что точки касания совпадают с точками касания D_1, E_1, F_1 внеписанной окружности со стороной BC и продолжениями двух других сторон и т. д.



Черт. 343.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI (стр. 103).

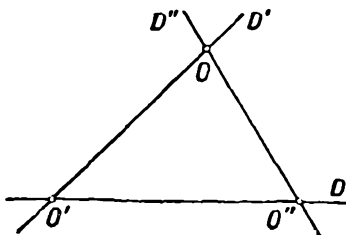
92. Пусть прямые a и b неизменяемой фигуры проходят при перемещении последней соответственно через данные неподвижные точки A и B (черт. 343). При этом угол, образованный этими прямыми, сохраняет постоянную величину и, следовательно, точка их пересечения M описывает окружность, проходящую через точки A и B . Любая прямая c неизменяемой фигуры, проходящая через точку пересечения M , образует с a и b постоянные углы и потому проходит через некоторую неподвижную точку C той же окружности.

Всякая другая прямая c' подвижной фигуры параллельна некоторой прямой c той же фигуры и остаётся от этой прямой на постоянном расстоянии. Отсюда следует, что прямая c' касается некоторой неподвижной окружности с центром в точке C .

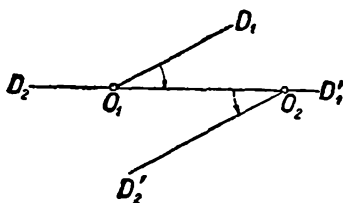
Центр вращения лежит на нормалях к траекториям всех точек фигуры (п. 104). Найдём касательную и нормаль к траектории точки A

в самой точке A . С этой целью рассмотрим некоторые другие положения A' и M' точек A и M на плоскости. Прямая $A'M'$ будет проходить через точку A (так как прямая AM по условию вращается около точки A). Следовательно, прямая AA' совпадает с AM' , а предельным положением прямой AA' будет AM . Итак, траектория точки A имеет своей касательной в точке A прямую AM , а нормалью — перпендикуляр к этой прямой в точке A . Траектория точки M (окружность) имеет своей нормалью в точке M диаметр, проходящий через M . Отсюда следует, что центр вращения O есть точка окружности ABC , диаметрально противоположная M .

93. Пусть O' (черт. 344) — центр вращения фигур F_1 и F_2 , O'' — центр вращения фигур F_2 и F_3 . Разложим первое из этих вращений



Черт. 344.



Черт. 345.

на две симметрии относительно прямых D' и D (п. 102 а), выбрав за вторую ось симметрии D прямую $O'O''$. При этом один из углов между прямыми D' и D будет равен половине угла между фигурами F_1 и F_2 . Аналогично, разложим и второе из этих вращений на две симметрии относительно прямых D и D'' , приняв за первую ось симметрии D ту же прямую $O'O''$. Как и в первом случае, один из углов между прямыми D и D'' будет равен половине угла между фигурами F_2 и F_3 .

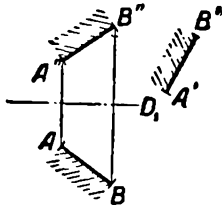
Вращение, совмещающее фигуру F_1 с F_3 , можно получить как результирующее двух вращений, из которых первое совмещает F_1 с F_2 , а второе F_2 с F_3 . Разложив каждое из этих двух вращений на две симметрии, как указано выше, мы убедимся, что вращение, совмещающее F_1 с F_3 , будет результирующим двух симметрий относительно прямых D' и D'' (п. 103). Отсюда следует, что точка пересечения O прямых D' и D'' есть центр этого последнего вращения, и один из углов между прямыми D' и D'' равен половине угла между фигурами F_1 и F_3 .

Итак, углы треугольника $O'O''O$ соответственно равны половинам углов между данными фигурами, взятыми попарно, или дополняют эти половины до 180° .

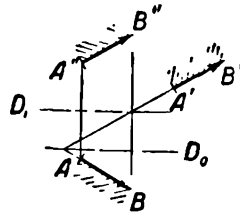
94. Вращение около центра O_1 можно заменить последовательностью двух симметрий (п. 102а) относительно прямых D_1 и D_2 , проходящих через O_1 (черт. 345). Вращение около центра O_2 можно за-

менить последовательностью двух симметрий относительно прямых D_1' и D_2' , проходящих через O_2 . Можно предположить, не нарушая общности, что прямые D_2 и D_1' совпадают. Остаётся последовательность симметрий относительно прямых D_1 и D_2' , которые параллельны друг другу, так как образуют с D_2 углы, равные половине данного угла поворота и имеющие противоположные направления. Последовательность симметрий относительно D_1 и D_2' даёт поступательное перемещение.

95. Пусть A и B — две точки первой фигуры F (черт. 346), A' и B' — соответственные им точки второй фигуры F' , имеющей противоположное направление вращения.



Черт. 346.



Черт. 347.

1°. Выбрав произвольно прямую D_1 , строим фигуру F'' , симметричную с первой относительно этой прямой, и пусть A'' , B'' — точки этой фигуры, соответствующие точкам A , B . Фигуры F'' и F' , как имеющие одинаковое направление вращения, можно получить одну из другой бесчисленным множеством способов с помощью двух симметрий (п. 102). В общей сложности получаем три симметрии.

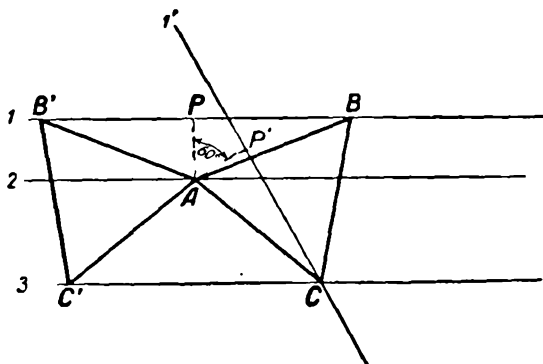
2°. Чтобы последние две симметрии были равносильны поступательному перемещению, необходимо и достаточно, чтобы отрезок $A''B''$ был параллелен отрезку $A'B'$ и был направлен с ним в одну сторону, а для этого прямая D_1 должна быть параллельна одной (вполне определённой) из биссектрис D_0 углов между прямыми AB и $A'B'$ (черт. 347).

3°. Наконец, чтобы направление поступательного перемещения $A''A'$ было параллельно прямой D_1 , необходимо и достаточно, чтобы прямая D_1 была выбрана на середине расстояния между прямыми, параллельными D_0 и проходящими через точки A и A' . Другими словами, прямая D_1 должна быть параллельна D_0 и проходить через середину отрезка AA' .

Аналогично можно получить фигуру F' из F с помощью поступательного перемещения, сопровождаемого одной симметрией, и в частности сделать так, чтобы направление перемещения было параллельно оси симметрии: для этого надо только начать с построения фигуры F^* , симметричной с F' (а не с F) относительно прямой D_1 .

96. Пусть ABC — искомый треугольник (черт. 348). Вершину A можно, очевидно, выбрать произвольно на одной из данных прямых,

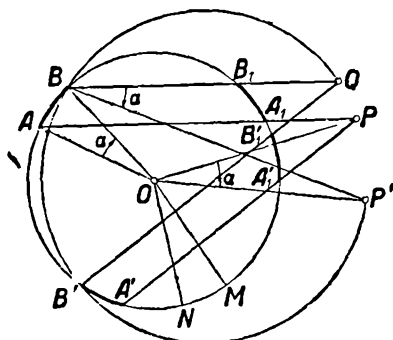
например на прямой 2. Построим прямую I' , которая получается из прямой I поворотом около точки A на 60° хотя бы по часовой стрелке. Для этого опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую I , построим угол PAP' , равный 60° , отложим $AP' = AP$ и, наконец, про-



Черт. 348.

ведём через точку P' прямую I' , перпендикулярную к AP' . Так как при повороте около точки A на 60° точка B совмещается с точкой C , то точка C есть точка пересечения прямых I' и 3. Зная положение точек A и C , можно построить и точку B .

Второе решение (треугольник $AB'C'$), очевидно, симметрично с первым относительно перпендикуляра к трём данным прямым.



Черт. 349.

Аналогичные рассуждения применимы и к трём данным окружностям.

97. Пусть O — центр данной окружности, P и Q — данные точки, AB — искомая дуга, равная данной дуге MN и расположенная так, что AP параллельно BQ (черт. 349). Повернём треугольник OAP около точки O на угол $\alpha = \angle AOB = \angle MON$, определяемый данной дугой; получим треугольник OBP' .

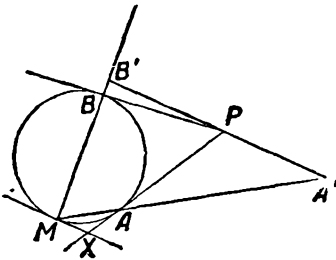
Точку P' можно построить, откладывая угол POP' , равный α , и отрезок $OP' = OP$. При этом и угол QBP' , равный углу между стороной AP треугольника OAP и новым положением BP' этой стороны, также будет равен α . Следовательно, точка B будет лежать на дуге, имеющей своими концами точки P' и Q и вмещающей угол α . Построив эту дугу, мы и получим в пересечении с данной окружностью точку B . Соответственно двум возможным точкам пересечения B и B' мы можем получить таким путём самое большее два решения — дуги AB и $A'B'$.

До сих пор мы неявно предполагали, что искомая дуга AB имеет на окружности то же направление, что и данная дуга MN . Можно, очевидно, получить дальнейшие рассуждения A_1B_1 и $A'_1B'_1$, в которых искомая дуга имеет направление, противоположное данной, рассматривая вторые точки пересечения прямых PA , QB , PA' , QB' с данной окружностью.

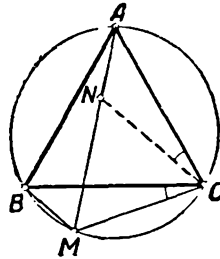
Если бы требовалось, чтобы прямые, соединяющие концы искомой дуги с данными точками P и Q , пересекались под данным углом β , то точка B определялась бы как точка пересечения данной окружности с дугой, из точек которой отрезок $P'Q$ был бы виден под углом $\alpha \pm \beta$.

ЗАДАЧИ КО ВТОРОЙ КНИГЕ (стр. 104).

98. Пусть $A'PB'$ — отрезок, параллельный касательной в точке M и заключённый между прямыми MA и MB (черт. 350), и X — точка пересечения касательных в точках A и M . Так как $XA = XM$, то $\angle XMA = \angle XAM = \angle A'AP$; с другой стороны, $\angle XMA = \angle AA'P$,



Черт. 350.



Черт. 351.

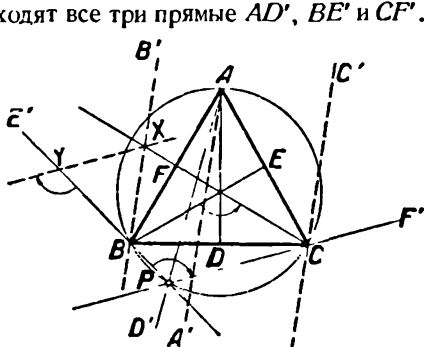
так как MX параллельно PA' . Отсюда $\angle A'AP = \angle AA'P$ и $PA' = PA$. Точно так же $PB' = PB$. Так как отрезки PA и PB равны между собой и не зависят от положения точки M , то точка P есть середина отрезка $A'B'$, и длина этого отрезка не зависит от положения точки M на окружности.

99. Отложив на MA (черт. 351) отрезок $MN = MC$, получим равнобедренный треугольник CMN (так как $\angle CMN = \angle CBA = 60^\circ$). Далее, $\angle ACN = \angle ACM - 60^\circ = \angle BCM$, треугольники ACN и BCM равны, откуда $BM = AN$. Итак, $MA = MN + NA = MB + MC$.

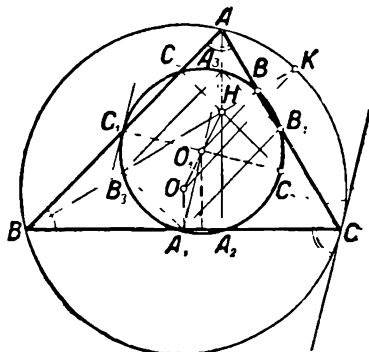
100. Пусть AD , BE , CF — высоты равнобедренного треугольника ABC (черт. 352) и прямые AD' , BE' , CF' проведены так, что биссектрисы AA' , BB' , CC' углов DAD' , EBE' , FCF' параллельны между собой. Обозначим через P точку пересечения прямых BE' и CF' и через XU — прямую, симметричную с CF относительно BB' . Прямая XU параллельна CF' , так как XU получается из CF' с помощью двух симметрий относительно параллельных прямых CC' и BB' . Прямые BE' и XU пересекаются под теми же углами, как BE и CF (в силу симметрии относительно BB'); кроме того, прямые BE' и XU пересека-

ются под теми же углами, что и прямые BE' и CF' (в силу параллельности XU и CF'). Следовательно, прямые BE' и CF' пересекаются под теми же углами, что и прямые BE и CF . Итак, $\angle BPC = 120^\circ$, и потому точка P , в которой пересекаются прямые BE' и CF' , лежит на описанной окружности.

Таким же путём докажем, что точка пересечения прямых AD' и BE' лежит на описанной окружности и, следовательно, совпадает с точкой P (так как прямая BE' пересекает описанную окружность, кроме точки B , только в одной точке). Итак, доказано, что через точку P проходят все три прямые AD' , BE' и CF' .



Черт. 352.



Черт. 353.

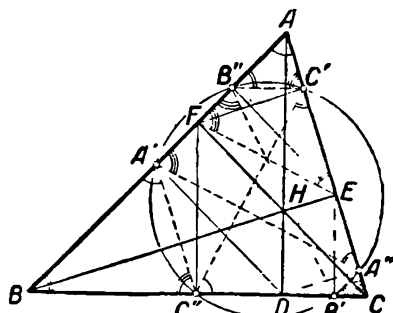
101. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC (черт. 353); A_2, B_2, C_2 — основания его высот; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков, заключённых между вершинами и точкой пересечения высот H . Отрезок A_1B_1 , соединяющий середины сторон треугольника ABC , параллелен стороне AB и равен её половине; точно так же отрезок A_3B_3 , соединяющий середины сторон треугольника ABH , параллелен стороне AB и равен её половине. Аналогично отрезки A_1B_3 и A_3B_1 , соединяющие соответственно середины сторон треугольников BCH и ACH , параллельны отрезку CH и равны каждый его половине. Так как прямая CH перпендикулярна к AB , то отсюда следует, что $A_1B_1A_3B_3$ есть прямоугольник, так что отрезки A_1A_3 и B_1B_3 равны и делятся в точке их пересечения O_1 пополам. Точно так же докажем, что отрезки A_1A_3 и C_1C_3 равны и делятся в точке их пересечения пополам. Отсюда следует, что отрезки A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 служат диаметрами одной окружности. Эта окружность проходит через точки A_2, B_2, C_2 , так как, например, отрезок A_1A_3 виден из точки A_2 под прямым углом.

Центр O_1 окружности, о которой идёт речь, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к хордам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в их серединах. Но каждый из этих перпендикуляров проходит (сравните решение упражнения 35) через середину отрезка OH , где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Следовательно, точка O_1 есть середина отрезка OH .

Треугольники O_1OA_1 и O_1HA_3 равны ($O_1O = O_1H$; $O_1A_1 = O_1A_3$; $\angle OO_1A_1 = \angle HO_1A_3$). Отсюда следует, что отрезок OA_1 равен и параллелен отрезку HA_3 , а следовательно, и отрезку AA_3 . Так как в четырёхугольнике OA_1A_3A стороны OA_1 и AA_3 равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм, и потому $OA = A_1A_3$. Итак, диаметр A_1A_3 окружности O_1 равен радиусу описанной окружности.

Если K — точка, симметричная с H относительно стороны AC , то отрезок O_1B_2 есть средняя линия треугольника ONK , так что $OK = 2O_1B_2 = OB$, и точка K есть точка описанной окружности. Мы получили предположение, приведённое в упражнении 70.

101а. Пусть I — центр вписанной окружности; I_a, I_b, I_c — центры внеписанных окружностей, касающихся соответственно сторон BC, AC, AB и продолжений двух других сторон (черт. 102). Так как прямая IA есть биссектриса угла A треугольника ABC , а прямая I_bI_c — биссектриса внешнего угла при вершине A , то прямая IA перпендикулярна к I_bI_c . Точно так же прямая IB перпендикулярна к I_aI_c , и IC — к I_aI_b . Следовательно, прямые IA, IB, IC — высоты треугольника $I_aI_bI_c$, и потому окружность ABC есть окружность девяти точек треугольника $I_aI_bI_c$ (упр. 101). Центр O окружности ABC есть середина отрезка, соединяющего точку пересечения I высот треугольника $I_aI_bI_c$ с центром окружности, описанной около этого треугольника, а радиус окружности ABC равен половине радиуса окружности $I_aI_bI_c$.



Черт. 354.

102. Пусть AD, BE, CF — высоты треугольника ABC (черт. 354), A' и A'', B' и B'', C' и C'' — основания перпендикуляров, опущенных из точек D, E, F на стороны треугольника.

Покажем, что прямая $A'A''$ образует со сторонами AB и AC углы, соответственно равные углам C и B треугольника: $\angle AA'A' = \angle C$, $\angle AA''A' = \angle B$. В самом деле, четырёхугольник $AA'DA''$ может быть вписан в окружность (так как углы при A' и A'' прямые) и, следовательно, $\angle AA'A' = \angle ADA' = 90^\circ - \angle BDA' = \angle B$. Аналогично $\angle AA''A' = \angle C$. Таким же путём доказывается, что прямая $B'B''$ образует со сторонами BC и BA углы, равные $\angle BB'B'' = \angle A$ и $\angle BB''B' = \angle C$, а прямая $C'C''$ — со сторонами CA и CB углы $\angle CC'C'' = \angle B$ и $\angle CC''C' = \angle A$.

Далее покажем, что прямая $B'C'$ параллельна BC , т. е. $\angle AB'C' = \angle B$ и $\angle AC'B' = \angle C$. Действительно, на основании примечания к решению упражнения 71 отрезок EF образует со сторонами треугольника ABC углы $\angle AEF = \angle B$ и $\angle AFE = \angle C$. Далее, по той же причине прямая $B'C'$, соединяющая основания B' и C' высот EB' и FC' треугольника AEF , образует с его сторонами AF и AE

углы $\angle AB''C' = \angle AEF = \angle B$ и $\angle AC'B'' = \angle AFE = \angle C$, и следовательно, параллельна EC . Точно так же докажем, что прямая $C''A'$ параллельна CA , так что $\angle BC''A' = \angle C$; $\angle BA'C'' = \angle A$, и что прямая $A''B'$ параллельна AB , так что $\angle CA''B' = \angle A$, $\angle CB'A'' = \angle B$.

Из доказанных равенств вытекает, что четырёхугольник $A'A'C'B''$ можно вписать в окружность, так как $\angle A'B''C' = 180^\circ - \angle AB''C' = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle AA''A'$, или $\angle A'B''C' + \angle A'A'C' = 180^\circ$. Далее, четырёхугольник $A'B''C'C''$ можно вписать в окружность, так как $\angle A'B''C' = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle A'C''C' (\angle A'C''C' = 180^\circ - \angle C'C''C - \angle A'C''B = 180^\circ - \angle A - \angle C = \angle B)$. Наконец, четырёхугольник $A'C'B'B''$ можно вписать в окружность, так как $\angle A'C'B'' = 180^\circ - \angle AC'B'' = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle A'B'B'' (\angle A'B'B'' = 180^\circ - \angle A - \angle B = \angle C)$.

Все три только что названные окружности совпадают между собой, так как они имеют по три общие точки.

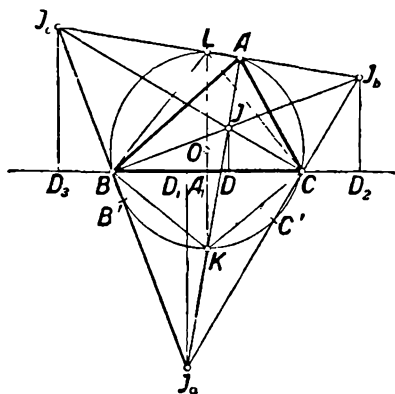
Доказательство сохраняет силу (с небольшими видоизменениями) и для тупоугольного треугольника.

103. Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC (черт. 355) с описанной окружностью. Так как $\angle BAK = \angle KAC$, то дуги BK и KC равны. Следовательно, $KB = KC$, так что точка K лежит на перпендикуляре, восстановленном в середине A_1 отрезка BC .

Если L — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при A с описанной окружностью, то $\angle KAL$ — прямой. Следовательно, KL есть диаметр описанной окружности, и потому $LB = LC$.

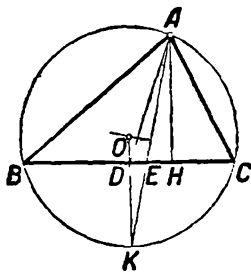
Так как окружность ABC есть окружность девяти точек треугольника $I_a I_b I_c$ (ср. решение упр. 101а), то она проходит через середины каждого из отрезков $I I_a$ (I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , и в то же время точка пересечения высот треугольника $I_a I_b I_c$) и $I_b I_c$. Следовательно, $KI = KI_a$ и $LI_b = LI_c$. В каждом из прямоугольных треугольников IBI_a , ICI_a , $I_b I_c$, $I_b I_c$ медиана, проходящая через вершину прямого угла, равна половине гипотенузы. Отсюда $KI = KI_a = KB = KC$ и $LI_b = LI_c = LB = LC$. Итак, биссектриса внешнего угла при A пересекает описанную окружность в точке, равноудалённой от точек I_b , I_c , B , C .

Если D , D_1 , D_2 , D_3 — точки касания вписанной и внеписанных окружностей с прямой BC , то в силу $KI = KI_a$ и $LI_b = LI_c$ имеем (согласно решению упр. 35) $A_1 K = \frac{1}{2} (D_1 I_a - DI)$, $A_1 L = \frac{1}{2} (D_2 I_b + D_3 I_c)$, откуда $D_1 I_a + D_2 I_b + D_3 I_c = DI + 2KL$.

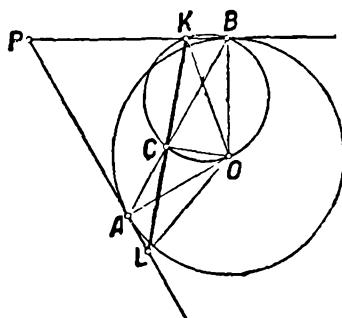


Черт. 355.

103а. Пусть дана высота AH , медиана AD , биссектриса AE искомого треугольника ABC (черт. 356). Строим треугольник AHD по катету AH и гипотенузе AD . Затем из точки A , как из центра, описываем окружность радиусом, равным данной биссектрисе, и в пересечении с прямой DH получаем точку E . Точка пересечения K прямой AE с прямой, проходящей через точку D и перпендикулярной к DH , лежит на описанной окружности (упр. 103). Центр O описанной окружности есть точка пересечения прямой DK с перпендикуляром, восстановленным к отрезку AK в его середине. Построив эту окружность (её радиус равен OA), получим на прямой DH вершины B и C треугольника.



Черт. 356.



Черт. 357.

104. Пусть PA и PB — две касательные к окружности, C — одна из точек хорды, соединяющей точки касания A и B , и KL — перпендикуляр к OC (черт. 357).

Окружность, построенная на OK как на диаметре, проходит через точки B и C , из которых отрезок OK виден под прямым углом. Следовательно, $\angle OKL = \angle OBC$, и таким же путём докажем, что $\angle OLK = \angle OAC$. Но $\angle OBC = \angle OAC$, так как треугольник OAB — равнобедренный. Следовательно, $\angle OKL = \angle OLK$ и $OK = OL$. В равнобедренном треугольнике OKL высота OC есть в то же время и медиана, т. е. $KC = CL$.

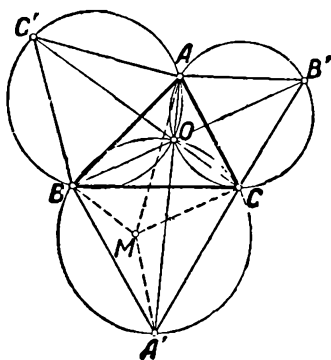
105. 1°. Треугольники $AA'C$ и $B'BC$ (черт. 358) равны, так как $A'C = BC$; $AC = B'C$ и $\angle ACA' = \angle B'CB = \angle C + 60^\circ$. Отсюда $AA' = BB'$ и аналогично $BB' = CC'$.

2°. Если O — точка пересечения прямых AA' и BB' , то $\angle OBC = \angle OA'C$ (в силу равенства треугольников $AA'C$ и $B'BC$), так что точки O , B , A' , C лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle BOC = 120^\circ$. Таким же путём покажем, что $\angle AOC = 120^\circ$. Следовательно, $\angle AOB = 120^\circ$, точки O , A , C' , B лежат на одной окружности, и $\angle AOC' = \angle ABC' = 60^\circ$. Отсюда, так как $\angle A'OC = 60^\circ$, вытекает, что точки C , O , C' лежат на одной прямой, т. е. прямая CC' проходит через точку O .

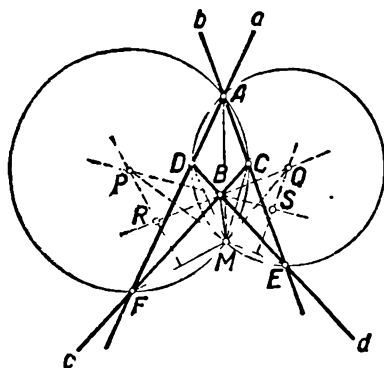
3°. Если точка O лежит внутри треугольника, то $AA' = AO + OA'$. Но $OA' = OB + OC$ (задача 99) и $AA' = OA + OB + OC$.

Примечание. Дальнейшие свойства этой фигуры рассмотрены в задаче 363.

106. 1°. Непосредственное доказательство. Пусть данные прямые a, b, c, d пересекаются попарно в точках A, B, C, D, E, F (черт. 359) и M — отличная от A точка пересечения окружностей ACF и ADE . Имеем $\angle BCM = \angle FCM = \angle FAM$; $\angle BEM = \angle DEM = \angle DAM = \angle FAM$. Отсюда $\angle BCM = \angle BEM$, и окружность, описанная около треугольника BCE , проходит через M . Так же доказывается, что и окружность, описанная около треугольника BDF , проходит через M .



Черт. 358.



Черт. 359.

2°. Доказательство, основанное на упражнении 72. Пусть a, b, c, d — данные прямые и M — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников abc и abd . Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые a, b, c , лежат на одной прямой l , и основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые a, b, d , также лежат на одной прямой, необходимо совпадающей с l . Так как основания перпендикуляров, опущенных из M на a, c, d , лежат на одной прямой, то M лежит на окружности, описанной около треугольника acd , и то же имеет место для треугольника bcd .

Центры P, Q, R, S окружностей, описанных соответственно около треугольников ACF, ADE, BDF, BCE , можно получить, восстанавливая перпендикуляры в серединах отрезков MC, MD, ME, MF . Угол RPS измеряется половиной дуги FMC и потому равен $\angle FAC$; угол RQS измеряется половиной дуги DME и потому равен тому же углу DAE . Четыре точки P, Q, R, S лежат на одной окружности. Далее, $\angle MPS = \angle MAC$ (вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу) и $\angle MAE = \angle MQS$. Следовательно, $\angle MPS = \angle MQS$. Четыре точки M, P, Q и S также лежат на одной окружности, и эта окружность совпадает с той, на ко-

торой лежат точки P , Q , R и S . Иначе говоря, последняя окружность проходит и через точку M .

107. Пусть $ABCD$ — произвольный четырёхугольник (черт. 360); E — точка пересечения продолжений сторон AD и BC ; F — точка пересечения продолжений сторон AB и CD ; EM и FM — биссектрисы углов при E и F ; G , H , K , L — точки их пересечения со сторонами четырёхугольника. Рассматривая треугольники EAM и EMC , можем написать: $\angle AEG = \angle DAM - \angle AMG$; $\angle BEG = \angle CMH - \angle MCB$. Так как EG — биссектриса угла при E , то $\angle AEG = \angle BEG$, т. е. $\angle DAM - \angle AMG = \angle CMH - \angle MCB$, откуда

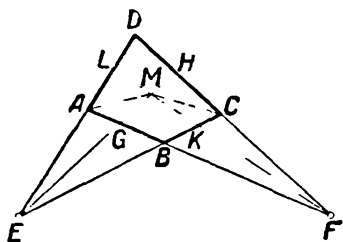
$$\angle DAM + \angle MCB = \angle AMG + \angle CMH. \quad (1)$$

Точно так же из треугольников FAM и FMC найдём $\angle BFK = \angle AML - \angle MAB$; $\angle CFK = \angle HCM - \angle CMK$, откуда $\angle AML - \angle MAB = \angle HCM - \angle CMK$, или

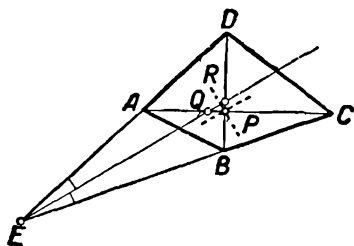
$$\angle MAB + \angle HCM = \angle AML + \angle CMK. \quad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2), получим

$$\angle BAD + \angle BCD = \angle GML + \angle HMK = 2 \angle GML. \quad (3)$$



Черт. 360.



Черт. 361.

До сих пор мы предполагали, что четырёхугольник $ABCD$ — произвольный. Если теперь четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, так что из равенства (3) следует, что $\angle GML = 90^\circ$.

Пусть далее P — точка пересечения диагоналей AC и BD произвольного четырёхугольника $ABCD$ (черт. 361), Q и R — точки пересечения биссектрисы угла при E с диагоналями AC и BD (мы предполагаем для определённости, что точки Q и R лежат на отрезках AP и DP ; те же рассуждения можно было бы применить и к тому случаю, когда эти точки лежат на отрезках BP и CP). Из треугольников AEQ и BER найдём $\angle AEQ = \angle DAC - \angle AQE = \angle DAC - \angle PQR$; $\angle BEQ = \angle DBC - \angle PRQ$. Так как EQ — биссектриса угла E , то $\angle AEQ = \angle BEQ$, или $\angle DAC - \angle PQR = \angle DBC - \angle PRQ$, откуда

$$\angle DAC - \angle DBC = \angle PQR - \angle PRQ. \quad (4)$$

Если четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle DAC = \angle DBC$, так что из равенства (4) следует $\angle PQR = \angle PRQ$. Это равенство показывает, что треугольник PQR — равнобедренный. Поэтому биссектриса угла QPR перпендикулярна к QR , а значит биссектриса угла CPD параллельна QR , т. е. биссектрисе угла при E .

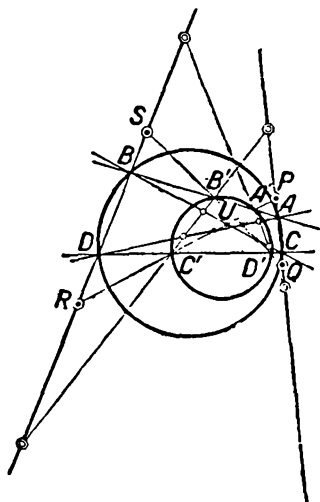
Так как доказанная теорема содержит два утверждения, то она допускает две обратные теоремы:

1°. Если биссектрисы углов, образованных продолжениями сторон некоторого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

Справедливость этой теоремы вытекает из равенства (3): если $\angle GML = 90^\circ$, то $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

2°. Если биссектриса одного из углов, образованных продолжениями сторон некоторого четырёхугольника, параллельна биссектрисе одного из углов, образованных его диагоналями, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

В самом деле, если прямая QR параллельна биссектрисе угла CPD , то она перпендикулярна биссектрисе угла QPR . Следовательно, треугольник PQR — равнобедренный, так что $\angle PQR = \angle PRQ$. Из равенства (4) следует, что $\angle DAC = \angle DBC$, и потому точки A, B, C, D лежат на одной окружности.



Черт. 362.

107а. Пусть одна из данных прямых AB пересекает первую окружность в точках A и B , вторую — в точках A' и B' ; другая данная прямая CD — соответственно в точках C и D , C' и D' (черт. 362). В первой окружности мы можем рассматривать либо пару хорд (AC, BD) ... (α) , либо пару хорд (AD, BC) ... (β) ; точно так же во второй окружности — пару хорд $(A'C', B'D')$... (α') , либо пару хорд $(A'D', B'C')$... (β') . Выбирая пару хорд первой окружности и пару хорд второй окружности, получим четыре комбинации: (α, α') ; (α, β') ; (β, α') ; (β, β') .

Рассмотрим, например, первую комбинацию хорд (α, α') , т. е. (AC, BD) , $(A'C', B'D')$, и пусть P, Q, R, S — точки пересечения хорд первой пары с хордами второй пары. Треугольники PAA' и SDD' имеют по два равных угла ($\angle PAA' = 180^\circ - \angle BAC = \angle SDD'$; $\angle PA'A = \angle B'A'C' = \angle SD'D$). Следовательно, их третьи углы равны: $\angle RPQ = \angle RSQ$, и точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

Аналогично получим ещё три четвёрки точек таких, что точки каждой четвёрки лежат на одной окружности (на черт. 362 точ-

ки каждой из трёх четвёрок выделены одинаковым образом).

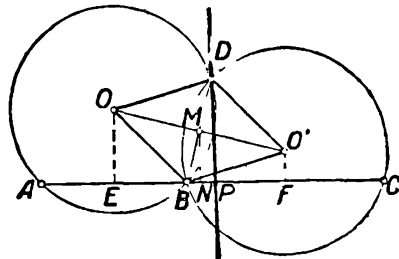
108. Пусть перпендикуляры к прямым MA , MB , MC , проведённые соответственно через точки A , B , C , пересекаются в одной точке M' . Отрезок MM' виден из каждой точки A , B , C под прямым углом и потому есть диаметр описанной окружности. Геометрическое место точек M есть описанная окружность.

109. Пусть сторона AB параллелограмма остаётся неподвижной (черт. 269). В таком случае остаётся неподвижной и точка O — середина стороны AB . Точки E , L , N , P и R описывают окружности с центром в точке O , так как отрезки $OE = \frac{1}{2} AD$, $OL = OI - LI = AD - OA$, $ON = OP = OA$, $OR = OI + IR = AD + DI = AD + OA$ сохраняют постоянную величину. Точки K , M , Q и S описывают окружности, равные той, которую описывает точка E , так как отрезки $KE = EM$ и $QE = ES$ сохраняют постоянную величину и направление (упр. 47).

110. Пусть O и O' — центры обеих окружностей (черт. 363); D — вторая точка их пересечения; M — точка пересечения OO' и BD ; E , F , N , P — основания перпендикуляров из точек O , O' , M , D на прямую AB . При этом положение точек E и F — середин отрезков AB и BC — на прямой AB не зависит от выбора окружностей. Точка M есть, в силу равенства окружностей, середина отрезка OO' , и, следовательно (упр. 35), точка N — середина отрезка EF . Поэтому положение точки N на прямой AB также не зависит от выбора окружностей. Наконец, точка M — середина отрезка BD , и, следовательно, N — середина отрезка BP . Отсюда вытекает, что и положение точки P на прямой AB не зависит от радиуса окружностей, и геометрическое место точек D есть прямая, проходящая через эту точку P и перпендикулярная к AB .

111. Пусть XX' , YY' — данные взаимно перпендикулярные прямые (черт. 364), AM и BM соответственно параллельны XX' и YY' , C — середина отрезка AB . Точки O , A , B и M лежат на окружности с центром C , откуда $\angle AMO = \angle ABO = 45^\circ$. Следовательно, так как прямая AM остаётся параллельной XX' , то точка M лежит на прямой, параллельной биссектрисе угла между XX' и YY' и проходящей через O . Так как $OM \leq AB$ (OM — хорда, AB — диаметр одной и той же окружности), то геометрическое место точек M есть отрезок этой прямой, длиной $2AB$, имеющий O своей серединой.

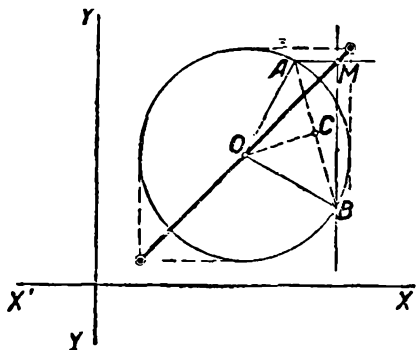
112. Пусть A и B — данные точки (черт. 365), C — точка касания окружностей, M — точка пересечения касательной в точке C с



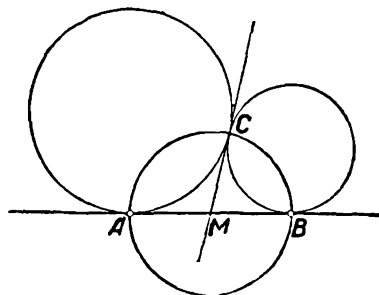
Черт. 363.

прямой AB . Из равенств $MA = MC$; $MB = MC$ следует, что $MC = \text{const}$ и геометрическое место точек C есть окружность, имеющая AB своим диаметром.

113. Пусть OX , OY — данные прямые (черт. 366), ABC — неизменяемый прямоугольный треугольник. Точки O , A , B и C лежат на окружности с центром M в середине отрезка AB . Следовательно,



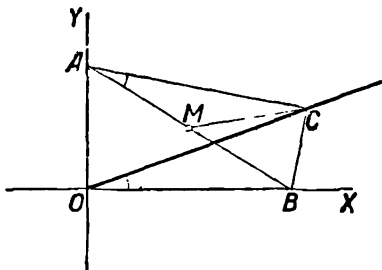
Черт. 364.



Черт. 365.

$\angle COX = \angle CAB$ и $OC \leq AB$. Геометрическое место точек C есть отрезок прямой, равный $2AB$, образующий с OX угол, равный $\angle CAB$, и имеющий точку O своей серединой.

114. Прямые, на которых первая данная окружность отсекает хорды данной длины, касаются одной и той же окружности, концентрической с первой данной окружностью. То же и для второй данной окружности. Задача сводится к построению общей касательной к этим двум новым окружностям.



Черт. 366.

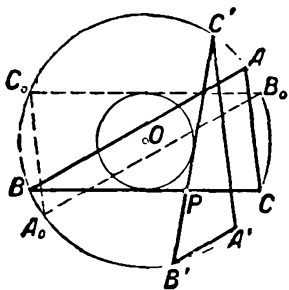
115. 1°. Стороны искомого треугольника ABC , вписанного в данную окружность с центром O , должны быть соответственно параллельны сторонам некоторого данного треугольника $A_0B_0C_0$. В таком случае и углы треугольника ABC будут соответственно равны углам треугольника $A_0B_0C_0$. Следовательно,

центральные углы BOC , COA и AOB будут равны удвоенным углам того же треугольника. Радиус OA' данной окружности, перпендикулярный к стороне BC , будет перпендикулярен и к B_0C_0 .

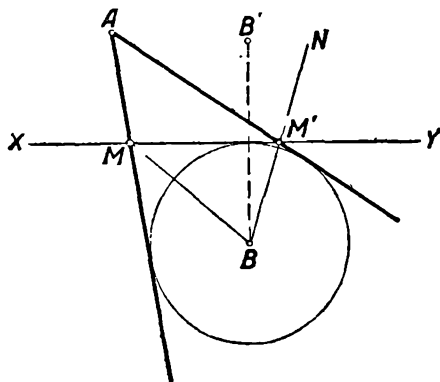
Отсюда вытекает такое построение. Строим радиус OA' , перпендикулярный к B_0C_0 , и углы $\angle A'OB = \angle A'OC$, равные углу $B_0A_0C_0$. Тем самым определяются вершины B и C искомого треугольника. Построение вершины A не представляет затруднений.

Так как радиус OA' , перпендикулярный к B_0C_0 , может иметь два противоположных направления, то задача имеет два решения.

2°. Если стороны AB и AC искомого треугольника ABC (черт. 367) параллельны соответственно двум данным прямым, то сторона BC стягивает дуги, вмещающие углы, соответственно равные углам между двумя данными прямыми. Так как равным (или дополнительным) вписанным углам соответствуют равные хорды, то, проведя через произвольную точку A_0 окружности хорды A_0B_0 и A_0C_0 , параллельные данным прямым, мы получим хорду B_0C_0 , равную искомой стороне BC . Таким образом, через данную точку P остаётся провести хорду, равную B_0C_0 . Для этого строим окружность, concentricкую данной окружности и касающуюся прямой B_0C_0 , и из точки P проводим к этой окружности касательные. Задача имеет самое большее два решения (треугольники ABC и $A'B'C'$ на черт. 367).



Черт. 367.



Черт. 368.

116. Пусть точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой и M — искомая точка (черт. 368). Так как $\angle AMX = 2\angle BMY$, то прямая MB есть биссектриса угла между прямыми XY и AM . Следовательно, существует окружность с центром B , касающаяся обеих прямых XY и AM . Построив эту окружность (её радиус равен расстоянию точки B от данной прямой) и проведя к ней касательную из точки A , получим искомую точку M . Вторая касательная из точки A к той же окружности определяет точку M' , для которой $\angle AM'Y = \angle AM'N + \angle NM'Y = 2\angle BMY$.

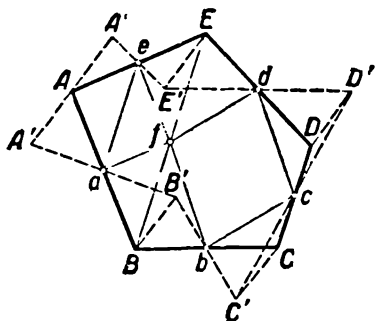
Если бы данные точки A и B' лежали по одну сторону от прямой XY , то мы заменили бы точку B' симметричной ей точкой B и выполнили бы то же самое построение.

117. Первое решение. Пусть $ABCDE$ — искомый пятиугольник (черт. 369) и a, b, c, d, e — середины его сторон. Проводя диагональ BE , разложим искомый пятиугольник на треугольник ABE и четырёхугольник $BCDE$. Середину f диагонали BE можно построить как четвертую вершину параллелограмма (упр. 36), имеющего своими вершинами точки c, d, b и диагональю отрезок db . Треугольник

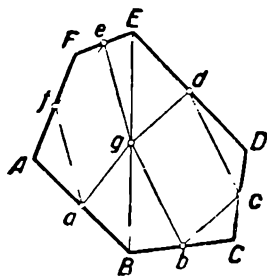
ABE можно теперь построить, проводя через вершины треугольника aef прямые, параллельные его сторонам. Зная вершины B и E , легко построить вершины C и D .

Аналогично решается задача в случае любого нечётного числа сторон (только вместо одного четырёхугольника будем иметь их несколько).

Пусть теперь a, b, c, d, e, f — середины сторон искомого шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 370). Середина g диагонали BE должна быть при этом, во-первых, четвёртой вершиной параллелограмма, имеющего точки b, c, d вершинами и bd диагональю, и, во-вторых, четвёртой вершиной параллелограмма, имеющего точки a, e, f вер-



Черт. 369.



Черт. 370.

шинами и ae диагональю. Однако четвёртые вершины этих двух параллелограммов, вообще говоря, будут различными, так что задача не будет иметь решения. Если же четвёртая вершина параллелограмма, имеющего b, c, d вершинами и bd диагональю, совпадает с четвёртой вершиной параллелограмма, имеющего a, e, f вершинами и ae диагональю, то одну из вершин искомого многоугольника, например A , можно выбрать произвольно. Действительно, возьмём произвольную точку A и построим точки B, F, E так, чтобы $Aa = aB$, $Af = fF$, $Fe = eE$. Серединой четвёртой стороны BE четырёхугольника $BAFE$ будет четвёртая вершина параллелограмма $afeg$ (упр. 36), т. е. точка g . Далее построим точки C и D так, что $Ed = dD$, $Bb = bC$, и убедимся, что серединой четвёртой стороны CD четырёхугольника будет четвёртая вершина c параллелограмма $bgdc$. Таким образом, шестиугольник $ABCDEF$ удовлетворяет поставленному условию.

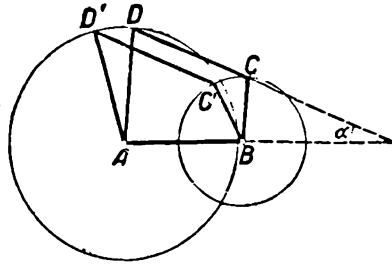
Аналогичное положение вещей имеет место и в случае любого чётного числа сторон (только вместо двух параллелограммов будем иметь их большее число).

Второе решение. Пусть опять требуется построить пятиугольник, серединами сторон которого являются точки a, b, c, d, e (черт. 369). Возьмём произвольную точку A' и построим точку B' ,

симметричную с A' относительно a , точку C' , симметричную с B' относительно b , точку D' , симметричную с C' относительно c , точку E' , симметричную с D' относительно d , и, наконец, точку A'' , симметричную с E' относительно e . Так как в ряду AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , AA'' каждые два последовательных отрезка равны, параллельны и направлены в противоположные стороны, то отрезки AA' и AA'' равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому точка A есть середина отрезка $A'A''$. Зная вершину A , можно построить и остальные вершины.

Точно так же решается задача и в случае любого нечётного числа сторон.

Пусть теперь существует некоторый шестиугольник $ABCDEF$ (черт. 370), имеющий серединами сторон точки a, b, c, d, e, f . Повторяя предыдущее построение, мы получим ряд отрезков AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , FF' , AA'' , в котором каждые два последовательных отрезка равны, параллельны и направлены в противоположные стороны. Отсюда следует, что отрезки AA' и AA'' равны и направлены по одной прямой в одну и ту же сторону, так что точка A' совпадает с точкой A'' и шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ также удовлетворяет поставленному условию. Итак, если существует хотя бы один шестиугольник, удовлетворяющий условиям задачи, то каждая точка плоскости A' может быть принята за вершину искомого шестиугольника, и задача имеет бесчисленное множество решений (которые получаются непосредственно).



Черт. 371.

Следовательно, если при некотором выборе точки A' точка A'' , построенная как указано выше, не совпадает с A' , то задача вообще не имеет решения.

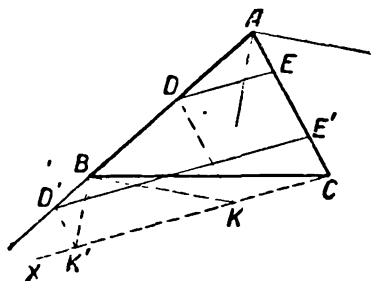
Аналогичное положение имеет место и в случае любого чётного числа сторон.

118. Выполним над одной из непараллельных сторон AB искомой трапеции $ABCD_1$ (черт. 48) поступательное перемещение, определяемое по величине и по направлению отрезком BC ; сторона AB займёт положение D_2C . При этом получим треугольник CD_1D_2 , который легко построить по трём сторонам. Построенный треугольник легко дополнить до искомой трапеции.

Пусть теперь даны стороны искомого четырёхугольника $ABCD$ и угол между продолжениями его сторон AB и CD . В этом случае надо между окружностями с центрами в концах A и B данной стороны AB и радиусами, равными AD и BC (черт. 371), поместить отрезок CD , имеющий данную величину и данное направление, определяемое углом α между AB и DC (упр. 75). Задача имеет самое большее два решения ($ABCD$ и $ABC'D'$ на черт. 371).

119. Пусть DE — искомая прямая (черт. 372), так что $BD = CE$. Выполним над отрезком DE поступательное перемещение, определяемое по величине и по направлению отрезком EC . Отрезок DE займёт при этом положение KC . Тогда $BD = CE = KD$. Прямая BK образует равные углы с прямыми AB и DK или, что то же, с AC . Отсюда легко вывести, что прямая BK параллельна одной из биссектрис угла при A . Приходим к такому построению:

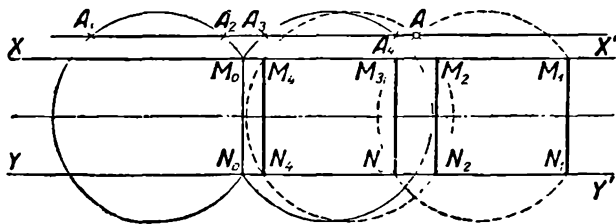
Через точку C проводим прямую CX , имеющую заданное направление. Проведя через точку B прямые, параллельные биссектрисам углов при A , получим точки K и K' ; проведя прямые DK и $D'K'$, параллельные AC , найдём точки D и D' . Через D и D' проводим прямые, параллельные CX .



Черт. 372.

120. Пусть XX' и YY' — данные прямые, A — данная точка (черт. 373). Обозначим через M_0N_0 какой-либо общий перпендикуляр к данным прямым и рассмотрим пару дуг — геометрическое место точек, из которых отрезок M_0N_0 виден под данным углом. Искомый общий перпендикуляр можно получить из M_0N_0 с помощью некото-

рого параллельного перенесения по направлению данных прямых. При этом и точка A получается с помощью того же параллельного перенесения из некоторой точки рассмотренного только что геометрического места. Чтобы определить эту точку (их может оказаться и несколько), достаточно через точку A провести прямую, параллельную данным прямым.



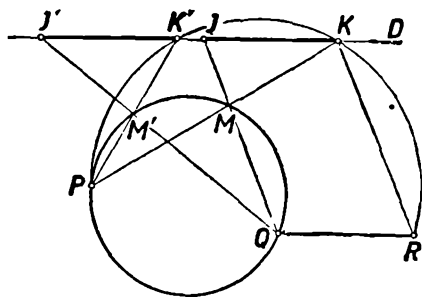
Черт. 373.

Отсюда вытекает такое построение. Строим произвольный перпендикуляр M_0N_0 к данным прямым и две дуги $M_0A_2A_1N_0$ и $M_0A_3A_4N_0$, имеющие своими концами точки M_0 и N_0 и вмещающие данный угол. Через точку A проводим прямую параллельно данным прямым. Искомые общие перпендикуляры M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 , M_4N_4 отстоят от M_0N_0 на расстояниях, соответственно равных AA_1 , AA_2 , AA_3 , AA_4 .

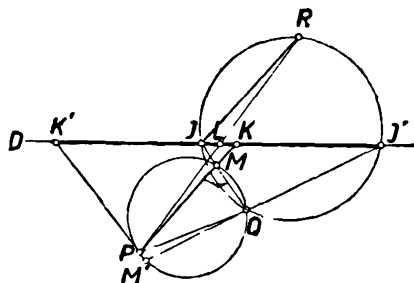
Наибольшее возможное число решений — четыре.

121. Пусть D — данная прямая (черт. 374). Выполняем над точкой Q поступательное перемещение, определяемое отрезком IK (длина и

направление которого известны); получаем точку R . Так как при этом прямая IQ параллельна KR , то $\angle PKR = \angle PMQ$, и точка K лежит на дуге, имеющей своими концами точки P и R и вмещающей угол, равный тому углу, который вмещает данная дуга PMQ . Построив эту дугу (дугу PKR), мы получим точку K , как точку её пересечения с



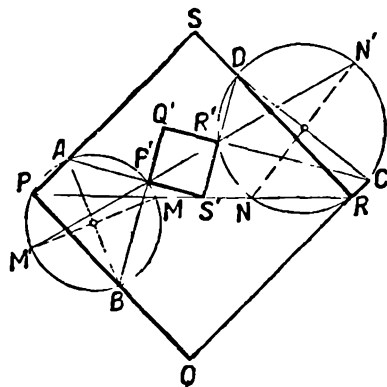
Черт. 374.



Черт. 375.

прямой D . От точки K откладываем на данной прямой отрезок, равный данному. Задача имеет самое большее два решения.

121а. Пусть P и Q — данные точки (черт. 375), D — данная прямая, L — данная середина искомого отрезка IK , M — искомая точка окружности. Строим на продолжении отрезка PL точку R так, что $PL = LR$. Так как треугольники PLK и RLI равны, то $\angle PKL = \angle RIL$, так что прямая RI параллельна PK . Следовательно, угол QIR дополняет угол PMQ до 180° и имеет то же направление. Точка I лежит на дуге, имеющей своими концами точки Q и R и вмещающей угол, дополнительный тому углу, который вмещает данная дуга PMQ ¹⁾. Вторая точка пересечения I' окружности QIR с прямой D определяет второе решение — точку M' .

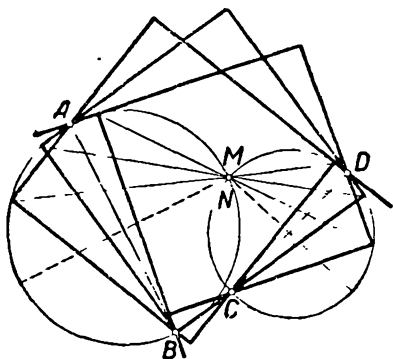


Черт. 376.

122. Пусть последовательные стороны искомого квадрата $PQRS$ (или их продолжения) проходят через данные точки A, B, C, D (черт. 376). Вершина P , в которой пересекаются стороны, проходящие через точки A и B , лежит на окружности, имеющей AB своим диаметром. Точно так же вершина R , в которой пересекаются сто-

¹⁾ Так как углы PMQ и QIR имеют одно и то же направление, то из двух дуг, имеющих своими концами точки Q и R и вмещающих данный угол, приходится выбрать только одну.

роны, проходящие через C и D , лежит на окружности, имеющей CD своим диаметром. Диагональ PR делит пополам углы при P и R , а потому делит пополам одну из дуг AB и одну из дуг CD . Если эта диагональ пересекает первую окружность в точке M , а вторую окружность — в точке N , то дуги AM и CN составляют каждая четверть окружности; эти дуги имеют, как видно из чертежа, одинаковое направление. Таким образом определяется положение точек M и N , а следовательно, и вершин P и R , и квадрат можно построить. Мы получим второе решение, заменяя точки M и N точками M' и N' , им диаметрально противоположными (квадрат $P'Q'R'S'$ на черт. 376).



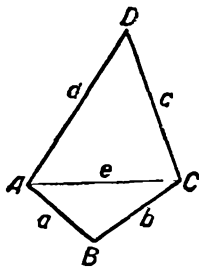
Черт. 377.

Мы предполагали до сих пор, что одна пара противоположных сторон квадрата проходит через точки A и C , другая — через точки B и D . Мы получим ещё два решения, предполагая, что одна пара противоположных сторон проходит через A и D , вторая — че-

рез точки B и C . Можно показать, что диагонали этих квадратов мы получим, соединяя точки M и N' или M' и N (на чертеже эти два квадрата не показаны). Наконец, третью пару решений мы получим, если предположим, что две противоположные стороны квадрата проходят через A и B , две другие — через C и D . Для построения этих двух квадратов пришлось бы воспользоваться уже другими вспомогательными окружностями.

Если в нашем первоначальном построении точка M совпадает с точкой N (черт. 377), то за диагональ можно принять любую прямую, проходящую через точку M , совпавшую с N , и мы будем иметь бесчисленное множество решений. Так как точки A и C при этом лежат на противоположных сторонах искомого квадрата и то же имеет место для точек B и D , то центр искомого квадрата (безразлично, какого именно) лежит в точке пересечения прямых, проходящих через середины отрезков AC и BD и параллельных сторонам квадрата. Отсюда следует, что геометрическим местом центров квадратов является окружность, имеющая середины отрезков AC и BD диаметрально противоположными точками.

123. Пусть $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$ — данные стороны четырёхугольника; $AC=e$ — одна из его диагоналей (черт. 378). Если величина угла при вершине B совершенно произвольна, то диагональ e принимает при изменении угла B все значения, удовлетворяющие



Черт. 378.

условно

$$e_1 \leq e \leq e_2, \quad (1)$$

где

$$e_1 = |a - b|; \quad e_2 = a + b.$$

Чтобы четырёхугольник существовал при всевозможных значениях угла B , необходимо, чтобы треугольник ACD со сторонами c, d, e существовал при всех значениях e , удовлетворяющих неравенствам (1); это же условие и достаточно.

Для существования же треугольника ACD необходимо и достаточно, чтобы

1) $c + d \geq e$ при всех рассматриваемых значениях e , а для этого необходимо и достаточно, чтобы $c + d \geq e_2$, т. е.

$$c + d \geq a + b; \quad (2)$$

2) $|c - d| \leq e$ при всех рассматриваемых значениях e , а для этого необходимо и достаточно, чтобы $|c - d| \leq e_1$, т. е.

$$|c - d| \leq |a - b|. \quad (3)$$

Итак, стороны четырёхугольника должны удовлетворять условиям (2) и (3).

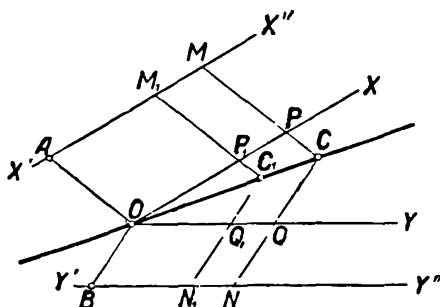
Чтобы и угол D был вполне произвольным, должны, кроме того, выполняться аналогичные условия $a + b \geq c + d$; $|a - b| \leq |c - d|$. Выполнение тех и других неравенств одновременно приводит к соотношениям $a + b = c + d$; $|a - b| = |c - d|$, т. е. либо к $a = c$; $b = d$, либо к $a = d$; $b = c$. В первом случае четырёхугольник будет *паралелелограмом*, во втором — так называемым *ромбом* (ср. задачу 384).

КНИГА ТРЕТЬЯ.

ПОДОБИЕ.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I (стр. 116).

124. Пусть $X'X''$ и $Y'Y''$ — прямые, на которых откладываются отрезки AM и BN (черт. 379); M_1 и N_1 — некоторые определённые продолжения точек M и N . Проводим через точки A и B прямые, соответственно параллельные двум данным прямым; пусть O — точка их

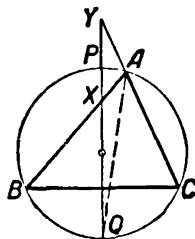


Черт. 379.

пересечения. Проводим прямые OX и OY , соответственно параллельные $X'X''$ и $Y'Y''$. Получим четыре параллелограмма $AOPM$, AOP_1M_1 , $BOQN$ и BOQ_1N_1 . Тогда $AM_1 = OP_1$, $AM = OP$, $BN_1 = OQ_1$, $BN = OQ$. Пусть C_1 — точка пересечения прямых M_1P_1 и N_1Q_1 . Если C — точка пересечения прямой MP с прямой OC_1 , то $OC:OC_1 = OP:OP_1 = OQ:OQ_1$. Следовательно, прямая QC параллельна Q_1C_1

и OB , и потому C есть точка искомого геометрического места. Таким образом, искомое геометрическое место есть прямая OC_1 .

125. Пусть AB и AC — секущие (черт. 380), PQ — диаметр, перпендикулярный к BC , X и Y — точки пересечения прямых AB и AC с PQ . При этом $\widehat{BQ} = \widehat{CQ}$, и потому $\angle BAQ = \angle CAQ$. Таким образом, прямая AQ есть биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника AXY . Следовательно, прямая AP , перпендикулярная к AQ , есть биссектриса угла A того же треугольника, и потому точки P и Q делят гармонически отрезок XY (п. 115, примечание).

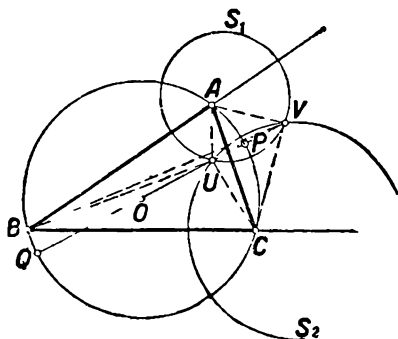


Черт. 380.

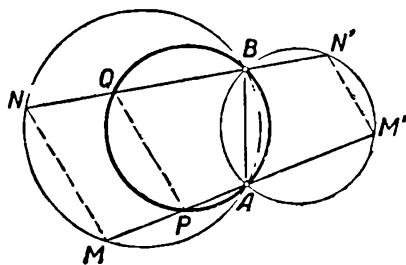
126. Рассмотрим точки M' , для которых $AM':M'B = m' > m$. Если $m > 1$, то точки C' и D' прямой AB , делящие отрезок AB в отношении m' , лежат внутри отрезка CD , где C и D — точки, делящие отрезок AB в отношении m (пп. 109, 110), а следовательно, и геометрическое место точек M' — окружность, имеющая $C'D'$ своим диаметром, лежит внутри окружности, построенной на CD , как на диаметре. Таким образом, все точки M' , для которых $AM':M'B > m > 1$, лежат внутри последней окружности.

Аналогично, если $m < 1$, все такие точки M' лежат вне той же окружности.

127. Пусть требуется найти точку, расстояния которой от вершин A , B и C треугольника ABC (черт. 381) пропорциональны числам l , m и n . Геометрическое место точек, расстояния которых от точек A и B относятся как $l:m$, есть окружность с центром на прямой AB . Точно так же геометрическое место точек, расстояния которых от вершин B и C относятся как $m:n$, есть окружность с центром на прямой BC . Искомыми точками будут общие точки обеих окружностей.



Черт. 381.



Черт. 382.

В зависимости от того, пересекаются ли обе окружности, или касаются одна другой, или вовсе не имеют общих точек, задача имеет два решения, или одно решение, или вовсе не имеет решений (сравнить ещё задачу 368).

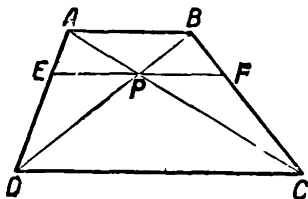
Пусть задача имеет два решения, и U — одна из искомых точек. Рассмотрим точку V , которая вместе с точкой U делит гармонически диаметр QP описанной окружности треугольника, проходящий через точку U . В силу п. 116, следствие, имеем $AU:AV = BU:BV = CU:CV$, так что V есть вторая искомая точка.

128. Пусть $MP:PM' = m$ (черт. 382). Через вторую точку пересечения B окружностей проводим некоторую определённую секущую NN' и определяем на ней точку Q , для которой $NQ:QN' = m$. При этом прямая MN параллельна $M'N'$ (упр. 65), и потому PQ параллельна $M'N'$. Четырёхугольник $ABQP$ можно вписать в окружность, так как он имеет те же углы, что и $ABNM$. Следовательно, точка P при любом положении секущей MM' лежит на одной окружности с тремя неподвижными точками A , B и Q . Так как секущая AM может иметь любое направление, то геометрическим местом точек P будет вся окружность ABQ .

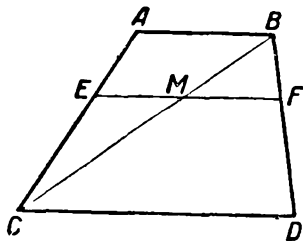
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II (стр. 120).

129. Пусть $ABCD$ — трапеция, P — точка пересечения диагоналей, EF — прямая, проходящая через P и параллельная основаниям (черт. 383). Так как прямая EP параллельна AB , то треугольники ABD и EPD подобны, и, следовательно, $EP:AB = ED:AD$. Точно

так же из подобия треугольников ABC и PFC найдём, что $PF:AB = FC:BC$. Но в силу параллельности прямых AB , CD и EF имеет место пропорциональность отрезков $AD:ED = BC:FC$. Из трёх написанных пропорций вытекает, что $EP:AB = PF:AB$, откуда $EP = PF$.



Черт. 383.



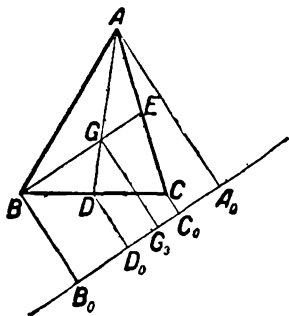
Черт. 384.

130. Пусть EF — прямая, параллельная основаниям трапеции, M — точка её пересечения с диагональю BC (черт. 384). Из подобия треугольников EMC и ABC имеем $EM:AB = EC:AC = n:(m+n)$. Точно так же из подобия треугольников MFB и CDB имеем $MF:CD = BF:BD = m:(m+n)$. Отсюда находим $EF = EM +$

$$MF = \frac{m \cdot CD + n \cdot AB}{m+n}.$$

Если E — середина AC , то $m:n = 1$, и

$$EF = \frac{1}{2} (AB + CD) \text{ (ср. упр. 34).}$$



Черт. 385.

131. Пусть G — точка пересечения медиан AD и BE треугольника ABC (черт. 385); A_0 , B_0 , C_0 , D_0 , G_0 — основания перпендикуляров из точек A , B , C , D , G на данную прямую. Так как $BD = DC$ и $AG:GD = 2:1$, то в силу

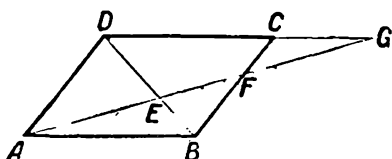
упражнения 130 имеем $DD_0 = \frac{1}{2} (BB_0 +$

$$+ CC_0); GG_0 = \frac{1}{3} (AA_0 + 2DD_0), \text{ откуда } GG_0 = \frac{1}{3} (AA_0 + BB_0 + CC_0).$$

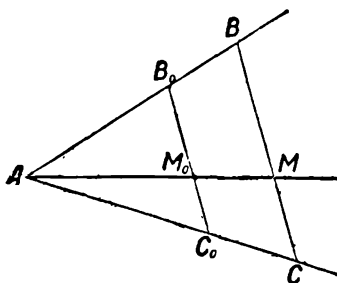
132. Из подобия треугольников BEF и DEA (черт. 386) имеем $EF:AE = BE:DE$; из подобия треугольников AEB и GED имеем $AE:EG = BE:DE$. Отсюда $EF:AE = AE:EG$.

133. Пусть BAC — данный угол (черт. 387); B_0C_0 и BC — две секущие данного направления, M_0 — точка, делящая отрезок B_0C_0 в данном отношении, M — точка пересечения прямых AM_0 и BC . Так как прямые, выходящие из точки A , отсекают на параллельных прямых B_0C_0 и BC пропорциональные отрезки, то $B_0M_0:C_0M_0 = BM:CM$, так что M есть точка искомого геометрического места. Геометрическое место точек M есть прямая AM_0 .

134. Пусть M — одна из точек, из которых окружности O и O' (черт. 388) видны под равными углами AMB и $A'MB'$. Так как касательные, проведённые к окружности из одной точки, образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром окружности (п. 92), то углы AMO и $A'MO'$ равны и, следовательно, прямоугольные треугольники AMO и $A'MO'$ подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $MO:MO' = AO:A'O'$. Следовательно, точка M принадлежит окружности C , представляющей геометрическое место точек, отношение расстояний которых от точек O и O' равно отношению



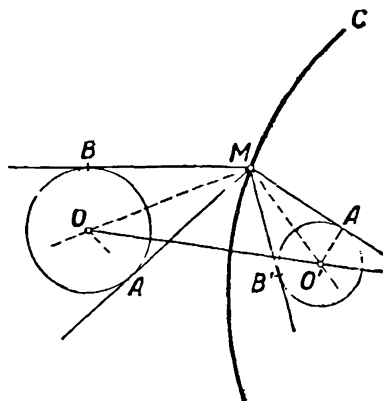
Черт. 386.



Черт. 387.

радиусов данных окружностей (п. 116). Обратно, всякая точка окружности C удовлетворяет поставленному условию, если только она лежит вне обеих данных окружностей. В этом легко убедиться, повторяя те же рассуждения в обратной последовательности.

Пусть две данные окружности радиусов R и R' ($R > R'$) расположены одна вне другой. Для точек окружности C отношение их расстояний от точек O и O' равно $R:R' > 1$. Так как для точек окружности O то же отношение меньше $R:R'$, а для точек окружности O' больше $R:R'$, то (в силу сказанного в решении упр. 126) все точки большей из данных окружностей лежат вне окружности C , а все точки меньшей из данных окружностей — внутри окружности C . Так как данные окружности лежат одна вне другой, то отсюда вытекает, что окружность C лежит вне обеих данных окружностей. Поэтому в этом случае геометрическое место точек M есть окружность C .



Черт. 388.

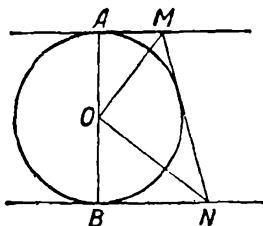
Если две данные окружности пересекаются (или касаются одна другой внешним образом), то окружность C проходит, по своему определению, через точки пересечения данных окружностей (или касается их в общей точке), и геометрическим местом точек M будет часть окружности C , расположенная вне данных окружностей.

Наконец, если данные окружности расположены одна внутри другой (или касаются одна другой внутренним образом), то точек M , очевидно, не существует.

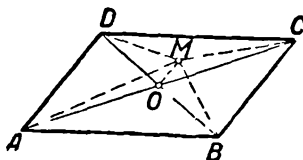
Если данные окружности равны между собой, то окружность C заменяется прямой линией, равноудалённой от точек O и O' .

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III (стр. 127).

135. Пусть AM и BN — параллельные касательные к окружности O (черт. 389), MN — подвижная касательная. Так как прямая OM перпендикулярна к ON (упр. 89), то треугольники OAM и NBO подобны, откуда $AM:OA=OB:BN$ и $AM \cdot BN=OA^2$.



Черт. 389.



Черт. 390.

136. Из подобия треугольников ABD и CBA (черт. 128) имеем $AB:AD=BC:AC$. Отсюда $\frac{1}{AD^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

137. Если AD , BE , CF — медианы треугольника ABC , то (п. 128) $AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{1}{2} (b^2 + c^2) - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} (c^2 + a^2) - \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$.

138. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (черт. 390), O — точка пересечения его диагоналей, M — произвольная точка плоскости. В силу п. 128 имеем: $MA^2 + MC^2 = 2OA^2 + 2OM^2$; $MB^2 + MD^2 = 2OB^2 + 2OM^2$. Отсюда $(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2) = 2(OA^2 - OB^2)$.

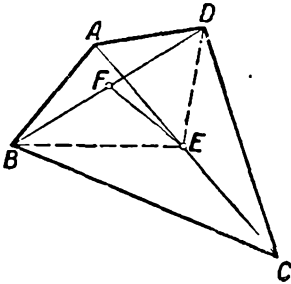
Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC=BD$, и, следовательно, $OA=OB$. Предыдущее равенство принимает вид $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

139. Пусть E и F — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ (черт. 391). Из треугольника BDE имеем $BE^2 + DE^2 = 2BF^2 + 2EF^2$; из треугольников ABC и ACD имеем $AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$; $CD^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$. Складывая и заменяя $BE^2 + DE^2$ найденным выше значением, получаем $AB^2 + BC^2 + CD^2 +$

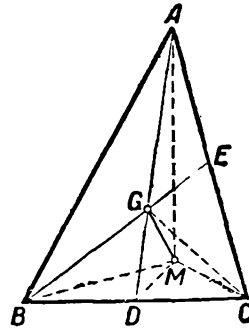
$$+ DA^2 = 2(DE^2 + BE^2) + 4AE^2 = 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

140. Пусть AD — одна из медиан треугольника ABC (черт. 392). Применяя к треугольнику AMD и точке G теорему Стюарта (п. 127), найдём $MA^2 \cdot DG + MD^2 \cdot AG - MG^2 \cdot AD = AD \cdot DG \cdot AG$. Заменяя здесь DG и AG соответственно через $\frac{1}{3}AD$ и $\frac{2}{3}AD$ и сокращая на AD , будем иметь:

$$MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + \frac{2}{3} MD^2 - \frac{2}{9} AD^2. \quad (1)$$



Черт. 391.



Черт. 392.

Применяя теорему п. 128 к треугольникам MBC и GBC , найдём $MD^2 = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2) - \frac{1}{4}BC^2$; $GD^2 = \frac{1}{2}(GB^2 + GC^2) - \frac{1}{4}BC^2$, откуда $MD^2 = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2) - \frac{1}{2}(GB^2 + GC^2) + GD^2$. Подставляя в (1), получим $3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (GB^2 + GC^2) + 2GD^2 - \frac{2}{3}AD^2$. Заменяя здесь $GD = \frac{1}{2}GA$; $AD = \frac{3}{2}GA$, получаем требуемое соотношение.

141. Пусть сумма умноженных на данные положительные числа m и n квадратов расстояний некоторой точки M от данных точек A и B (черт. 393) равняется квадрату данного отрезка k :

$$m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 = k^2. \quad (1)$$

Если точка O делит отрезок AB в отношении, обратном отношению данных коэффициентов, то мы имеем $OB:AO:AB = m:n:(m+n)$. Применяя теорему Стюарта (п. 127) к треугольнику MAB , найдём $MA^2 \cdot OB + MB^2 \cdot AO - MO^2 \cdot AB = AB \cdot OB \cdot AO$, или в силу предыдущего равенства

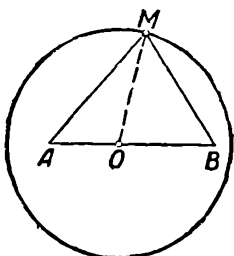
$$MO^2 = \frac{m}{m+n} \cdot MA^2 + \frac{n}{m+n} \cdot MB^2 - \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot AB^2. \quad (2)$$

Так как точка M удовлетворяет условию (1), то отсюда следует, что

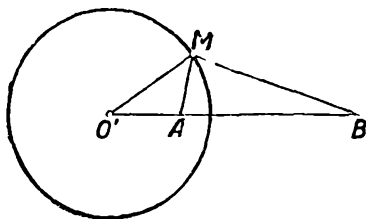
$$OM^2 = \frac{k^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot AB^2 = \text{const.}$$

Геометрическое место точек M существует, если $k^2 > \frac{mn}{m+n} \cdot AB^2$, и представляет собой окружность с центром O .

Пусть теперь при тех же обозначениях, что и выше, $m \cdot MA^2 - n \cdot MB^2 = \pm k^2$, причём $m > n > 0$ (случай $m = n$, очевидно, приводится к п. 128а, следствие). Если точка O' (черт. 394) делит отрезок



Черт. 393.



Черт. 394.

зок AB внешним образом в отношении, обратном отношению коэффициентов m и n , то $O'A:O'B:AB = n:m:(m-n)$. Применяя теперь теорему Стюарта к треугольнику $MO'B$, найдём: $MO'^2 \cdot AB + + MB^2 \cdot O'A - MA^2 \cdot O'B = O'B \cdot O'A \cdot AB$, или в силу предыдущего равенства

$$\begin{aligned} O'M^2 &= \frac{m}{m-n} \cdot MA^2 - \frac{n}{m-n} \cdot MB^2 + \frac{mn}{(m-n)^2} \cdot AB^2 = \\ &= \frac{mn}{(m-n)^2} \cdot AB^2 \pm \frac{k^2}{m-n} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3)$$

Геометрическое место существует, если $\frac{mn}{m-n} \cdot AB^2 \pm k^2 > 0$, и представляет собой окружность с центром O' .

При $k=0$ получаем геометрическое место точек, для которых $m \cdot MA^2 - n \cdot MB^2 = 0$, т. е. $MA:MB = \sqrt{n}:\sqrt{m}$. Таким образом получается геометрическое место, рассмотренное в п. 116.

142. Пусть $m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 + p \cdot MC^2 = k^2$, где A, B, C — данные точки, m, n, p — данные положительные или отрицательные числа, k — данный отрезок, M — точка искомого геометрического места. Пусть обозначения точек A, B, C выбраны так, что $m+n \neq 0$. В силу равенств (2) и (3) решения упражнения 141 имеем $m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 = (m+n) \cdot DM^2 + \frac{mn}{m+n} \cdot AB^2$, где D — точка, делящая отрезок AB (внутренним или внешним образом в зависимости от знаков m и n)

в отношении $|n|:|m|$. Предыдущее равенство принимает вид $(m+n) \cdot MD^2 + p \cdot MC^2 = k^2 - \frac{mn}{m+n} \cdot AB^2 = \text{const.}$ В силу упражнения 141 геометрическое место точек M (если оно существует) при $m+n+p \neq 0$ есть окружность; в силу п. 128а, следствие, искомое геометрическое место есть прямая при $m+n+p=0$.

Аналогичные рассуждения применимы в случае любого числа данных точек.

143. Выражение для квадрата длины биссектрисы $AD^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$, приведённое в п. 129, можно представить так: $AD^2 =$

$= bc - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} = bc - BD \cdot CD$. Аналогично для биссектрисы внешнего угла имеем теорему: *Квадрат биссектрисы внешнего угла треугольника равен произведению отрезков противоположающей стороны, считая от её концов до точки пересечения с биссектрисой, уменьшенному на произведение сторон, образующих этот угол.*

Действительно, выражение $AE^2 = bc \cdot \frac{a^2 - (c-b)^2}{(c-b)^2}$, приведённое в п. 129,

можно представить так: $AE^2 = \frac{ac}{c-b} \cdot \frac{ab}{c-b} - bc = BE \cdot CE - bc$.

144. Преобразуем выражение для квадрата медианы, данное в п. 128, следующим образом: $AD^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2 - \frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(b-c+a)(b-c-a)$. Так как $a+b-c > 0$ и $b-c-a < 0$, то полученное значение AD^2 меньше $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ и медиана меньше $\frac{b+c}{2}$. С другой стороны, $b^2 + c^2 > 2bc$, и выражение для квадрата медианы можно преобразовать так:

$AD^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 > \frac{1}{4}(b^2 + c^2) + \frac{1}{4} \cdot 2bc - \frac{1}{4}a^2 =$

$= \frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}(b+c+a) \cdot (b+c-a)$, или

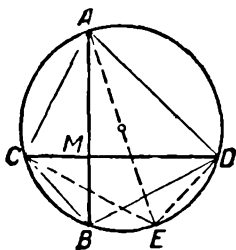
$AD^2 > \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}$. Так как $AD < \frac{b+c}{2} < \frac{a+b+c}{2}$, то

из полученного неравенства следует, что $AD > \frac{1}{2}(b+c-a)$.

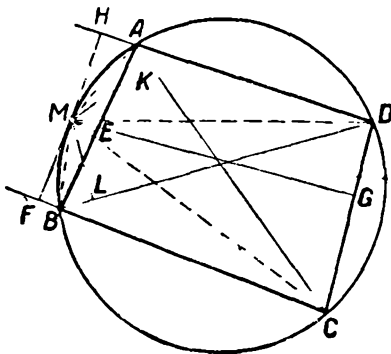
Чтобы доказать, что биссектриса меньше медианы, если $b \neq c$, заметим, что из только что данного выражения $\frac{1}{4}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2 - \frac{1}{4}a^2$ для квадрата медианы видно, что при $b \neq c$ квадрат

медианы больше, чем $\frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}a^2$. Далее, так как при $b \neq c$ имеет место неравенство $4bc < (b+c)^2$ или $\frac{bc}{(b+c)^2} < \frac{1}{4}$, то из выражения, данного в п. 129, следует, что квадрат биссектрисы меньше, чем $\frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}a^2$. Отсюда и следует, что при $b \neq c$ биссектриса меньше, чем медиана.

145. Если медиана AD треугольника ABC есть среднее пропорциональное между сторонами b и c , то $AD^2 = bc$, или $\frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 = bc$, откуда $2(b-c)^2 = a^2$, так что $a = |b-c| \cdot \sqrt{2}$. Таким образом, сторона a треугольника равна диагонали квадрата со стороной $|b-c|$, так как диагональ квадрата равна его стороне, умноженной на $\sqrt{2}$.



Черт. 395.



Черт. 396.

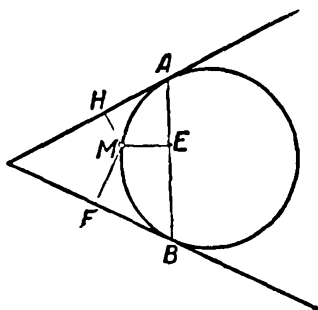
146. Пусть через точку M проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD и E — точка, диаметрально противоположная точке A (черт. 395). Так как $\frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 90^\circ$ (п. 75) и $\widehat{AC} + \widehat{CE} = 180^\circ$, то $\widehat{BD} = \widehat{CE}$ и, следовательно, $BD = CE$. Отсюда $AC^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 = AE^2$. Аналогично найдём, что $AD^2 + BC^2 = AD^2 + DE^2 = AE^2$.

147. Пусть E, F, G, H, K, L — основания перпендикуляров, опущенных из точки M окружности радиуса R на стороны и диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ (черт. 396). Применяя теорему п. 130а о радиусе описанной окружности к треугольникам $MAB, MCD, MBC, MDA, MAC, MBD$, получим: $MA \cdot MB = 2R \cdot ME$; $MC \cdot MD = 2R \cdot MG$; $MB \cdot MC = 2R \cdot MF$; $MD \cdot MA = 2R \cdot MH$; $MA \cdot MC = 2R \cdot MK$; $MB \cdot MD = 2R \cdot ML$, откуда $MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD = 4R^2 \cdot ME \cdot MG = 4R^2 \cdot MF \cdot MH = 4R^2 \cdot MK \cdot ML$, так что $ME \cdot MG = MF \cdot MH = MK \cdot ML$.

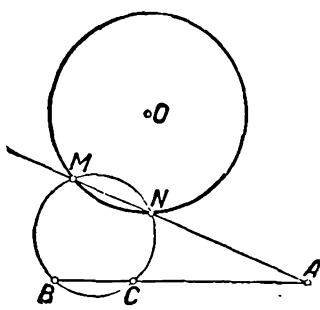
Если стороны AD и BC обращаются в касательные, то мы получаем такую теорему: *Расстояние от точки окружности до хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями той же точки от касательных в концах хорды* (черт. 397). Действительно, четырёхугольник $ABCD$ обращается в дважды взятую хорду AB , точки E и G совпадают и предыдущие равенства дают: $ME^2 = MF \cdot MN$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV (стр. 132).

148. Пусть O — данная окружность (черт. 398), C — вторая точка пересечения прямой AB с окружностью BMN . При этом $AB \cdot AC = AM \cdot AN$ есть степень точки A относительно O , так что положение точки C не зависит от выбора окружности BMN .



Черт. 397.



Черт. 398.

149. Пусть требуется найти геометрическое место точек M , отношение степеней которых относительно двух данных окружностей $O_1(R_1)$ и $O_2(R_2)$ равно m . В силу п. 134 мы должны иметь

$$\frac{MO_1^2 - R_1^2}{MO_2^2 - R_2^2} = m, \quad (1)$$

или $MO_1^2 - m \cdot MO_2^2 = R_1^2 - mR_2^2$. На основании упражнения 141 геометрическое место точек M (если такие точки вообще существуют) есть окружность. Центр O этой окружности лежит на прямой O_1O_2 и делит отрезок O_1O_2 в отношении m , т. е.

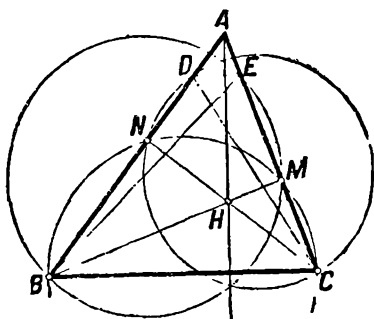
$$\frac{O_1O}{O_2O} = m. \quad (2)$$

Так как степень точки M относительно окружности O равна нулю, то расстояние точки M от радикальной оси окружностей O_1 и O равно (п. 136, примечание 3°) $\frac{MO_1^2 - R_1^2}{2O_1O}$; расстояние точки M от радикальной оси окружностей O_2 и O равно $\frac{MO_2^2 - R_2^2}{2O_2O}$. Так как оба

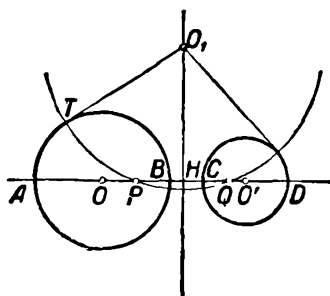
эти расстояния любой точки M окружности O от обеих радикальных осей равны между собою в силу соотношений (1) и (2), то все три окружности имеют общую радикальную ось.

Если в условии упражнения 128 точка P делит отрезок MM' в постоянном отношении $PM:PM'=m$, то отношение степеней точки P относительно обеих окружностей равно $\frac{PM \cdot PA}{PM' \cdot PA} = m$, и геометрическое место точек P есть окружность.

150. Линия центров обеих окружностей соединяет середины диагоналей трапеции $BCED$ (черт. 399) и потому параллельна BC (упр. 34). Следовательно, радикальная ось этих окружностей перпендикулярна к



Черт. 399.



Черт. 400.

BC . С другой стороны, окружности, имеющие BE и CD своими диаметрами, проходят соответственно через основания M и N высот BM и CN треугольника. Далее, точки B, C, M и N лежат на одной окружности, имеющей BC своим диаметром. Радикальные оси всех трёх окружностей, взятых попарно, проходят через одну точку; но две из радикальных осей — высоты BM и CN треугольника (п. 137). Следовательно, третья радикальная ось проходит через точку пересечения H высот треугольника. Так как она перпендикулярна к BC , то она совпадает с высотой треугольника.

151. Если бы окружности $DD'EE'$, $EE'FF'$, $FF'DD'$ были различны, то прямые AB, AC, BC были бы их радикальными осями, что невозможно, так как (п. 139) радикальные оси трёх окружностей, взятых попарно, не могут образовать треугольника. Следовательно, по крайней мере две из трёх окружностей совпадают, но в таком случае все шесть данных точек лежат на одной окружности.

152. Пусть окружность O_1 радиуса O_1T , ортогональная к окружностям O и O' (черт. 400), пересекает прямую OO' в точках P и Q . Тогда $O_1P^2 = O_1T^2$ есть степень точки O_1 относительно каждой из окружностей O и O' . Следовательно, радикальная ось O_1H (п. 138) данных окружностей есть в то же время радикальная ось точки P и каждой из данных окружностей (п. 136, примечание 1°). Таким обра-

зом, точка P обладает тем свойством, что HP^2 есть степень точки H относительно O или O' : Отсюда следует, что положение точки P не зависит от выбора окружности O_1 (и то же относится к точке Q) и что степень точки H относительно O или O' есть положительное число, так что *данные окружности не пересекаются*.

153. Пусть через точки A и B проведена произвольная окружность (черт. 401) и через точки C и D — какая-либо окружность, пересекающая первую. Точка пересечения M радикальной оси этих окружностей с прямой AB удовлетворяет условию

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD, \quad (1)$$

и так как геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно обеих окружностей, есть прямая линия, то на прямой AB существует единственная точка M , удовлетворяющая соотношению (1).

Если теперь провести через данные точки другую пару окружностей, то их радикальная ось пересечёт прямую AB в некоторой точке, удовлетворяющей тому же самому соотношению (1) и, следовательно, совпадающей с M .

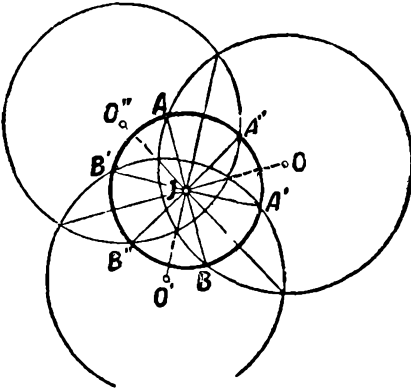
Итак, положение точки M не зависит от выбора окружности, проходящей через точки A и B , и окружности, проходящей через точки C и D , и прямая, соединяющая общие точки каждой такой пары окружностей, проходит через M .

154. Степень точки I , внутренней относительно окружности O радиуса r , относительно этой окружности равна $OI^2 - r^2 =$

$$= -(r^2 - OI^2) = -\frac{1}{4} AB^2, \quad \text{где}$$

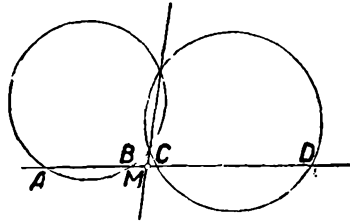
AB — хорда окружности O , проходящая через точку I и перпендикулярная к диаметру OI .

Так как радикальный центр I трёх данных окружностей O, O', O'' (черт. 402) имеет одну и ту же степень относительно этих окружностей, то хорды $AB, A'B', A''B''$



Черт. 402.

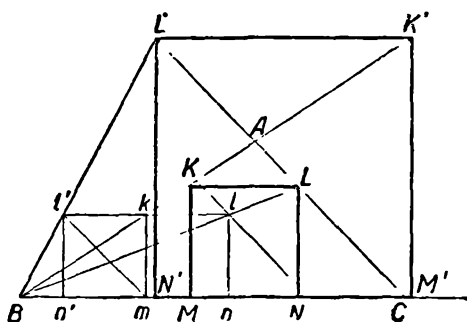
трёх окружностей, проходящие через I и соответственно перпендикулярные к $OI, O'I, O''I$, равны между собой и служат диаметрами одной окружности с центром I (так как в точке I все три хорды делятся пополам).



Черт. 401.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V (стр. 142).

155. Пусть две вершины K и L искомого квадрата $KLNM$ (черт. 403) лежат соответственно на сторонах AB и AC данного треугольника ABC (или их продолжениях), а две другие — на стороне BC (или её продолжении). Рассмотрим квадрат, гомотетичный искомому, принимая



Черт. 403.

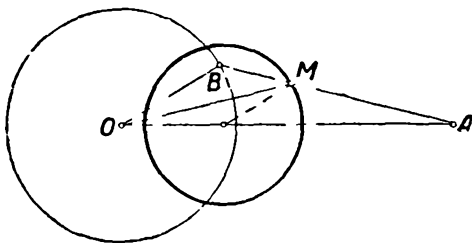
за центр подобия вершину B и за точку, гомотетичную точке K , произвольную точку k прямой AB . Этот квадрат имеет своей стороной перпендикуляр km из точки k на сторону BC и потому занимает одно из двух возможных положений $klnm$ или $kl'n'm'$. Вершины L и L' искомого квадрата $KLNM$ и $K'LN'M'$ лежат в пересечении прямых Bk и Bk' с прямой AC .

Из сказанного вытекает такое построение. Из произвольной точки k стороны AB опускаем перпендикуляр km на основание BC треугольника и строим квадраты $klnm$ и $kln'n'$. Точки пересечения прямых Bk и Bk' с прямой AC определяют вершины L и L' искомого квадрата.

Если ни одна из двух прямых Bk и Bk' не параллельна AC , то задача будет иметь два решения, если же одна из них параллельна AC , то только одно. При этом мы допускаем (как это часто делается для общности рассуждений) «вписанные» квадраты, вершины которых могут лежать не только на самих сторонах треугольника, но и на их продолжениях. Если же рассматривать только квадраты, вершины которых лежат на самих сторонах треугольника (а не на их продолжениях), то задача будет иметь одно решение, если ни один из углов B и C не тупой, и не будет иметь решения, если один из них тупой.

Аналогично можно построить квадраты, у которых две вершины лежат на прямой AB или на прямой AC и по одной вершине — на двух других сторонах.

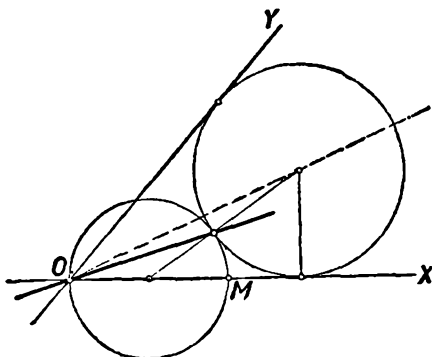
156. Так как OM есть биссектриса угла O треугольника OAB (черт. 404), то $AM:MB=OA:OB$, и, следовательно, $AM:AB=OA:(OA+OB)=\text{const}$. Геометрическое место точек M есть окружность, гомотетичная данной относительно точки A .



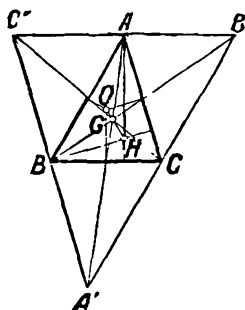
Черт. 404.

157. При изменении положения точки M вся фигура (черт. 405) остаётся подобной самой себе (относительно центра подобия O), и, следовательно, точка касания перемещается по прямой, проходящей через O .

158. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 406), G — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот, O — центр описан-



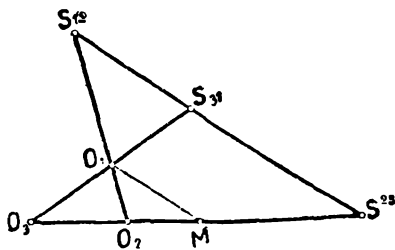
Черт. 405.



Черт. 406.

ной окружности, $A'B'C'$ — треугольник, стороны которого $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ проходят соответственно через A , B , C и параллельны сторонам BC , AC , AB данного треугольника. Треугольники ABC и $A'B'C'$ гомотетичны, так как отрезки $A'B'$ и $A'C'$ соответственно параллельны отрезкам AB и AC , направлены в противоположную сторону и вдвое больше каждого из них (п. 142).

Прямые AA' , BB' , CC' — медианы треугольника ABC , так как четырёхугольники $ABA'C$, $BCB'A$ и $CAC'B$ — параллелограммы и, следовательно, центром подобия служит точка G . Центр O окружности, описанной около треугольника ABC , и центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$ (т. е. точка пересечения H высот данного треугольника ABC), представляют собой две гомотетичные точки. Следовательно, прямая OH про-



Черт. 407.

ходит через точку G и отрезок OH делится в точке G в отношении 1:2.

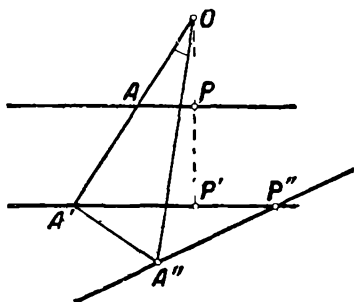
159. Пусть O_1 — произвольная точка первой фигуры (черт. 407), O_2 и O_3 — соответствующие ей точки второй и третьей фигур; S_{23} , S_{31} , S_{12} — центры подобия трёх фигур, взятых попарно. Обозначим через k — коэффициент подобия первой и второй фигур: $k = S_{12}O_1 : S_{12}O_2$, и аналогично положим $k' = S_{31}O_1 : S_{31}O_3$. Проведём через O_1 прямую, параллельную $S_{12}S_{23}$, и пусть M — точка её пересечения с прямой

O_2O_3 . Из подобия двух пар треугольников $O_3S_{23}S_{31}$ и O_3MO_1 , $O_2S_{23}S_{12}$ и O_2MO_1 имеем: $S_{23}S_{31}:MO_1 = S_{31}O_3:O_1O_3 = S_{31}O_3:(S_{31}O_3 - S_{31}O_1)$; $S_{23}S_{12}:MO_1 = S_{12}O_2:O_1O_2 = S_{12}O_2:(S_{12}O_2 - S_{12}O_1)$. Отсюда

$$\frac{S_{23}S_{31}}{S_{23}S_{12}} = \frac{S_{31}O_3 \cdot (S_{12}O_2 - S_{12}O_1)}{S_{12}O_2 \cdot (S_{31}O_3 - S_{31}O_1)} = \frac{1-k}{1-k'}.$$

Примечание. Доказательство принимает вполне общий характер, если рассматривать знаки отрезков (пп. 185—191) и в соответствии с этим приписать коэффициентам подобия определённые знаки. При этом проще всего применить к треугольнику $O_1S_{12}S_{31}$ и прямой O_2O_3 теорему п. 192.

160. Пусть P и P' — основания перпендикуляров из точки O на данные параллельные прямые (черт. 408). Из равенств $OA':OA = OP':OP$ и $OA = A'A'$ следует, что $OA':A'A' = OP':OP$. Треугольник $OA'A'$ имеет прямой угол при вершине A' и постоянное отношение катетов; следовательно, он остаётся подобным самому себе. Таким образом, угол $A'OA''$ и отношение $OA'':OA'$ остаются постоянными и точка A'' описывает фигуру (п. 150, первая теорема), подобную той, которую описывает точка A' , т. е. прямую линию.



Черт. 408.

Эту прямую линию можно проще всего найти, построив два каких-либо положения точки A'' (на чертеже построена ещё точка P'' , соответствующая тому случаю, когда точка A' совпадает с P).

Так как отрезок $A'A''$, равный OA , можно отложить на прямой, проходящей через A' и перпендикулярной к OA' , в обе стороны, то искомое геометрическое место состоит из двух прямых линий (вторая прямая на чертеже не показана).

Так как отрезок $A'A''$, равный OA , можно отложить на прямой, проходящей через A' и перпендикулярной к OA' , в обе стороны, то искомое геометрическое место состоит из двух прямых линий (вторая прямая на чертеже не показана).

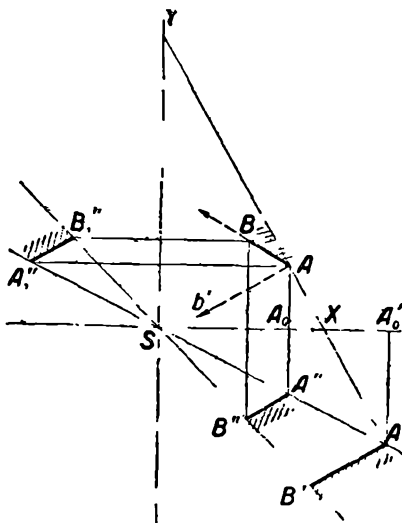
161. Пусть AB и $A'B'$ — два соответственных отрезка фигур F и F' (черт. 409) и $A''B''$ — соответствующий им отрезок искомой фигуры F'' , прямо-гомотетичной фигуре F' . Направление оси симметрии фигур F и F'' совпадает с направлением биссектрисы угла, стороны которого параллельны отрезкам AB и $A'B'$ и направлены в ту же сторону (угол BAb' на чертеже). Центр гомотетии S фигур F' и F'' лежит, по условию, на оси симметрии SX . Если A_0, A'_0 — проекции точек A, A' на ось симметрии, то мы должны иметь: $A_0A'':A'_0A' = SA'':SA' = A''B'':A'B' = AB:A'B'$ и, кроме того, $AA_0 = A'A'_0$, так что $AA_0:A'_0A' = AB:A'B'$. Заменяя $AA_0:A'_0A'$ равным ему отношением $AX:X'A'$ (где X — точка пересечения оси симметрии с прямой AA'), мы видим, что искомая ось симметрии, параллельная биссектрисе угла между направлениями каких-либо двух соответственных отрезков фигур F и F' , должна делить расстояние между какими-либо двумя со-

ответственными точками обеих фигур внутренним образом в отношении, равном отношению соответственных отрезков. Эти условия вполне определяют искомую ось симметрии.

Вторая искомая фигура F_1'' симметрична фигуре F'' относительно точки S . Соответствующая ось симметрии SY параллельна другой биссектрисе угла между AB и $A'B'$ и делит отрезок AA' внешним образом в том же отношении, что и ось SX ; центром подобия фигур F' и F'' будет опять точка S .

Рассуждения теряют силу, если фигуры F и F' равны (сравнить упр. 95).

162. Пусть A, B, C, \dots — точки фигуры F ; A', B', C', \dots — соответственные им точки фигуры F' ; O — точка фигуры F , совпадающая с соответственной точкой фигуры F' (п. 150). При этом $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \dots$, и $OA:OA' = OB:OB' = OC:OC' = \dots$. Следовательно, треугольники AOA' , BOB' , COC' , ... подобны (сравнить п. 150). Если на отрезках AA' , BB' , CC' , ... построить треугольники $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, ..., подобные треугольнику T и имеющие с ним одинаковое направление вращения (причём стороны AA' , BB' , CC' , ... соответствуют одной и той же стороне треугольника T), то, четырёхугольники $OAA'A''$, $OBV'B''$, $OCC'C''$, ... будут подобны (п. 149). Поэтому и треугольники OAA'' , OBV'' , OCC'' , ... будут подобны. Отсюда следует, что точки A'' , B'' , C'' , ... образуют фигуру, подобную двум данным (п. 150, первая теорема).



Черт. 409.

Аналогичное рассуждение применимо и к случаю, когда точки A'' , B'' , C'' , ... делят отрезки AA' , BB' , CC' , ... в одном и том же отношении. Только вместо подобных четырёхугольников $OAA'A''$, $OBV'B''$, $OCC'C''$, ... будем иметь ряд подобных треугольников OAA' , OBV' , OCC' , ... и соответственные точки A'' , B'' , C'' , ... на их сторонах.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI (стр. 152).

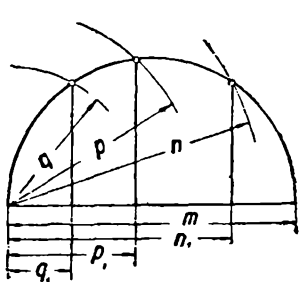
163. Пусть требуется построить отрезок x , отношение которого к данному отрезку a равняется отношению квадратов двух данных отрезков m и n (пусть для определённости $m > n$).

Первое построение. Примем отрезки m и n за катеты прямоугольного треугольника. Проекция m_1 и n_1 катетов m и n на гипотенузу удовлетворяют условиям $m_1c = m^2$; $n_1c = n^2$, где c — гипотенуза

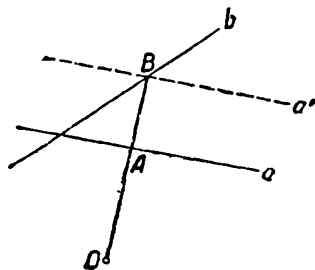
треугольника. Отсюда $m_1:n_1 = m^2:n^2$. Отрезок x есть четвёртый пропорциональный к трём данным отрезкам: $x:a = m_1:n_1$ (п. 151, построение 2).

Второе построение. Примем отрезок m за гипотенузу, а отрезок n за катет прямоугольного треугольника. Проекция n_1 катета n на гипотенузу удовлетворяет условию $mn_1 = n^2$, или $m:n_1 = m^2:n^2$. Отрезок x есть четвёртый пропорциональный к трём данным отрезкам: $x:a = m:n_1$ (п. 151, построение 2).

Примечание. Второе построение имеет то преимущество, что оно легко обобщается на случай, когда требуется построить несколько отрезков, пропорциональных квадратам данных отрезков. Пусть даны хотя бы



Черт. 410.



Черт. 411.

четыре отрезка m, n, p, q и требуется построить отрезки, пропорциональные их квадратам (для определённости примем m за наибольший из данных отрезков).

На отрезке m как на диаметре строим полуокружность (черт. 410). Из одного конца этого отрезка засекаем дуги радиусами, соответственно равными n, p и q , и из точек пересечения этих дуг с полуокружностью опускаем перпендикуляры на диаметр. Полученные отрезки удовлетворяют соотношениям $mn_1 = n^2$, $mp_1 = p^2$, $mq_1 = q^2$, откуда $m:n_1:p_1:q_1 = m^2:n^2:p^2:q^2$.

164. Пусть требуется построить отрезок x , отношение квадрата которого к квадрату данного отрезка a равняется отношению двух данных отрезков m и n , так что $x^2:a^2 = m^2:n^2$, или $x:a = \sqrt{m}:\sqrt{n}$ (пусть для определённости $m > n$).

Первое построение. Примем отрезки m и n за проекции катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу. Для построения вершины прямого угла строим на сумме данных отрезков как на диаметре полуокружность. Катеты m_1 и n_1 удовлетворяют условиям $m_1^2 = mc$, $n_1^2 = nc$, где c — гипотенуза треугольника. Отсюда $m_1:n_1 = \sqrt{m}:\sqrt{n}$. Отрезок x есть четвёртый пропорциональный к трём данным отрезкам: $x:a = m_1:n_1$ (п. 151, построение 2).

Второе построение. Примем отрезок m за гипотенузу, а отрезок n за проекцию катета на гипотенузу. Вершина прямого угла лежит на полуокружности, построенной на отрезке m как на диаметре. Катет n_1 , имеющий n своей проекцией, удовлетворяет условию

$mn = n_1^2$, или $m:n_1 = \sqrt{m}:\sqrt{n}$. Отрезок x есть четвёртый пропорциональный к трём данным отрезкам: $x:a = m:n_1$.

Примечание. Второе построение имеет то преимущество, что оно легко обобщается на случай, когда требуется построить несколько отрезков, квадраты которых пропорциональны данным отрезкам. Построение выполняется в порядке, обратном по отношению к тому, который описан в примечании к решению упражнения 163 (черт. 410). При этом m, n_1, p_1, q_1 — данные отрезки, а n, p, q — искомые.

165. Пусть через точку O (черт. 411) требуется провести прямую OAB так, чтобы отрезок AB этой прямой, заключённый между двумя данными прямыми (или окружностями) a и b , делился в точке O внешним или внутренним образом в данном отношении.

Строим прямую (окружность) a' , гомотетичную прямой (окружности) a , принимая за центр подобия точку O и за коэффициент подобия данное отношение. Гомотетия должна быть прямой или обратной, смотря по тому, делит ли точка O отрезок AB внешним или внутренним образом. Искомая прямая проходит, очевидно, через точку пересечения B прямых (окружностей) a' и b .

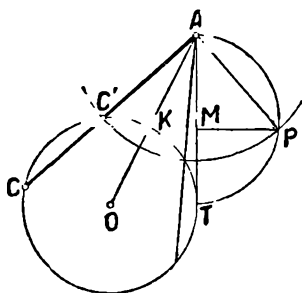
Если даны две пересекающиеся прямые линии a и b , то получается одно решение для того случая, когда точка O делит отрезок AB внешним образом, и одно решение для случая, когда точка O делит отрезок внутренним образом. Если даны две параллельные прямые, то задача либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесчисленное множество.

Если даны две окружности a и b , то наибольшее возможное число решений для каждого из двух случаев (деление внешним образом и деление внутренним образом) равно двум.

166. При решении задачи следует различать два случая.

Первый случай. Пусть хорда CC' (черт. 412) есть средняя пропорциональная между всей секущей AC и её внешней частью AC' , так что $CC'^2 = AC \cdot AC'$. Проводя из точки A касательную AT , будем иметь $AT^2 = AC \cdot AC'$. Из этих двух равенств получаем $CC' = AT$. Так как все хорды данной окружности, равные данному отрезку AT (точнее говоря, отрезку AT , который мы умеем построить), касаются одной и той же окружности, концентрической с данной, то задача сводится к проведению из точки A касательной к этой концентрической окружности.

Задача не имеет решений, если AT больше диаметра, имеет одно решение, если AT равно диаметру, и два решения, если AT меньше диаметра. Если O — центр данной окружности, R — её радиус, то условие возможности задачи $AT \leq 2R$ даёт $AT^2 = AO^2 - R^2 \leq 4R^2$, или $AO \leq R\sqrt{5}$.

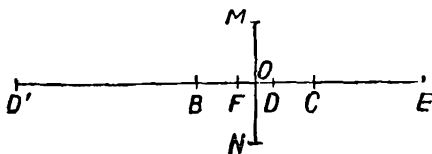


Черт. 412.

169. Пусть ABC — искомый треугольник (черт. 120), в котором известны стороны AB , AC и биссектриса AD , и E — точка пересечения прямой AB с прямой, параллельной AD и проходящей через C . Так как $AC = AE$, то отрезок CE можно построить как четвертый пропорциональный к трём данным, пользуясь пропорцией $CE:AD = (AB + AC):AB$. Далее можно построить равнобедренный треугольник ACE по его сторонам и на продолжении стороны AE отложить данную сторону AB .

170. Пусть произведение двух сторон треугольника равно произведению двух данных отрезков. Частное от деления произведения этих двух сторон на удвоенную высоту, опущенную на третью сторону, равно радиусу описанной окружности. Следовательно, этот радиус можно построить как четвертый пропорциональный к трём данным отрезкам. Построив окружность, имеющую найденный радиус, и проведя в ней хорду, равную данной стороне, мы определим положение третьей вершины, проводя прямые, параллельные этой стороне и отстоящие от неё на расстоянии, равном высоте.

171. Пусть даны углы треугольника и его периметр. Построим вспомогательный треугольник, имеющий данные углы, выбрав произвольно одну из его сторон. Так как построенный треугольник подобен искомому, то их периметры пропорциональны соответственным сторонам. Сторону искомого треугольника можно построить как отрезок, четвертый пропорциональный к соответствующей ей стороне вспомогательного треугольника и к периметрам обоих треугольников.



Черт. 114.

Так как в подобных треугольниках суммы медиан, суммы высот и т. д. пропорциональны соответственным сторонам, то описанный способ построения применим и тогда, когда даны углы и сумма медиан или углы и сумма высот и т. д.

172. Так как стороны двух квадратов пропорциональны их диагоналям, а следовательно, и разностям между диагоналями и сторонами, то сторона искомого квадрата есть отрезок, четвертый пропорциональный к разности между его диагональю и стороной, к стороне произвольного квадрата и разности между диагональю и стороной последнего.

173. Если точка D делит отрезок BC (черт. 166) в среднем и крайнем отношении, то $BC:BD = BD:CD$. С другой стороны, если точка D' делит отрезок BC внешним образом в среднем и крайнем отношении, то $BD' = BC + BD$ (п. 156). Из этих двух соотношений вытекает (п. 156), что $BC:BD = BD:CD = BD':BC = CD':BD'$.

Из пропорции $BD:CD = BD':BC$ мы найдём, что $BD':BD = BC:CD = CD':BC$. Отсюда $BD':BD = (CD' + BC):(BC + CD)$. Если на продолжении отрезка BC за точку C отложить отрезок CE (черт. 414), равный BC , то $CD' + BC = ED'$, $BC + CD = ED$, и пре-

дыдущая пропорция принимает вид: $BD':BD=ED':ED$. Таким образом, E есть точка, гармонически сопряжённая с точкой B относительно концов отрезка DD' .

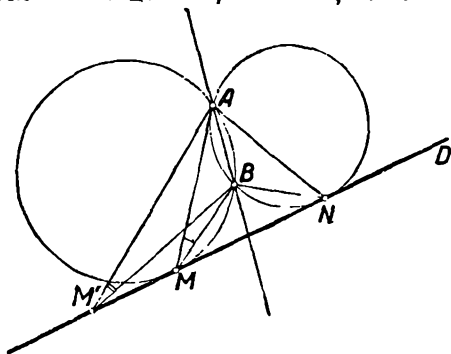
Далее из равенства $CD':BD'=BD:CD$, которое мы имели выше, следует, что $CD':BD'=CF:BF$, если F — точка, симметричная с точкой D относительно середины O отрезка BC (так как $BD=CF$; $CD=BF$). Таким образом, F есть точка, гармонически сопряжённая с точкой D' относительно концов отрезка BC .

Наконец, так как точки F и D' гармонически сопряжены относительно концов отрезка BC , т. е. $CD':BD'=CF:BF$, то для середины O отрезка BC имеем

$$(OC+OD'):(OD'-OB)= \\ = (OC+OF):(OB-OF),$$

откуда в силу $OB=OC$ найдём $OB^2=OC^2=OF \cdot OD' = OD \cdot OD'$ (сравнить п. 189).

Так как отрезок $OB=OC$ есть среднее пропорциональное между OD и OD' , то окружность, построенная на DD' как на диаметре (на чертеже не показана), отсекает на перпендикуляре к прямой DD' , восстановленном



Черт. 415.

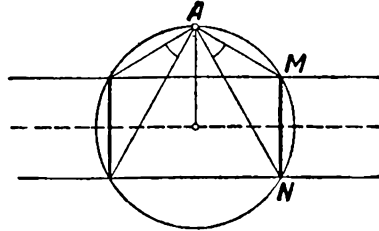
в точке O , отрезки $OM=ON=OB$ (п. 125, следствие). Отсюда и следует, что эта окружность проходит через вершины M и N квадрата, имеющего BC своей диагональю.

174. Сначала найдём на данной прямой D точку, из которой данный отрезок AB виден под данным углом. Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть совокупность двух дуг окружности, имеющих своими концами точки A и B . Точки пересечения этих дуг с данной прямой D и будут искомыми точками.

Задача имеет решения, если построенные дуги имеют общие точки с прямой D , и не имеет решений, если таких точек не будет. Предельным случаем будет окружность, касающаяся прямой D . Если данные точки A и B лежат по одну сторону от прямой D , то существуют две такие окружности. Пусть AMB — одна из них (черт. 415). Легко убедиться, что если точка M' прямой D лежит по ту же сторону от прямой AB , что и точка M , то угол AMB больше угла $AM'B$. В самом деле, угол AMB — вписанный, а угол $AM'B$ имеет вершину вне окружности. Точно так же вторая точка касания N будет давать наибольшее значение угла ANB по сравнению со всеми точками, лежащими с ней по одну сторону от AB . Следовательно, наибольшее значение угла будет соответствовать точке M или точке N в зависимости от того, будет ли угол AMB больше или меньше угла ANB .

Если бы точки A и B лежали по разные стороны от D , то наибольшее значение угла (180°) соответствовало бы точке пересечения прямой AB с прямой D .

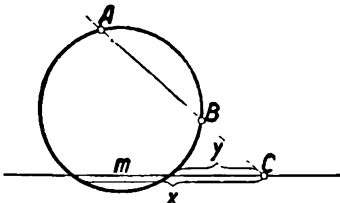
175. Построение общего перпендикуляра к двум данным параллельным прямым, который был бы виден из данной точки A под данным углом, приведено в решении задачи 120. Так как длина этого общего перпендикуляра MN постоянна, то угол, под которым он виден из данной точки, будет тем больше, чем меньше радиус окружности AMN , если этот угол острый.



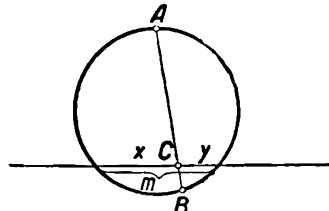
Черт. 416.

Если точка A не лежит между двумя данными параллельными прямыми (черт. 416), то наименьший возможный радиус окружности AMN есть перпендикуляр из точки A на прямую, равноудалённую от двух данных параллельных прямых. Строя окружность, проходящую через точку A и имеющую этот перпендикуляр своим радиусом, получаем решение задачи. В этом случае задача имеет два решения.

Если точка A лежит между двумя данными параллельными прямыми, то наибольший угол (180°) соответствует перпендикуляру MN , проходящему через точку A .



Черт. 417.

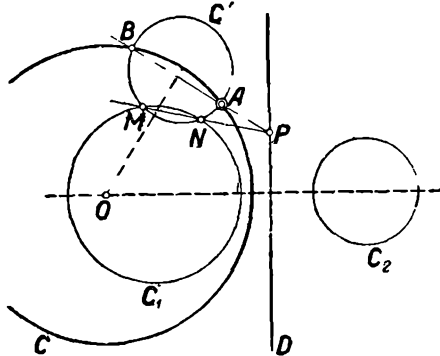


отложить в ту или другую сторону от точки пересечения прямой AB с данной прямой.

Наименьшая возможная длина хорды есть $m = 2\sqrt{CA \cdot CB}$.

177. Пусть через точку A требуется провести окружность, имеющую с окружностями C_1 и C_2 общую радикальную ось — прямую D (черт. 419).

Проводим через A произвольную окружность C' , пересекающую одну из данных окружностей, например C_1 , в двух точках M и N .



Черт. 419.

Точка пересечения P прямых D и MN есть радикальный центр окружностей C_1 , C' и искомой окружности C . Отсюда следует, что прямая AP есть радикальная ось окружностей C' и C , и, следовательно, искомая окружность C проходит через вторую точку пересечения B прямой AP с окружностью C' . Центр искомой окружности лежит в пересечении перпендикуляра к отрезку AB , восстановленного в его середине, с линией центров данных окружностей.

Построение упрощается, если окружности C_1 и C_2 пересекаются или касаются. В этом случае искомая окружность проходит через их точки пересечения или касается их в их общей точке.

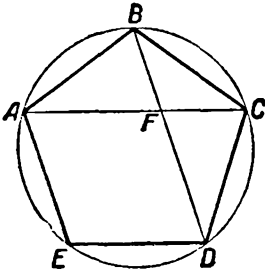
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII (стр. 175).

178. Чтобы равными между собой правильными многоугольниками можно было вымостить плоскость, необходимо, чтобы угол этих многоугольников содержался целое число раз в $4d$ (для того, чтобы около вершины поместилось несколько многоугольников без перекрытий). Это условие выполнено для правильных треугольника, четырёхугольника и шестиугольника, не выполнено для правильного пятиугольника (его угол равен $\frac{6}{5}d$) и для правильных многоугольников с числом сторон, большим шести (их углы больше $\frac{4}{3}d$ и меньше $2d$). Непосредственно очевидно, что правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками вымостить плоскость можно.

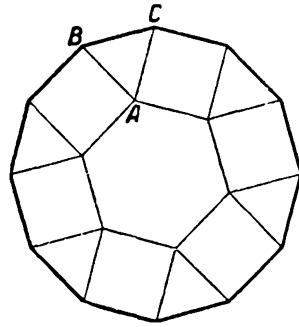
179. Угол правильного (выпуклого) пятиугольника равен $\frac{6}{5}d$, т. е. прямому углу, сложенному с половиной центрального угла, соответствующего стороне правильного (выпуклого) десятиугольника. Это замечание даёт возможность построить угол правильного пятиугольника, а значит и самый пятиугольник.

180. Если диагонали AC и BD правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке F (черт. 420), то треугольник BCF — равнобедренный в силу равенства углов при вершинах B и C , откуда $BF = CF$. Треугольники ABC и CFB подобны (по равенству углов), так что $AC:BC = BC:FC$ или $BC^2 = AC \cdot FC$. Далее треугольник ABF также равнобедренный в силу равенства углов при вершинах B и F (первый измеряется половиной дуги AED , второй — полусуммой дуг AB и CD), так что $BC = AB = AF$. Заменяя в предыдущем равенстве BC через AF , находим $AF^2 = AC \cdot FC$.

181. Так как стороны c_{10} и c_{10}' выпуклого и звездчатого правильных десятиугольников, вписанных в окружность радиуса R , удов-



Черт. 420.



Черт. 421.

летворяют соотношениям $c_{10}' - c_{10} = R$, $c_{10} \cdot c_{10}' = R^2$ (п. 169), то $c_{10}^2 + c_{10}'^2 = (c_{10}' - c_{10})^2 + 2c_{10} \cdot c_{10}' = R^2 + 2R^2 = (R\sqrt{3})^2$. Но $R\sqrt{3}$ есть сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R .

182. Стороны c_{10} и c_{10}' выпуклого и звездчатого правильных десятиугольников, вписанных в окружность радиуса R , соответственно равны $c_{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1)$ и $c_{10}' = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} + 1)$ (пп. 168—169);

для выпуклого и звездчатого пятиугольников имеем $c_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ и $c_5' = \frac{1}{2}R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ (п. 170). Отсюда

$$c_{10}^2 + c_5^2 = \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5} - 1)^2 + R^2 = \frac{1}{2}R^2(5 - \sqrt{5}) = c_5'^2 \quad \text{и} \quad c_{10}'^2 + c_5'^2 = \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5} + 1)^2 + R^2 = \frac{1}{2}R^2(5 + \sqrt{5}) = c_5'^2.$$

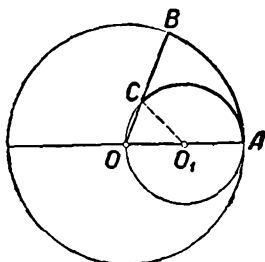
183. Так как угол BAC (черт. 421) дополняет угол правильного шестиугольника до $2d$, то он равен $\frac{2}{3}d$. Следовательно, треугольник ABC и пять треугольников, ему аналогичных, — правильные. Таким образом, в построенном двенадцатиугольнике все стороны между

собой равны и все углы между собой равны (каждый равен сумме прямого угла и угла равностороннего треугольника). Следовательно, построенный двенадцатиугольник — правильный.

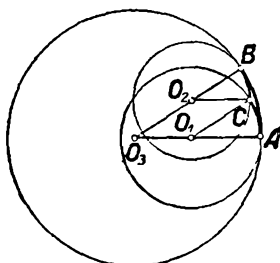
184. В силу п. 180 имеем $c_1^2 = 2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}c^2}$. Точно так же в силу п. 181 имеем $c_1^2 = R\left(R + \frac{1}{2}c\right) + R\left(R - \frac{1}{2}c\right) - 2R \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}c^2}$. Так как оба выражения для c_1^2 совпадают, то совпадают и значения c_1 , получающиеся тем и другим путём.

185. По формуле п. 179а ($m = 18,25$) имеем $R = \frac{2 \cdot 180}{18,25\pi} \text{ м} = 6,279 \text{ м}$.

186. Если O_1 — центр второй окружности, то $\angle AO_1C = 2 \angle AOC$ (черт. 422). Дуге AB соответствует вдвое больший радиус, чем дуге AC , но вдвое меньший центральный угол. Длины обеих дуг равны в силу формулы п. 179а.



Черт. 422.



Черт. 423.

187. Пусть окружности O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности O_3 в точках A и B (черт. 423), и пусть C — точка пересечения окружностей O_1 и O_2 , ближайшая к окружности O_3 ¹⁾. Так как по условию $O_2C + O_1A = O_3A$ и $O_1C + O_2B = O_3B$, то $O_2C = O_3O_1$; $O_1C = O_3O_2$ и фигура $O_1CO_2O_3$ есть параллелограмм. Всем трём дугам AC , BC , AB соответствуют центральные углы, имеющие одну и ту же величину, и из условия, что сумма двух радиусов равна третьему, следует, что сумма дуг AC и BC равна дуге AB .

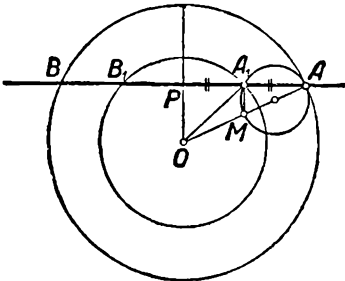
188. По формулам пп. 166 — 167 имеем $c_4 + c_3 = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} = 1,414...R + 1,732...R = 3,146...R$, в то время как длина полуокружности равна $\pi R = 3,1414...R$.

¹⁾ Пользуясь условием, что сумма радиусов окружностей O_1 и O_2 равна радиусу окружности O_3 , можно показать, что окружности O_1 и O_2 necessarily имеют общую точку.

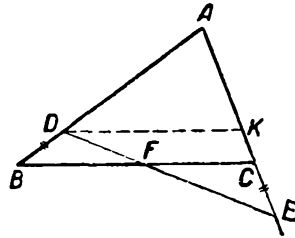
189. Если катеты прямоугольного треугольника равны $1,2R$ и $2,4R$, то его гипотенуза равна $1,2 \cdot R \sqrt{5} = 2,68328 \dots R$, а его периметр — $6,28328 \dots R$, в то время как длина окружности равна $2\pi R = 6,28318 \dots R$.

ЗАДАЧИ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ (стр. 176).

190. Пусть AB — искомая прямая (черт. 424), так что $AB = 2A_1B_1$. Если OP — перпендикуляр к AB , то $PA_1 = A_1A$. Проведя прямую A_1M , параллельную OP , получим на радиусе OA точку M , для которой $OM = MA$. Так как угол MA_1A — прямой, то получаем такое построение. Произвольный радиус OA делим в точке M пополам, и



Черт. 424.

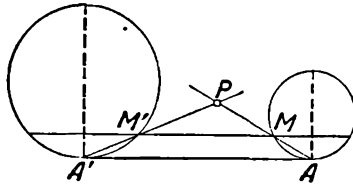


Черт. 425.

на отрезке AM , как на диаметре, строим окружность. Точка её пересечения с меньшей из данных окружностей и будет точкой A_1 . Условие возможности задачи $OA \leq 2OA_1$.

191. Проведя прямую DK , параллельную BC (черт. 425), найдём, пользуясь теоремой п. 113 и равенством $CE = BD$, что $DF:FE = KC:CE = KC:BD = AC:AB$.

192. Если R и R' — радиусы данных окружностей, h — расстояние между прямыми AA' и MM' (черт. 426), то $AM^2 = 2Rh$; $A'M'^2 =$

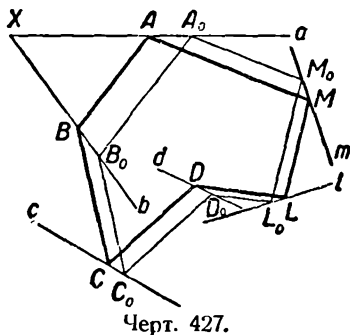


Черт. 426.

$= 2R'h$, откуда $AM:A'M' = \sqrt{R}:\sqrt{R'}$. Если P — точка пересечения прямых AM и $A'M'$, то $AP:A'P = AM:A'M' = \sqrt{R}:\sqrt{R'}$. Отношение расстояний точки P от двух данных точек A и A' сохраняет постоянное значение, и потому геометрическое место точек P есть окружность (п. 116).

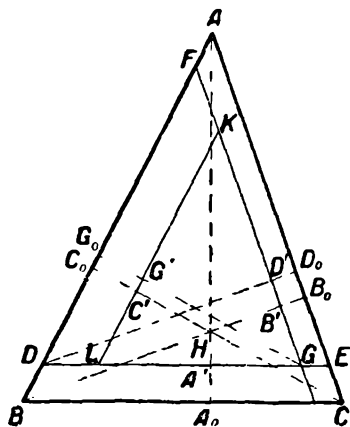
193. Пусть в многоугольнике $ABCDLM$ (черт. 427) вершина A перемещается по прямой a , вершина B — по прямой b , ..., вершина L — по прямой l , и требуется определить геометрическое место вершины M ; пусть далее $A_0B_0C_0D_0L_0M_0$ — одно из положений рассматриваемого многоугольника, которое мы будем считать неизменным.

Так как AB и A_0B_0 по условию параллельны, то $A_0A:B_0B = A_0X:B_0X$, где X — точка пересечения прямых a и b . Таким образом, для всех положений стороны AB отношение $A_0A:B_0B$ сохраняет постоянное значение. Точно так же сохраняет постоянное значение и каждое из отношений $B_0B:C_0C: \dots : K_0K:L_0L$. Отсюда следует, что и отношение $A_0A:L_0L$ сохраняет постоянное значение. Таким образом, точка M есть точка пересечения прямых AM и LM , соответственно параллельных A_0M_0 и L_0M_0 и проходящих через такие точки прямых a и l , что отношение $A_0A:L_0L$ сохраняет постоянное значение. В силу упражнения 124 геометрическое место точек M есть прямая линия.



Черт. 427.

194. Под многоугольником, вписанным в данный многоугольник, понимаем многоугольник, вершины которого лежат на соответственных сторонах данного многоугольника или их продолжениях. Пусть a, b, c, \dots, k, l, m — стороны данного многоугольника. Выбрав на прямой a произвольную точку A_0 и проведя через неё прямую, параллельную первой данной прямой, получим на прямой b точку B_0 . Продолжая это построение, получим многоугольник $A_0B_0 \dots M_0$, у которого все стороны параллельны сторонам искомого многоугольника и все вершины, кроме одной, скажем кроме M_0 , лежат на сторонах данного многоугольника (или их продолжениях).



Черт. 428.

При перемещении вершин $A_0, B_0, C_0, \dots, L_0$ соответственно по прямым a, b, c, \dots, l (с сохранением направлений сторон) последняя вершина M_0 построенного многоугольника описывает некоторую прямую m' (упр. 193). Для отыскания этой прямой повторяем предыдущее построение, исходя из точки A_1 прямой a , отличной от A_0 , и получаем вместо точки M_0 точку M_1 . Прямая M_0M_1 и есть прямая m' .

Точка пересечения прямых m и m' есть вершина Мисского многоугольника. Зная вершину M , легко построить весь искомый многоугольник.

Задача имеет одно решение, если прямые m и m' пересекаются, бесчисленное множество решений (т. е. является неопределённой), если эти прямые совпадают, и не имеет ни одного решения, если они параллельны.

195. Пусть через точку A' высоты AA_0 треугольника ABC (черт. 428) проведена прямая DE , параллельная BC , через точку B' высоты BB_0 — прямая FG , параллельная AC , через точку C' высоты CC_0 — прямая KL , параллельная AB . Получим ряд подобных треугольников ABC , ADE , FDG , KLK . Обозначим через D_0 и D' основания высот треугольников ADE и FDG , выходящих из точки D , через G_0 и G' — основания высот треугольников FDG и KLK , выходящих из точки G .

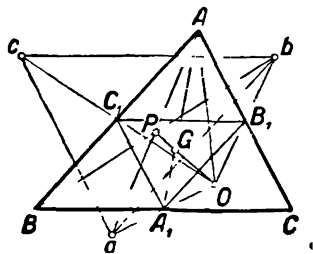
Коэффициент подобия треугольников ABC и ADE будет равен $\frac{DD_0}{BB_0} = \frac{AA'}{AA_0} = 1 - \frac{A'A_0}{AA_0}$. Коэффициент подобия треугольников ABC и FDG будет $\frac{GG_0}{CC_0} = \frac{DD'}{BB_0} = \frac{DD_0 - D'D_0}{BB_0} = \frac{DD_0}{BB_0} - \frac{B'B_0}{BB_0} = 1 - \frac{A'A_0}{AA_0} - \frac{B'B_0}{BB_0}$. Наконец, коэффициент подобия треугольников ABC и KLK будет равен $\frac{GG'}{CC_0} = \frac{GG_0 - G'G_0}{CC_0} = \frac{GG_0}{CC_0} - \frac{C'C_0}{CC_0} = 1 - \frac{A'A_0}{AA_0} - \frac{B'B_0}{BB_0} - \frac{C'C_0}{CC_0}$.

Примечание. При решении задачи мы неявно предполагали, что треугольник ABC — остроугольный и что точки A' , B' , C' лежат (как на черт. 428) между точкой пересечения H его высот и соответственно точками A_0 , B_0 , C_0 . Если бы эти условия не были соблюдены, предыдущие выкладки потребовали бы некоторых видоизменений. Однако все вычисления и полученные результаты приобретают вполне общий характер, если отношениям отрезков и коэффициентам подобия приписать определённые знаки в соответствии с п. 190.

196. Пусть A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон данного треугольника ABC (черт. 429). Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны и имеют своим центром подобия точку пересечения медиан G данного треугольника (упр. 158). Треугольник abc по построению гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$, так как $Oa = 2OA_1$, $Ob = 2OB_1$ и $Oc = 2OC_1$. Следовательно (п. 144), и треугольники ABC и abc гомотетичны, а потому прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку P .

Центры подобия G , O , P треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и abc , взятых попарно, лежат на одной прямой.

Прямая AA_1 есть медиана треугольника AaO (так как $aA_1 = A_1O$), точка G — точка пересечения его медиан (так как $AG = 2GA_1$). Отсюда следует, что $OG = 2GP$. Итак, отрезок OP проходит через точку G и делится в этой точке в отношении $OG:GP = 2:1$, где бы ни лежала точка O . Следовательно, точки O и P описывают гомотетические фигуры, имеющие G своим центром подобия.

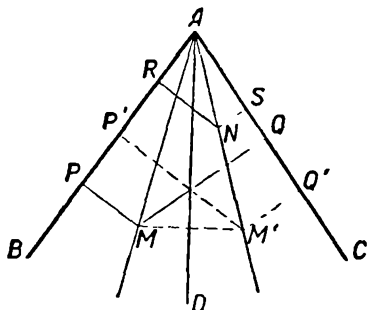


Черт. 429.

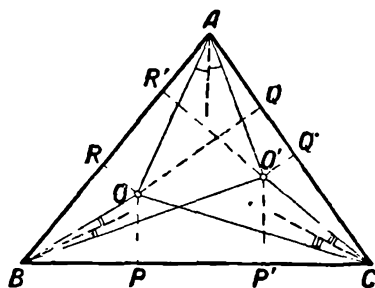
197. Заметим прежде всего, что:

Если прямые AM и AN симметричны относительно биссектрисы AD угла BAC (черт. 430), то расстояния от сторон угла любых двух точек M и N , взятых соответственно на этих прямых, обратно пропорциональны друг другу. В самом деле, строя на прямой AN точку M' , симметричную с M относительно AD , и опуская из точек M, M' и N перпендикуляры на стороны угла, будем иметь $MP = M'Q'$; $MQ = M'P'$; $M'P':NR = AM':AN = M'Q':NS$. Отсюда $MP:MQ = NS:NR$.

Имеет место и следующее обратное предложение:



Черт. 430.



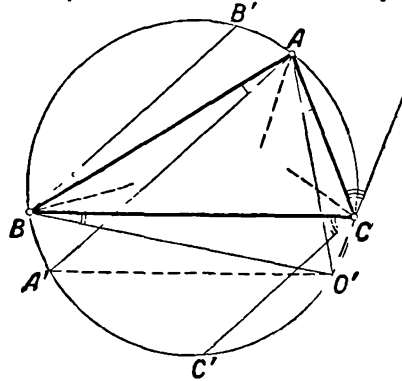
Черт. 431.

Если расстояния точек M и N от сторон угла BAC обратно пропорциональны друг другу и прямые AM и AN проходят обе внутри или обе вне угла BAC , то обе прямые симметричны относительно биссектрисы угла. Это следует из того, что геометрическое место точек N , отношение расстояний которых от прямых AC и AB равно $MP:MQ$, есть пара прямых, из которых одна проходит внутри угла BAC и одна — вне этого угла (п. 157).

Переходим к решению поставленной задачи. Пусть прямые AO и AO' симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC (черт. 431), прямые BO и BO' — относительно биссектрисы угла B . В таком случае имеем: $OQ:OR = O'R':O'Q'$; $OR:OP = O'P':O'R'$. Перемножая почленно, получим $OQ:OP = O'P':O'Q'$. Так как прямые CO и CO' лежат обе внутри или обе вне угла ACB (где бы ни лежала точка O), то эти прямые симметричны относительно биссектрисы угла C . Итак, прямые, симметричные с прямыми AO, BO, CO относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, проходят через одну точку (если только какие-либо две из этих прямых пересекаются).

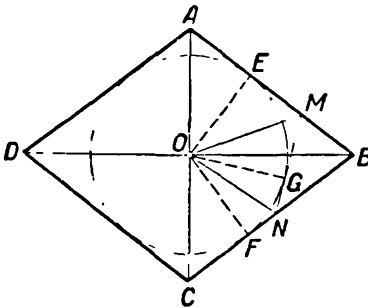
Пусть теперь через вершины треугольника ABC проведены параллельные прямые, пересекающие описанную окружность вторично в точках A', B', C' (черт. 432). Проведём прямую AO' , симметричную с AA' относительно биссектрисы угла A , и пусть она вторично пересекает окружность в точке O' . Так как при этом $\angle BAA' = \angle CAO'$,

то дуги $A'B$ и $O'C$ равны; так как прямая AA' параллельна BB' , то дуги $A'B$ и AB' равны; отсюда следует, что дуги AB' и $O'C$ равны. Следовательно, $\angle ABB' = \angle CBO'$, так что прямые BB' и BO' симметричны относительно биссектрисы угла B . Наконец, так как прямая CC' параллельна AA' , то дуги $A'C'$ и AC равны. Следовательно, и дуги $BA'C'$ и $O'CA$ равны, так что углы BCC' и ACO' дополняют друг друга до двух прямых. Отсюда следует, что прямые CC' и CO' симметричны относительно биссектрисы угла C . Итак, если прямые AA' , BB' , CC' параллельны, то прямые, симметричные с ними относительно биссектрис углов треугольника ABC , проходят через одну точку O' , лежащую на окружности, описанной около треугольника.

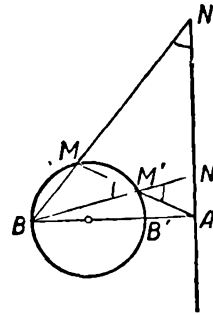


Черт. 432.

Если за точку O , о которой говорилось выше, принять центр описанной окружности, то прямая AO' будет совпадать с высотой AN треугольника (черт. 136). Действительно, $\angle BAA' = 90^\circ - \angle BA'A = 90^\circ - \angle BCA = \angle CAN$, и прямые AA' и AN симметричны относительно биссектрисы угла A . Отсюда вытекает, что высота AN треугольника и две другие его высоты проходят через одну точку.



Черт. 433.



Черт. 434.

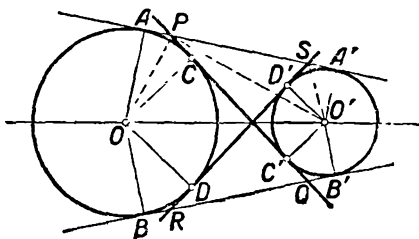
Примечание. Точки O и O' , получающиеся одна из другой указанным построением, называются иногда *изогонально-сопряженными* относительно треугольника ABC .

198. Пусть E , F , G — точки касания прямых AB , BC и MN с окружностью (черт. 433). Так как $\angle AOE = \angle FOC$, $\angle EOM = \angle MOG$, $\angle GON = \angle NOF$, то $\angle AOE + \angle EOM + \angle GON = 90^\circ$. Отсюда $\angle AOM = 90^\circ - \angle GON = 90^\circ - \angle NOF = \angle CNO$. Кроме того, $\angle OAM = \angle NCO$, так что треугольники AOM и CNO

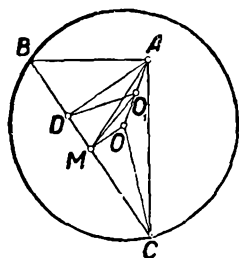
подобны. Из подобия этих треугольников находим $AM:CO=AO:CN$ и $AM \cdot CN=AO \cdot CO$.

199. Пусть BB' — диаметр окружности, проходящий через A (черт. 434; точка A могла бы лежать и внутри окружности и на данной окружности), N и N' — точки пересечения прямых BM и BM' с прямой, проходящей через A и перпендикулярной к AB . Имеем $\angle AM'N' = \angle MM'B = \frac{1}{2} \widehat{BM} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{MM'B} = 90^\circ - \angle ABM = \angle MNA$. Следовательно, треугольники AMN и $AN'M'$ подобны, откуда $AN \cdot AN' = AM \cdot AM'$ есть степень точки A относительно данной окружности.

200. Пусть O и O' — центры данных окружностей (черт. 435), AA' и BB' — их внешние общие касательные, CC' и DD' — их внут-



Черт. 435.



Черт. 436.

ренние общие касательные, P, Q, R, S — точки пересечения внутренних общих касательных с внешними.

При этом углы AOC и $A'PC'$ равны, так как их стороны соответственно перпендикулярны, а потому их половины $\angle AOP$ и $\angle A'PO'$ также равны. Подобные прямоугольные треугольники AOP и $A'PO'$ дают $PA \cdot PA' = OA \cdot O'A'$. Аналогично найдём, что и $SA \cdot SA' = OA \cdot O'A'$.

Из равенств $PA \cdot PA' = SA \cdot SA'$ и $PA + PA' = SA + SA'$ следует, что либо $PA = SA$, либо $PA = SA'$. Но так как очевидно $PA \neq SA$, то $PA = SA'$, откуда в свою очередь следует, что PS и AA' имеют общую середину. Наконец $PS = PA' - SA' = PA' - PA = PC' - PC = CC'$.

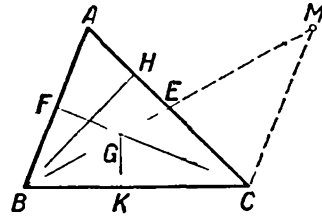
201. 1°. Пусть M — середина стороны BC (черт. 436). Так как $MA = MC$ и прямая OM перпендикулярна к BC , то $MA^2 + MO^2 = MC^2 + MO^2 = OC^2$, и из треугольника OMA находим, обозначая через O_1 середину стороны OA , что $O_1M^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MO^2) - \frac{1}{4}OA^2 = \frac{1}{2}OC^2 - OO_1^2$ (п. 128). Следовательно, геометрическое место точек M есть окружность с центром O_1 ; радиус O_1M этой окружности определяется только что написанным равенством. •

2°. Так как точка O_1 есть середина отрезка OA , то проекция M точки O на сторону BC и проекция D точки A на ту же сторону BC равноудалены от точки O_1 , а потому геометрическое место точек D есть та же самая окружность.

202. Задача тождественна по содержанию с упражнением 170.

203. Пусть BE и CF — медианы искомого треугольника ABC , G — точка их пересечения (черт. 437). Возможны два случая:

1°. Даны медианы BE и CF и высота, выходящая из вершины A . Высота GK треугольника BGC , выходящая из вершины G , равна, как легко видеть, одной трети данной высоты. Этот треугольник легко построить по двум сторонам BG и CG и высоте, выходящей из их общей вершины. Построив



Черт. 437.

треугольник BGC , откладываем $GE = \frac{1}{2} BG$, $GF = \frac{1}{2} CG$ и проводим CE и BF .

Примечание. Прямые BF и CE не могут оказаться параллельными. Действительно, проведя через точку C прямую, параллельную BF , и обозначив через M точку её пересечения с BE , будем иметь $GM:GB = GC:GF$ или $GM = 2BG$, но $GE = \frac{1}{2} BG$; следовательно, точка E necessarily лежит между G и M , прямые BF и CE пересекаются и при этом с той стороны от BC , где лежит точка G . Таким образом, для возможности построения треугольника ABC достаточно, чтобы было возможно построить треугольник BGC .

2°. Даны медианы BE и CF и высота BH , выходящая из вершины B . Строим прямоугольный треугольник BEH по катету и гипотенузе и из точки G , делящей BE в отношении 2:1, как из центра, описываем окружность радиусом $\frac{2}{3} CF$. Пересечение её с прямой EH определяет вершину C . Третья вершина A искомого треугольника получится, если отложить отрезок EA , равный EC .

Наибольшее возможное число решений в каждом из обоих случаев равно двум.

204. Пусть ABC — искомым треугольник (черт. 438) и AD — его высота. Отложим $DE = BC$ и соединим точку E с вершиной C . Пусть F — точка пересечения прямой CE с касательной к данной окружности в точке A . Из подобия треугольников EDC и EAF следует, что $AF = \frac{1}{2} AE$.

Отсюда вытекает такое построение. На диаметре окружности откладываем отрезок AE , равный данной сумме m основания и высоты, и на касательной в точке A — отрезок $AF = \frac{1}{2} AE$. Точки пересе-

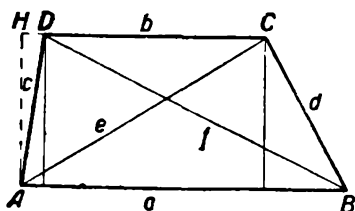
Складывая эти равенства, получим $e^2 + f^2 = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2ax - 2ay$, откуда, замечая, что $x + y = a - b$, имеем:

$$e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab. \quad (2)$$

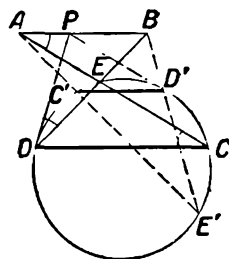
Далее из треугольника ACD находим $e^2 = b^2 + c^2 + 2bx$. Умножая это равенство почленно на a , а равенство (1) — на b и складывая, получим:

$$ae^2 + bf^2 = ab^2 + a^2b + ac^2 + bc^2. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) определяют e^2 и f^2 .



Черт. 440.

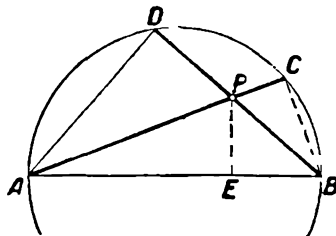


Черт. 441.

206. Пусть CD — искомая хорда (черт. 441) и E — точка окружности, в которой пересекаются хорды AC и BD . Построим в точке D касательную к окружности, и пусть она пересекает прямую AB в точке P . При этом $\angle BDP = \angle ACD = \angle CAB$. Треугольники BDP и BAE подобны, и $BP \cdot BA = BE \cdot BD$ есть степень точки B относительно окружности. Тем самым определяется положение точки P на прямой AB . Проведя из P касательную к окружности, найдём точку D .

Наибольшее возможное число решений — два.

207. Пусть E — основание перпендикуляра из точки P на AB (черт. 442). Из подобия треугольников ABC и APE имеем $AB \cdot AE = AP \cdot AC$; из подобия треугольников ADB и PEB находим $AB \cdot BE = BP \cdot BD$. Складывая, получим $AB(AE + BE) = AB^2 = AP \cdot AC + BP \cdot BD$.



Черт. 442.

208. Пусть O — центр какой-либо окружности, проходящей через точки A и B , T и T' — точки прикосновения касательных, проведённых из точки C , H — середина отрезка AB , M — середина отрезка TT' , P — точка пересечения AB и TT' (черт. 443). Из прямоугольного треугольника OCT имеем $CM \cdot CO = CT^2$. Но $CM \cdot CO = CH \cdot CP$ в силу подобия треугольников COH и CPM , а $CT^2 = CA \cdot CB$. Следовательно, $CP \cdot CH = CA \cdot CB$. Отсюда вытекает, что положение точки P на прямой AB не зависит от выбора окружности. Так как угол CMP —

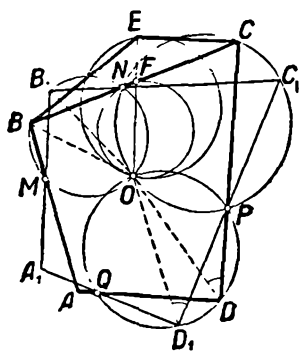
211. В силу подобия треугольников ABP и CBR (черт. 445) имеем $\angle ABP = \angle CBR$, или $\angle ABC = \angle PBR$, и $BP:BR = BA:BC$. Отсюда следует, что треугольники ABC и PBR подобны. Точно так же докажем, что треугольники ABC и QRC подобны. Следовательно, и треугольники PBR и QRC подобны. Но их соответственные стороны BR и RC равны, так что и треугольники равны. Отсюда $PA = BP = RQ$; $AQ = QC = PR$, и в четырёхугольнике $APRQ$ противоположные стороны равны.

212. Пусть три прямые AB, BC, CD (черт. 446) фигуры $ABCD$, которая изменяется, оставаясь подобной самой себе, проходят соответственно через неподвижные точки M, N, P .

1°. Докажем, что и произвольная четвёртая прямая AD той же фигуры проходит через неподвижную точку Q .

Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два положения изменяемой фигуры. Найдём точку O фигуры $ABCD$, которая совпадает с соответственной ей точкой фигуры $A_1B_1C_1D_1$ (п. 150).

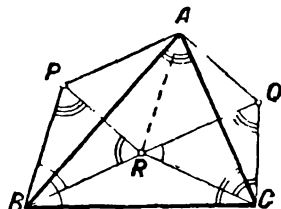
Так как угол ABO должен равняться углу A_1B_1O (как соответственные углы двух подобных фигур), то точка O должна лежать на окружности MBB_1 . Далее $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и значит точки M, B, B_1, N лежат на одной окружности. Следовательно, точка O лежит на окружности MBN . Таким же образом докажем, что точка O лежит и на окружности NCP . Итак, отличная от N точка пересечения O окружностей MBN и NCP есть точка фигуры $ABCD$, совпадающая с соответственной ей точкой фигуры $A_1B_1C_1D_1$ (п. 150, примечание), какое бы положение эта последняя ни занимала, и потому точка O остаётся на месте при изменении фигуры $ABCD$.



Черт. 446.

Далее, в силу равенства углов CDO и C_1D_1O четыре точки O, P, D, D_1 лежат на одной окружности, а в силу равенства углов CDA и $C_1D_1A_1$ та же окружность проходит и через точку пересечения Q прямых AD и A_1D_1 . Следовательно, точка Q определяется как вторая точка пересечения окружности OPD с прямой AD . Таким образом, точка Q не зависит от положения фигуры $A_1B_1C_1D_1$, так что прямая AD действительно проходит при изменении фигуры $ABCD$ через неподвижную точку.

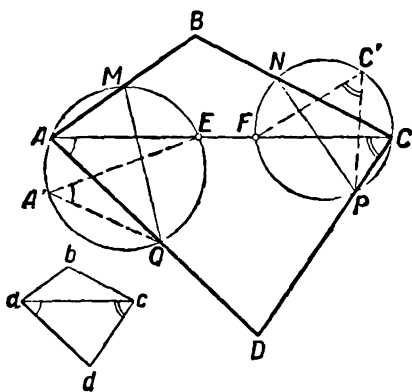
2°. Пусть теперь E — произвольная точка фигуры $ABCD$. При изменении последней отношения отрезков $BF:FC$ и $OF:FE$, где F — точка пересечения прямых BC и OE , не изменяются. Так как прямая BC проходит при изменении фигуры $ABCDE$ через общую точку N двух окружностей OMN и ONP и точка F делит отрезок BC этой прямой



Черт. 445.

в постоянном отношении, то точка F описывает при изменении фигуры $ABCDE$ окружность, также проходящую через точки O и N (упр. 128). Так как отрезок OE делится точкой F в постоянном отношении, то точка E описывает фигуру, гомотетичную той, которую описывает точка F (центром гомотетии служит точка O). Итак, точка E (т. е. произвольная точка изменяемой фигуры) описывает окружность (проходящую через O).

213. Пусть требуется построить четырёхугольник $ABCD$, подобный данному четырёхугольнику $abcd$, так, чтобы его стороны AB, BC, CD, DA проходили соответственно через данные точки M, N, P, Q .



Черт. 447.

Первое решение. Построим четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, подобный $abcd$, так, чтобы три его стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 проходили через данные точки M, N, P . Четвёртая сторона D_1A_1 не будет, вообще говоря, проходить через точку Q . Если четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ будет изменяться подобно самому себе, причём три его стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 будут всё время проходить через точки M, N, P ,

то четвёртая его сторона D_1A_1 будет вращаться около некоторой точки Q' , которую мы умеем построить (задача 212). Прямая QQ' определяет положение стороны DA и позволяет закончить построение.

Задача будет неопределённой, если точки Q и Q' совпадают. В этом случае обе диагонали изменяемого четырёхугольника (как и любая прямая изменяемой фигуры) будут вращаться около неподвижных точек. Так как угол между диагоналями остаётся постоянным, то точка их пересечения описывает окружность.

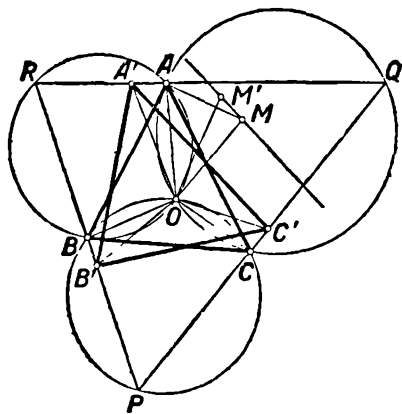
Второе решение. Задачу можно также решить аналогично задаче 122. Вершина A лежит на дуге, имеющей своими концами точки Q и M и вмещающей угол, равный углу dab (черт. 447), и аналогичное имеет место для вершины C . Диагональ AC пересекает вторично окружность MAQ в такой точке E , что $\angle EAQ = \angle cad$. Для построения точки E достаточно выбрать на дуге QAM произвольную точку A' и построить угол $QA'E$, равный углу dac . Аналогично строится точка пересечения F прямой AC с окружностью NCP . Прямая EF определяет положение вершин A и C .

Задача будет неопределённой, если точка F совпадает с E . При этом направление диагонали AC будет произвольным. Повторяя в этом случае те же рассуждения для диагонали BD , убедимся, что и она будет проходить через некоторую определённую точку. Обе диагонали будут, таким образом, вращаться около неподвижных точек. Так как

угол между диагоналями имеет постоянную величину, то геометрическое место точек пересечения диагоналей есть окружность.

214. Пусть фигура ABC , оставаясь подобной самой себе, изменяется так, что точки A, B, C описывают соответственно прямые QR, RP, PQ (черт. 448).

Пусть ABC и $A'B'C'$ — два положения изменяемой фигуры. Найдём точку O фигуры ABC , которая совпадает с соответственной ей точкой фигуры $A'B'C'$ (п. 150, примечание). При этом треугольники OAB и $OA'B'$ должны быть подобными, откуда $\angle AOB = \angle A'OB'$, и, следовательно, $\angle AOA' = \angle BOB'$ и, кроме того, $OA:OA' = OB:OB'$. Из двух последних равенств следует, что точку O можно также рассматривать как точку, соответствующую самой себе в двух подобных фигурах, имеющих одинаковое направление вращения, в которых точке A соответствует точка B и точке A' — точка B' . Следовательно, $\angle OAA' = \angle OBB'$, и точка O должна лежать на окружности, описанной около треугольника ABR (A, B — соответственные точки, R — точка пересечения соответственных прямых AA' и BB').



Черт. 448.

Точно так же докажем, что точка O должна лежать на каждой из окружностей BSP и CAQ ¹⁾. Отсюда следует, что положение точки O на плоскости не зависит от выбора треугольника $A'B'C'$. Точка O сохраняет своё положение на плоскости при изменении данного треугольника.

Пусть теперь M — какая-либо точка фигуры ABC , и M' — соответственная точка фигуры $A'B'C'$. Так как O — точка первой фигуры, совпадающая со своей соответственной, то $\angle OAA' = \angle OMM'$. При изменении фигуры $A'B'C'M'$ угол OAA' не изменяется (точка A' перемещается по прямой QR). Поэтому и угол OMM' не изменяется, т. е. точка M' описывает прямую.

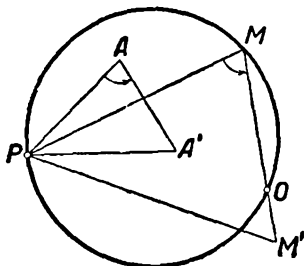
215. Пусть A и A' — две какие-либо соответственные точки данных фигур, P — точка, совпадающая со своей соответственной (черт. 449). Пусть точка M первой фигуры обладает тем свойством, что прямая, соединяющая её с соответственной точкой M' второй фигуры, проходит через данную точку O . Так как в силу равенств $PA:PA' = PM:PM'$ и $\angle APA' = \angle MPM'$ треугольники PAA' и PMM' подобны (п. 150), то угол PMM' равен углу PAA' , и отре-

¹⁾ Легко видеть, что окружности ABR, BSP и CAQ проходят через одну точку (см. решение раздела 1 задачи 344).

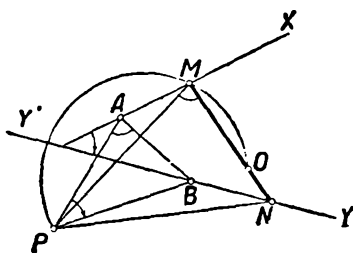
зок PO виден из точки M под углом, равным углу $PA A'$ или углу, ему дополнительному. Геометрическое место точек M есть окружность, проходящая через точки P и O .

При этом мы получаем одну такую окружность (а не две симметричных относительно прямой PO), если примем во внимание, что углы $PA A'$ и PMM' должны быть не только равны, но и одинаково направлены.

216. Пусть AX и BY — данные прямые (черт. 450). Примем точки A и B за соответственные точки, AX и BY — за направления



Черт. 449.



Черт. 450.

соответственных прямых двух подобных фигур, имеющих одинаковое направление вращения, и данное отношение $m:n$ — за их коэффициент подобия. Точка P одной из двух фигур, совпадающая со своей соответственной в другой фигуре, вполне определяется следующими условиями: угол APB должен равняться углу между AX и BY и иметь то же направление, а отношение расстояний от точки P до точек A и B должно равняться данному отношению: $PA:PB = m:n$. Искомые точки M и N также будут соответственными точками обеих фигур в силу равенства $AM:BN = m:n$. Следовательно (см. решение задачи 215), углы PAB и PMN равны и одинаково направлены. Так как прямая MN проходит, по условию, через данную точку O , то отсюда следует, что точка M лежит на дуге, имеющей своими концами точки P и O и вмещающей угол, равный углу PAB и одинаково с ним направленный (или же на той дуге, которая дополняет её до полной окружности).

Мы получим дальнейшие решения, предполагая, что направлению AX в первой фигуре соответствует во второй фигуре направление BY' , противоположное BY .

ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I (стр. 181).

217. Если точки A и B делят гармонически точки C и D , то (п. 189) $AC:AD = -BC:BD$. В силу п. 187 имеем: $BC = AC - AB$; $BD = AD - AB$, так что $AC:AD = -(AC - AB):(AD - AB)$. Разрешая это уравнение относительно AB , найдём $AB = \frac{2AC \cdot AD}{AC + AD}$, откуда и получается искомое соотношение.

218. Для того случая, когда точка D лежит между B и C , можно написать, выбирая за положительное направление на прямой BC направление от B к C , равенство (п. 127) $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$, или в более симметричной форме:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB + AD^2 \cdot BC + BC \cdot CD \cdot DB = 0. \quad (1)$$

Если бы точка C лежала между B и D (или точка B между C и D), то в полученном равенстве пришлось бы переставить буквы C и D (или B и D). Легко проверить, что от такой перестановки равенство (1) не изменяется.

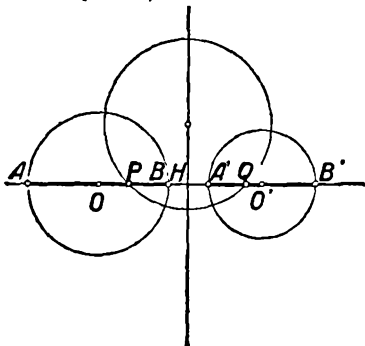
Если точка A лежит с точками B, C, D на одной прямой, то равенство (1) принимает вид: $AB^3 \cdot (AD - AC) + AC^3 \cdot (AB - AD) + AD^3 \cdot (AC - AB) + (AD - AC)(AB - AD)(AC - AB) = 0$ и выполняется тождественно. Общая формулировка такова: *если B, C, D — три точки одной прямой и A — произвольная точка, то имеет место по величине и по знаку соотношение (1).*

219. Пусть P — середина отрезка AB (обозначения п. 116) и C, D — точки пересечения прямой AB с одной из рассматриваемых окружностей. Так как точки C и D делят, по своему определению, отрезок AB гармонически, то (в силу теоремы п. 189) $PC \cdot PD = PA^2$. Следовательно, точка P имеет одну и ту же степень PA^2 относительно всех рассматриваемых окружностей. Поэтому радикальной осью всех этих окружностей будет перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка AB . Из равенств $PC \cdot PD = PA^2 = PB^2$ следует, что A и B — предельные точки (упр. 152).

Наибольшее и наименьшее значение отношения расстояний точки M от точек A и B получается для точек касания одной из рассматриваемых окружностей с данной прямой или окружностью.

219a. Пусть AB и $A'B'$ — два данных отрезка (лежащих по смыслу задачи на одной прямой), P и Q — искомые точки (черт. 451). Окружности, имеющие своими диаметрами отрезки AB и $A'B'$, обе ортогональны к любой окружности, проходящей через точки P и Q (п. 189). Следовательно, окружности, имеющие отрезки AB и $A'B'$ своими диаметрами, не имеют общих точек (см. решение упр. 152), и потому отрезки AB и $A'B'$ расположены так, что либо один из них целиком лежит внутри другого, либо каждый из них целиком лежит вне другого. Только для таких двух отрезков задача возможна,

Обратно, если даны два отрезка AB и $A'B'$, расположенные на одной прямой, как только что было указано, то окружности, имеющие эти отрезки своими диаметрами, не имеют общих точек. Любая окружность, ортогональная к ним обеим, определяет на данной прямой одну и ту же пару точек P и Q , дающих единственное решение поставленной задачи.



Черт. 451.

Примечание. Найдём отношение, в котором точки P и Q делят один из данных отрезков, скажем AB . С этой целью рассмотрим точку пересечения H прямой AB с радикальной осью окружностей, имеющих отрезки AB и $A'B'$ своими диаметрами. Мы имеем $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$, откуда

$HA:HA' = HB':HB = (HB' - HA):(HB - HA') = AB':A'B$ и $HA':HB = HA:HB' = (HA' - HA):(HB - HB') = AA':B'B$. Следовательно,

$$HA:HB = (HA:HA') \cdot (HA':HB) = (AA' \cdot AB'):(A'B \cdot B'B). \quad (1)$$

С другой стороны, точки A и B делят отрезок PQ гармонически, и точка H есть середина отрезка PQ . Следовательно (ср. п. 189), $PA:PB = -QA:QB = PQ:(PB + QB) = 2PH:2HB$ и $PA:PB = -QA:QB = (PA + QA):PQ = 2HA:2PH$, откуда $(PA:PB)^2 = HA:HB$. Подставляя сюда значение (1) отношения $HA:HB$, получим окончательно $(PA:PB)^2 = (QA:QB)^2 = (AA' \cdot AB'):(BA' \cdot BB')$.

220. Пусть O и O' — центры данных окружностей, S и S' — их центры подобия. Так как точки S и S' делят отрезок OO' внутренним и внешним образом в отношении $R:R'$ радиусов данных окружностей, то окружность имеющая отрезок SS' своим диаметром, есть (согласно п. 116) геометрическое место точек M , для которых $MO:MO' = R:R'$, откуда $(MO^2 - R^2):(MO'^2 - R'^2) = R^2:R'^2$. Следовательно, та же окружность есть геометрическое место точек, для которых отношение степеней относительно окружностей O и O' равно $R^2:R'^2$, и потому имеет, в силу упражнения 149, с окружностями O и O' общую радикальную ось.

221. Теоремам, предложенным в упражнениях 130 и 131, можно придать следующие, более общие формулировки:

Если AB и CD — два параллельных отрезка и через точку E , делящую отрезок AC в отношении $AE:EC = m:n$ (по величине и знаку), провести прямую, параллельную AB , то отрезок EF этой прямой, заключённый между прямыми AC и BD , будет определяться (по величине и знаку) формулой $EF = \frac{m \cdot CD + n \cdot AB}{m + n}$.

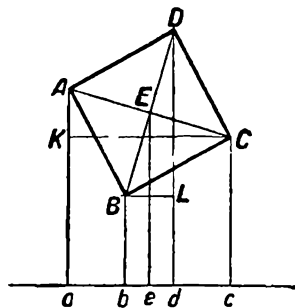
Если из вершин треугольника и точки пересечения медиан опустить перпендикуляры на произвольную прямую, лежащую в плоскости треугольника, то последний из этих перпендикуляров равен (по величине и знаку) среднему арифметическому трёх первых.

(При этом в отношении знаков следует придерживаться указаний пп. 188 и 190.)

Доказательства, приведённые в решениях упражнений 130 и 131, полностью сохраняют силу, если рассматривать все упоминаемые там отрезки по величине и знаку.

222. Имеем $Aa^2 + Cc^2 = \frac{1}{2}(Aa + Cc)^2 + \frac{1}{2}(Aa - Cc)^2$; $2Bb \cdot Dd = \frac{1}{2}(Bb + Dd)^2 - \frac{1}{2}(Bb - Dd)^2$. Но $Aa + Cc = Bb + Dd = 2Ee$,

где E — точка пересечения диагоналей AC и BD (черт. 452), e — основание перпендикуляра из точки E на данную прямую (упр. 130). Если из точек C и B опустить перпендикуляры CK и BL соответственно на прямые Aa и Dd , то треугольники ACK и BDL будут равны, откуда $CK = DL$. Следовательно, имеем: $Aa^2 + Cc^2 - 2Bb \cdot Dd = \frac{1}{2}(Aa - Cc)^2 + \frac{1}{2}(Bb - Dd)^2 = \frac{1}{2}AK^2 + \frac{1}{2}DL^2 = \frac{1}{2}(AK^2 + KC^2) = \frac{1}{2}AC^2 = AB^2$.



Черт. 452.

Предложение сохраняет силу вместе с приведённым доказательством, как бы ни была расположена данная прямая на плоскости, если рассматривать расстояния Aa, Bb, Cc, Dd по абсолютной величине и знаку и использовать упр. 221.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II (стр. 188).

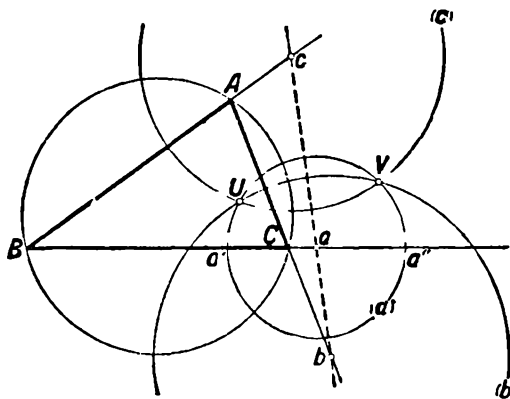
223. Пусть точки a, b, c лежат соответственно на продолжениях сторон BC, CA, AB треугольника ABC (черт. 453) так, что выполняется условие

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1. \quad (1)$$

Построим окружности $(a), (b), (c)$, имеющие своими центрами точки a, b, c и ортогональные к описанной окружности (это возможно, так как точки a, b, c — внешние). Точки пересечения a' и a'' окружности (a) с прямой BC делят отрезок BC гармонически (п. 189, следствие),

так что имеет место соотношение $-\frac{a'B}{a'C} = \frac{a''B}{a''C}$, или $\frac{aC' - aB}{aC - aC'} = \frac{aB - aa''}{aC - aa''}$. Отсюда, принимая во внимание, что $aa' = -aa''$, получим (сравнить преобразования в начале п. 189), беря один раз отно-

шение сумм, другой раз — отношение разностей членов двух последних отношений, — $a'B:a'C = a''B:a''C = aa':aC = aB:aa'$. Отсюда путём возведения в квадрат и перемножения находим $a'B^2:a'C^2 = a''B^2:a''C^2 = aB:aC$. Из последнего уравнения следует, что окружность (a) есть геометрическое место точек, расстояния которых от точек B и C относятся как $\sqrt{aB}:\sqrt{aC}$. Точно так же окружность (b)



Черт. 453.

есть геометрическое место точек расстояния которых от точек C и A относятся как $\sqrt{bC}:\sqrt{bA}$, окружность (c) — геометрическое место точек, расстояния которых от точек A и B относятся как $\sqrt{cA}:\sqrt{cB}$. Если две из трёх окружностей, скажем (a) и (b), пересекаются в точках U и V, то $UB:UC = \sqrt{aB}:\sqrt{aC}$; $UC:UA = \sqrt{bC}:\sqrt{bA}$,

откуда в силу (1) $UA:UB = \sqrt{cA}:\sqrt{cB}$, и те же соотношения имеют место и для точки V. Следовательно, окружность (c) проходит через точки пересечения окружностей (a) и (b), и центры трёх окружностей лежат на одной прямой.

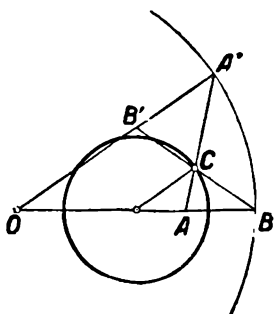
224. Так как три точки a, b и c лежат на одной прямой, то $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$. Так как точка a' симметрична относительно середины стороны BC с точкой a , то $aB = -a'C$, $aC = -a'B$, откуда $a'B:a'C = aC:aB$, и аналогично для точек b' и c' . Отсюда следует, что $\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1$, и точки a', b', c' лежат на одной прямой.

Если точки a, b, c служат проекциями на стороны треугольника некоторой точки P описанной окружности, то точки a', b', c' служат проекциями точки P', диаметрально противоположной точке P. Действительно, проекции центра описанной окружности совпадают с серединами сторон, и потому проекции точек P и P' симметричны относительно середин сторон.

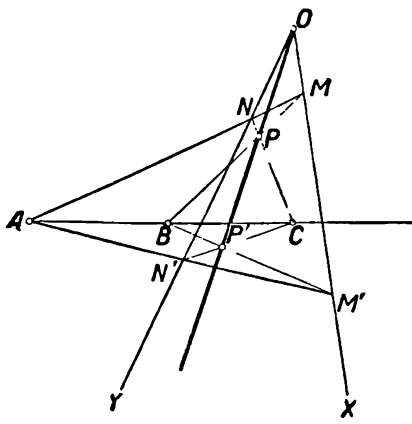
225. Пусть C — точка пересечения прямых AA' и BB' (черт. 454). Применяя к треугольнику OAA' и секущей BCB' теорему п. 192, имеем $\frac{CA}{CA'} \cdot \frac{BA'}{BO} \cdot \frac{BO}{BA} = 1$. При вращении прямой OA'B' отношения $BA':BO$ и $BO:BA$ по условию не изменяются. Следовательно, не изменяется и отношение $AC:A'C$, а значит и отношение $AC:AA'$. Так

как точка A' описывает окружность, то и точка C описывает окружность, гомотетичную первой относительно точки A .

226. Пусть $ХОУ$ —данный угол, P —точка пересечения прямых BM и CN (черт. 455). Проведём через точку A некоторую прямую, отличную от AMN , и обозначим через M' и N' точки её пересечения соответственно с прямыми $ОХ$ и $ОУ$ и через P' —точку пересечения прямых BM' и CN' . Рассмотрим два треугольника $MM'B$ и $NN'C$. Прямые MN , $M'N'$ и BC , соединяющие попарно их соответственные вершины, проходят через одну точку A . Следовательно, в силу теоремы п. 195, точки пересечения их соответственных сторон



Черт. 454.



Черт. 455.

должны лежать на одной прямой. Но стороны $M'B$ и $N'C$ пересекаются в точке P' , стороны MB и NC —в точке P , стороны MM' и NN' —в точке O . Итак, точки O , P и P' лежат на одной прямой.

Пусть теперь прямая AMN вращается около точки A , а прямая $AM'N'$ сохраняет своё положение на плоскости. При этом и точка P' будет сохранять своё положение на плоскости. Так как при любом положении секущей AMN точка P лежит на прямой OP' и так как прямая MB может пересекать OP' в любой её точке, то геометрическим местом точек P и будет прямая OP' .

227. Так как прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку, то $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1$. Так как точка a' симметрична с a относительно середины стороны BC треугольника, то $a'B : a'C = aC : aB$, и аналогичное имеем для точек b' и c' . Отсюда следует, что $\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = -1$, так что прямые Aa' , Bb' , Cc' проходят через одну точку.

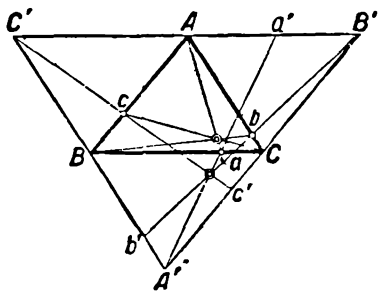
228. В силу упражнения 90а имеем равенство $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} =$
 $= \left(-\frac{p-b}{p-c}\right) \cdot \left(-\frac{p-c}{p-a}\right) \cdot \left(-\frac{p-a}{p-b}\right) = -1$, так что прямые AD ,
 BE и CF проходят через одну точку.

229. Так как прямые Aa , Bb и Cc проходят через одну точку
 (черт. 456), то $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1$. В силу п. 121 имеем $a'B':a'C' =$
 $= aC:aB$, и аналогично для точек b' и c' . Отсюда следует, что
 $\frac{a'B'}{a'C'} \cdot \frac{b'C'}{b'A'} \cdot \frac{c'A'}{c'B'} = -1$, так что прямые $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ проходят
 через одну точку.

230. Так как прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку, то
 $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1$. Если точка a' гармонически сопряжена с точкой a
 относительно вершин B и C треугольника, то $a'B:a'C =$
 $= -aB:aC$, и аналогичное имеем для точек b' и c' . Отсюда следует, что

$\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1$, так что точки a' , b' , c' лежат на одной прямой.

Если прямые Aa , Bb , Cc — биссектрисы углов треугольника, то
 точки a' , b' , c' будут точками пересечения биссектрис внешних уг-
 лов треугольника с противолежащими сторонами (п. 115, примечание),
 и мы получаем следующую теорему:
*Точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с проти-
 волежащими сторонами лежат на одной прямой.*



Черт. 456.

Мы могли бы принять за прямую
 Aa биссектрису угла A треугольника,
 а за прямые Bb и Cc — биссектри-
 сы его внешних углов (сравнить п. 54)
 и получили бы следующий результат:
Точки пересечения двух биссектрис

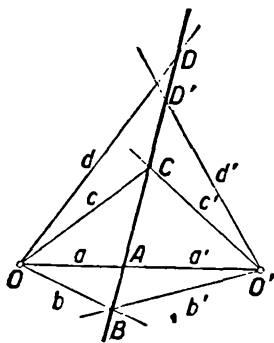
*треугольника и биссектрисы внешнего угла при третьей вершине с
 противолежащими сторонами лежат на одной прямой.*

231. Так как прямые Aa , Bb , Cc проходят через одну точку, то
 $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1$. Так как точки a , b , c , a' , b' и c' лежат на
 одной окружности, то в силу п. 131 будем иметь $Ab \cdot Ab' = Ac \cdot Ac'$,
 и аналогично $Bc \cdot Bc' = Ba \cdot Ba'$; $Ca \cdot Ca' = Cb \cdot Cb'$. Отсюда имеем

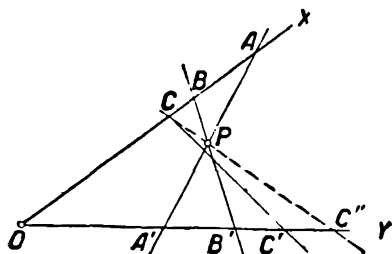
$\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = \frac{aC}{aB} \cdot \frac{bA}{bC} \cdot \frac{cB}{cA} = -1$, так что прямые Aa' , Bb' , Cc' проходят через одну точку.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III (стр. 192).

232. Пусть $abcd$ и $a'b'c'd'$ — две данные четвёрки прямых (лучи a и a' совпадают с OO'), B — точка пересечения прямых b и b' , C — точка пересечения прямых c и c' , A — точка пересечения прямых BC и OO' (черт. 457). Если бы точка пересечения прямых d и d' не



Черт. 457.



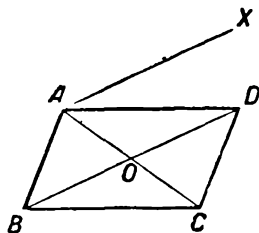
Черт. 458.

лежала на прямой BC , то они пересекали бы эту прямую в точках D и D' так, что $(ABCD) = (ABCD')$, откуда $DA:DB = D'A:D'B$. Так как существует единственная точка, делящая отрезок AB в определённом отношении по абсолютной величине и знаку (п. 188), то из последней пропорции следует, что точки D и D' совпадают. Следовательно, точка пересечения прямых d и d' лежит на прямой BC .

233. Допустим, что прямая CC' не проходит через точку пересечения P прямых AA' и BB' (черт. 458). Пусть прямая CP пересекает прямую OA' в некоторой точке C'' . При этом $(OABC) = (OA'B'C'')$. Так как по условию $(OABC) = (OA'B'C')$, то $(OA'B'C') = (OA'B'C'')$ и точки C' и C'' совпадают (сравнить решение упр. 232).

234. Если через вершину A параллелограмма провести прямую AX , параллельную диагонали BD (черт. 459), то эта прямая образует с прямыми AB , AD и AC гармоническую четвёрку (в силу теоремы п. 201).

Обратно, если четыре прямые AB , AD , AC и AX , выходящие из одной точки, образуют гармоническую четвёрку, то они параллельны сторонам и диагоналям параллелограмма. Действительно, проведя через

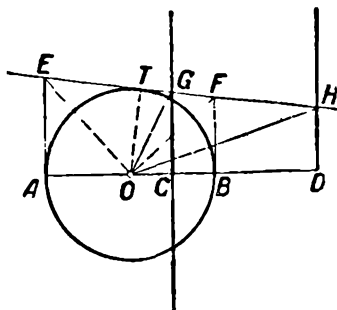


Черт. 459.

Если прямые AP и BQ , вместо того чтобы пересекаться в некоторой точке M , остаются параллельными друг другу (черт. 461), то сложное отношение четырёх прямых BP_0, BP_1, BP_2, BP равно сложному отношению прямых AQ_0, AQ_1, AQ_2, AQ , и предыдущее заключение сохраняет силу.

236. Пусть точки C и D делят гармонически диаметр AB окружности O (черт. 462) и перпендикуляры к AB в точках A, B, C, D пересекают касательную в произвольной точке T окружности соответственно в точках E, F, G, H .

Прямые AE, BF, CG, DH отсекают на прямых AB и EF пропорциональные отрезки; вследствие этого точки G и H делят гармонически отрезок EF и, следовательно, прямые OG и OH делят гармонически прямые OE и OF . Но прямые OE и OF перпендикулярны между собой (упр. 89); в силу п. 201, следствие II, прямая OF есть биссектриса угла GOH ; отсюда $OG:OH = GF:FH = CB:BD$. Итак, отношение $OG:OH$ сохраняет постоянное значение $CB:BD$ независимо от выбора касательной.



Черт. 462.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV (стр. 199).

237. 1°. Точка B лежит на поляре точки A (черт. 463); эта поляра проходит через точки прикосновения T и T' касательных из точки A к данной окружности C . Окружность C' , ортогональная к окружности C и имеющая точку A своим центром, также проходит через точки T и T' . Следовательно, точка B лежит на радикальной оси окружностей C и C' , а потому окружность C'' с центром B , ортогональная к C , в то же время ортогональна и к C' .

2°. Точка M — середина отрезка AB (черт. 464) — лежит в силу сказанного в п. 204 на радикальной оси точки A и данной окружности C . Отсюда следует, что MA^2 равняется степени точки M относительно данной окружности, т. е. квадрату касательной из точки M к данной окружности. Это и показывает, что окружность, имеющая MA своим радиусом, ортогональна к данной окружности.

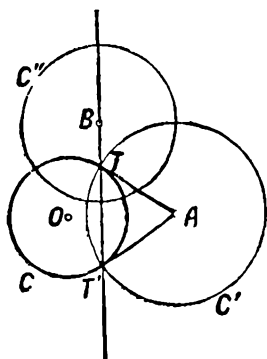
В том случае, когда одна из точек A и B лежит внутри данной окружности, ортогональность этой окружности к окружности, имеющей AB своим диаметром, непосредственно следует из п. 189, следствие.

Из треугольника OAB (черт. 465) имеем $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OH$, где H — точка пересечения прямой OA с полярной BT точки A . Но $OH \cdot OA = R^2$, и, следовательно, $OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2R^2$, или $AB^2 = (OA^2 - R^2) + (OB^2 - R^2)$.

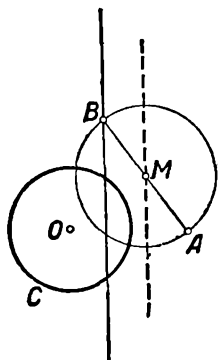
Так как $OA^2 - R^2$ и $OB^2 - R^2$ представляют собой степени точек

A и B относительно данной окружности, то мы можем сказать, что квадрат расстояния между двумя сопряжёнными точками равен сумме степеней этих точек относительно окружности.

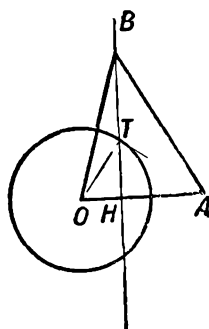
238. Если поляры точки A относительно трёх данных окружностей пересекаются в одной точке B , то точки A и B сопряжены относи-



Черт. 463.

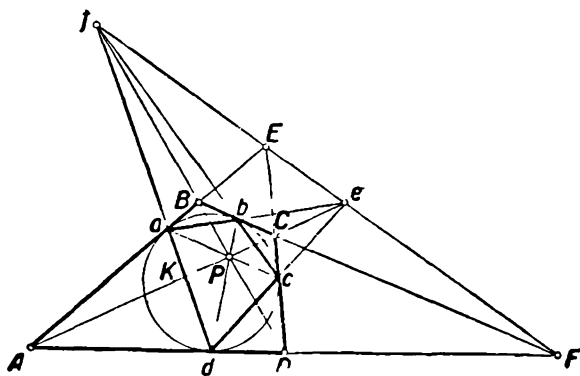


Черт. 464.



Черт. 465.

тельно каждой из данных окружностей. Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, ортогональна ко всем трём данным окружностям (упр. 237). Как геометрическое место точек A , так и геометрическое место точек B есть окружность, ортогональная к трём данным (п. 139).



Черт. 466.

239. Пусть $abcd$ — вписанный четырёхугольник (черт. 466), касательные в вершинах которого образуют описанный четырёхугольник $ABCD$, e и f — точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $abcd$, P — точка пересечения его диагоналей, E и F — точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$.

В силу п. 211 полярными точек e и f служат соответственно прямые Pf и Pe , а следовательно, в силу п. 205 точка пересечения P этих прямых имеет своей полярной прямой ef .

1°. Так как прямые ad , bc , ef , Pf проходят через одну точку f , то их полюсы A , C , P , e лежат на одной прямой. Так как прямые ab , cd , ef , Pe проходят через одну точку e , то их полюсы B , D , P , f лежат на одной прямой. Таким образом, диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку P .

Так как прямая Pe есть полярная точки f , то точка пересечения K прямых ad и Pe и точка f делят гармонически отрезок ad . Следовательно, прямые ac , bd , AC , BD , проходящие соответственно через точки a , d , K , f , образуют гармоническую четвёрку.

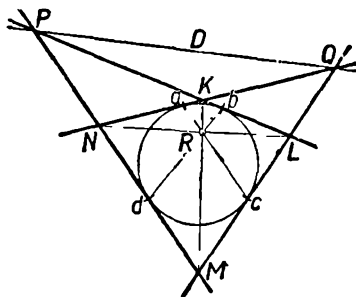
2°. Так как прямые ac , bd , AC , BD проходят через одну точку P , то их полюсы E , F , f , e лежат на одной прямой. Точки e и f делят гармонически отрезок EF , так как прямые EF , AC , BD представляют собой диагонали полного четырёхсторонника $ABCEFD$, а каждая диагональ полного четырёхсторонника делится гармонически двумя другими его диагоналями (п. 202).

240. Пусть a, b, c, d — точки прикосновения касательных из точек P и Q (черт. 467), K, L, M, N — вершины четырёхугольника, образованного этими касательными. Прямые ac , bd , KM , LN проходят через одну точку R (упр. 239, 1°). Так как прямые bd и ac — полярные точек P и Q , то PQ есть полярная точки R .

241. 1°. Так как любая окружность, проходящая через точки P и Q (черт. 468), ортогональна к обоим данным окружностям (упр. 152), то точки P и Q делят (п. 189, следствие) гармонически диаметры AB и CD обеих окружностей (обозначения те же, что и на черт. 400). Полярная точки P относительно любой из данных окружностей проходит через точку Q и перпендикулярна к линии центров.

2°. Пусть R — какая-либо точка, имеющая относительно обеих данных окружностей O_1 и O_2 одну и ту же полярную. Так как прямые RO_1 и RO_2 обе перпендикулярны к этой полярной, то они совпадают, и, следовательно, точка R лежит на линии центров. Если полярная точки R пересекает линию центров в точке R' , то точки R и R' делят гармонически как AB , так и CD и, следовательно, совпадают в силу упражнения 219а с точками P и Q .

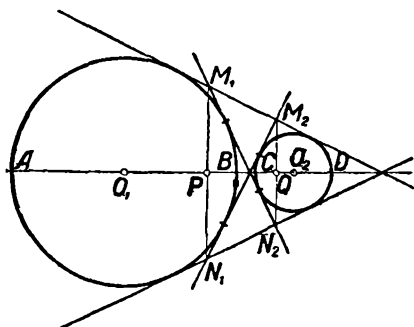
3°. Пусть M_1, N_1, M_2, N_2 — точки пересечения внешних и внутренних общих касательных (черт. 468). Касательные к окружности O_2 , проведённые из точек M_1 и N_1 , образуют описанный четырёхсторонник. Точка пересечения диагоналей этого четырёхсторонника, т. е. точка пересечения прямой M_2N_2 с линией центров, есть полюс прямой M_1N_1 .



Черт. 467.

относительно окружности O_2 (упр. 240). По той же причине точка пересечения прямой M_1N_1 с линией центров есть полюс прямой M_2N_2 относительно O_1 . Отсюда следует, что точки пересечения прямых M_1N_1 и M_2N_2 с линией центров делят гармонически как диаметр AB , так и CD и потому также совпадают с предельными точками P и Q .

4°. Так как точка M_1 лежит по только что доказанному на поляре точки Q , то полярная точки M_1 относительно любой из данных окружностей, т. е. прямая, соединяющая точки прикосновения касательных из точки M_1 к этой окружности, проходит через точку Q .



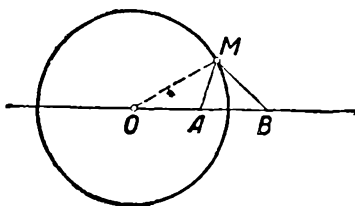
Черт. 468.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V (стр. 208).

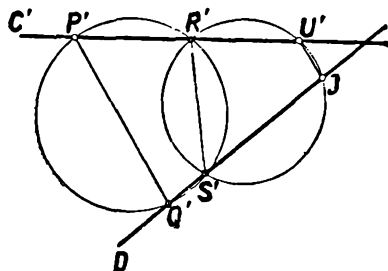
242. Пусть точки A и B взаимно обратны относительно окружности O (черт. 469) и M — произвольная точка этой окружности. Из равенства $OA \cdot OB = OM^2$ вытекает подобие треугольников OAM и OMB , откуда в свою оче-

редь следует, что $AM:BM = OA:OM$, так что отношение $AM:BM$ не зависит от выбора точки M .

243. Пусть в упражнении 68 прямая D пересекает окружность C в точке I (черт. 319). Инверсия с полюсом I преобразует данную прямую D в самоё себя (так как прямая D проходит через полюс



Черт. 469.



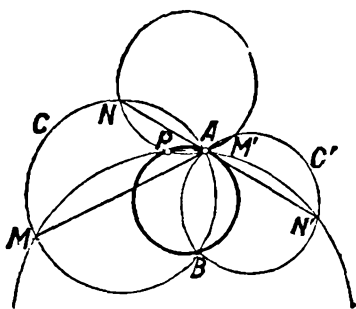
Черт. 470.

инверсии), данную окружность C — в некоторую прямую C' (так как окружность C проходит через полюс инверсии), данные точки P и Q — в некоторые точки P' и Q' , лежащие соответственно на прямых C' и D (черт. 470). Произвольная окружность, проходящая через данные точки P и Q и пересекающая вторично окружность C и прямую D в некоторых точках R и S , преобразуется в окружность, проходящую через точки P' и Q' (обратные точкам P и Q) и пересекающую вторично прямые C' и D в точках R' и S' (обратных точкам R и S).

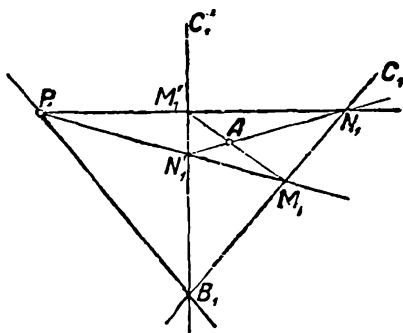
Наконец, прямая RS преобразуется в окружность $IR'S'$, проходящую через полюс инверсии I .

Утверждение упражнения 68, что все прямые RS пересекают окружность C в одной и той же точке U , преобразуется в утверждение, что все окружности $IR'S'$ пересекают прямую C' в одной и той же точке U' (обратной точке U). Но это прямо вытекает из упражнения 65, так как в силу последнего прямая IU' параллельна $P'Q'$.

244. Пусть C и C' — данные окружности, A и B — точки их пересечения (черт. 471). Выполним инверсию с полюсом в точке A . Данные окружности C и C' преобразуются в две прямые линии C_1 и C_1' (черт. 472), пересекающиеся в точке B_1 , обратной точке B . Прямые



Черт. 471.



Черт. 472.

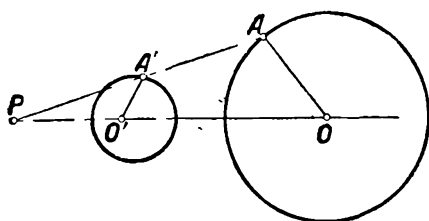
MM' и NN' , проходящие через полюс инверсии A , преобразуются каждая в самую себя; окружности AMN' и $AM'N$ преобразуются в прямые M_1N_1' и $M_1'N_1$. Таким образом, приходим к следующему построению: через точку A проводим две произвольные прямые M_1M_1' и N_1N_1' , которые пересекают две данные прямые C_1 и C_1' в точках M_1, M_1', N_1, N_1' . Геометрическое место точек пересечения P_1 прямых M_1N_1' и $M_1'N_1$ есть (согласно п. 203) прямая, проходящая через точку B_1 , а именно поляра точки A относительно угла со сторонами C_1 и C_1' .

Этой прямой соответствует в нашей инверсии некоторая окружность, проходящая через точки A и B . Эта окружность и будет геометрическим местом точек P , обратных точкам P_1 , т. е. точек пересечения P окружностей AMN' и $AM'N$.

245. Окружности C , имеющие общую радикальную ось, можно охарактеризовать как окружности, ортогональные к двум данным окружностям C' и C'' с центрами на этой радикальной оси. Следовательно, окружности C_1 , обратные окружностям C , будут ортогональны к окружностям C_1' и C_1'' , обратным окружностям C' и C'' (так как угол между двумя окружностями сохраняется при инверсии). Поэтому окружности C_1 будут иметь общую радикальную ось — линию центров окружностей C_1' и C_1'' .

246. Пусть A — произвольная точка данной окружности, O — её центр, A' и O' — точки, обратные точкам A и O , P — полюс инверсии и k — её степень (черт. 473). В силу п. 218 имеем $OA = \frac{k \cdot A'O'}{PA' \cdot PO}$. Из условия $OA = R = \text{const}$ следует, что $A'O' : A'P = (R \cdot PO) : k = \text{const}$, так что преобразованная окружность есть геометрическое место точек A' , отношение расстояний которых от точек O' и P постоянно.

247. Центр M новой окружности есть точка пересечения прямых, пересекающих эту окружность под прямым углом. Следовательно,



Черт. 473.

точка M , обратная центру новой окружности, есть точка пересечения окружностей, ортогональных к данной окружности и проходящих через полюс инверсии. Другими словами, M есть точка, обратная полюсу инверсии относительно данной окружности (п. 216).

248. Две concentric окружности характеризуются

тем, что существует бесчисленное множество прямых, ортогональных одновременно к обеим окружностям (прямые, проходящие через общий центр), но не существует окружностей, ортогональных одновременно к ним обеим (так как две concentric окружности не имеют радикальной оси).

Следовательно, чтобы преобразовать с помощью инверсии две данные окружности в две concentric окружности, надо преобразовать окружности, ортогональные к двум данным, в прямые линии. А для этого надо принять за полюс инверсии одну из общих точек P или Q (упр. 152) окружностей, ортогональных к двум данным, т. е. одну из предельных точек данных окружностей.

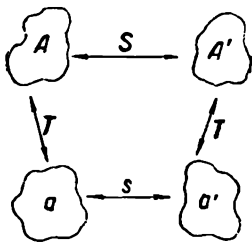
249. Пусть A, B, C — данные точки, и A', B', C' — точки, им обратные, O — искомый полюс инверсии. Если точка C' есть середина отрезка $A'B'$, то окружность, построенная на $A'B'$ как на диаметре, имеет C' своим центром; следовательно (сравнить упр. 247), C есть точка, обратная точке O относительно окружности, имеющей AB своим диаметром. Иначе говоря, точки O и C гармонически сопряжены относительно A и B . Итак, искомым полюсом инверсии является точка, гармонически сопряжённая с одной из трёх данных точек относительно двух других.

250. Пусть фигуры A и A' преобразуются одна в другую с помощью инверсии S^1 с полюсом O и степенью k . Пусть далее инверсия T с полюсом P и степенью k_1 преобразует фигуры A и A' в две новые фигуры a и a' . Мы должны показать, что фигуры a и a'

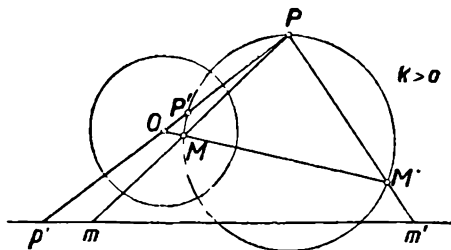
¹⁾ Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что здесь одной буквой S (или T) обозначена не геометрическая фигура (точка, прямая, окружность и т. п.), а *инверсия*.

соответствуют друг другу также в некоторой инверсии s , и определить полюс последней (связь между четырьмя фигурами показана схематически на черт. 474). Для этого достаточно, очевидно, показать, что:

1) прямая, соединяющая любые две соответственные точки m и m' фигур a и a' , проходит через одну и ту же точку Q (независимо от выбора точки m) и



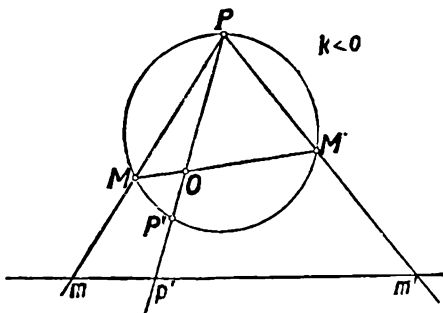
Черт. 474.



Черт. 475.

2) произведение $Qm \cdot Qm'$ не зависит от выбора пары соответственных точек m и m' . Докажем эти два положения.

1°. Пусть M и M' — точки, соответствующие точкам m и m' в инверсии T (черт. 475 и 476). Так как окружность PMM' (или прямая PMM' , если эти три точки лежат на одной прямой) проходит через две точки M и M' , соответствующие одна другой в инверсии S , то она преобразуется инверсией S в самой себя; поэтому окружность (или прямая) PMM' проходит через точку P' , которая соответствует точке P в инверсии S . Так как точки M, M' и P' лежат на одной окружности (или на одной прямой) с полюсом P инверсии T , то соответствующие им в инверсии T точки m, m' и p' лежат на одной прямой.



Черт. 476.

Итак, любые две соответственные точки m и m' фигур a и a' лежат на одной прямой с точкой p' . Последняя точка не зависит от выбора точки m : она получается, если выполнить над точкой P инверсию S , а затем над полученной точкой P' — инверсию T . Точка p' и будет, как мы сейчас увидим, тем полюсом Q инверсии s , о котором мы говорили выше.

2°. В силу формулы, выведенной в п. 218, имеем:

$$MP' = \frac{k \cdot PM'}{OM' \cdot OP}, \quad (1)$$

$$M'P' = \frac{k \cdot PM}{OM \cdot OP}, \quad (2)$$

$$p'm = \frac{k_1 \cdot MP'}{PM \cdot FP'}, \quad (3)$$

$$p'm' = \frac{k_1 \cdot M'P'}{PM' \cdot P'P'}. \quad (4)$$

Заменяя в равенствах (3) и (4) отрезки MP' и $M'P'$ их выражениями (1) и (2), находим $p'm = \frac{k \cdot k_1 \cdot PM}{OM' \cdot OP \cdot PM \cdot PP'}$ и $p'm' = \frac{k \cdot k_1 \cdot PM}{OM \cdot OP \cdot PM' \cdot PP'}$. Перемножая два последние равенства, получим $p'm \cdot p'm' = \frac{k^2 \cdot k_1^2}{OM \cdot OM' \cdot OP^2 \cdot PP'^2}$. Наконец, заменяя здесь $OM \cdot OM'$ через k , получаем:

$$p'm \cdot p'm' = \frac{k \cdot k_1^2}{OP^2 \cdot PP'^2} = \text{const.} \quad (5)$$

В этом выводе отрезки $p'm$ и $p'm'$ рассматриваются лишь по абсолютной величине. Но в зависимости от того, будет ли $k > 0$ или $k < 0$, точка O будет лежать вне окружности $PP'MM'$ или же внутри её, и точки M и M' будут при $k > 0$ лежать на одной и той же из двух дуг, на которые точки P и P' делят эту окружность (черт. 475), а при $k < 0$ — на двух различных дугах (черт. 476). Следовательно, точки m и m' будут при $k > 0$ лежать по одну сторону от точки p' , а при $k < 0$ — по разные стороны от p' . Таким образом, равенство (5) имеет место и по знаку.

Итак, точки m и m' , соответствующие в инверсии T произвольной паре точек M и M' , взаимно обратных в инверсии S , не только лежат на одной прямой с точкой p' , но и удовлетворяют условию $p'm \cdot p'm' = \text{const.}$ Другими словами, точки m и m' соответствуют друг другу в некоторой инверсии s ; полюс p' этой инверсии мы определили выше, её степень равна правой части равенства (5).

Пусть теперь степень инверсии S — положительна: $k > 0$. В таком случае существует бесчисленное множество точек M , каждая из которых совпадает с точкой M' , соответствующей M в инверсии S . Эти точки M (или M') преобразуются инверсией T в точки m , каждая из которых совпадает с соответствующей ей в инверсии s точкой m' . Эти точки m и образуют окружность инверсии s .

Примечания: 1°. Приведённое доказательство теряет силу, если точка P совпадает с O или с P' , как это видно из соотношений (1) — (4).

Если полюс O инверсии S совпадает с полюсом P инверсии T , то все четыре точки M, M', m, m' , очевидно, лежат на одной прямой с точкой O (или, что то же, с P), и мы имеем $Pm = \frac{k_1}{PM} = \frac{k_1}{OM}$; $Pm' = \frac{k_1}{PM'} = \frac{k_1}{OM'}$, откуда $Pm \cdot Pm' = Om \cdot Om' = \frac{k_1^2}{OM \cdot OM'} = \frac{k_1^2}{k}$. Таким образом, теорема сохраняет силу и в этом случае.

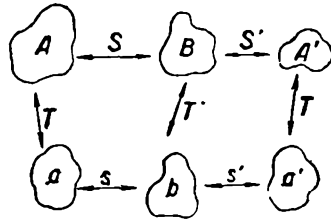
Если точка P совпадает с P' , то полюс P инверсии T лежит на окружности инверсии S ; эта окружность преобразуется инверсией T в прямую

линию. Точки M и M' , взаимно обратные относительно окружности инверсии S , преобразуются в точки m и m' , симметричные относительно этой прямой линии (сравнить п. 216). Инверсия s обращается в симметрию относительно прямой.

2°. Другое решение, более короткое, но не столь непосредственное, как только что приведенное, имеется во второй части курса Адамара (пп. 700, 914).

251. 1°. Если окружности инверсий S и S' не имеют общих точек, то примем за полюс P инверсии T одну из их предельных точек. Инверсия T преобразует окружности инверсий S и S' в две concentric окружности (упр. 248) s и s' , фигуры A и B , взаимно обратные относительно S , — в фигуры a и b , взаимно обратные относительно s (упр. 250), фигуры B и A' , взаимно обратные относительно S' , — в фигуры b и a' , взаимно обратные относительно s' (связь между всеми этими фигурами показана схематически на черт. 477). Так как окружности s и s' — concentric, то фигуры a и a' — гомотетические, как две фигуры, обратные одной и той же фигуре b относительно одного и того же полюса (общего центра окружностей s и s' ; сравнить п. 215).

Если окружности инверсий S и S' имеют общую точку, то примем эту общую точку (или одну из их общих точек) P за полюс инверсии T . Инверсия T преобразует окружности инверсий S и S' в две прямые линии s и s' , фигуры A и B — в две фигуры a и b , симметричные относительно s , фигуры B и A' — в две фигуры b и a' , симметричные относительно s' . Так как фигуры a и a' получаются одна из другой с помощью двух симметрий, то они равны.



Черт. 477.

2°. Если окружности инверсий S и S' не имеют общих точек, то, не изменяя фигур a и a' , можно заменить пару инверсий относительно concentric окружностей s и s' равносильной ей парой инверсий относительно окружностей s_1 и s_1' . Окружности s_1 и s_1' имеют с окружностями s и s' общий центр и то же отношение радиусов (следует из того, что коэффициент подобия фигур a и a' равен, согласно п. 215, отношению степеней инверсий относительно окружностей s и s'). Следовательно, пара инверсий S и S' равносильна паре инверсий S_1 и S_1' относительно окружностей, обратных окружностям s_1 и s_1' в инверсии T . Эта пара инверсий S_1 и S_1' , как и пара инверсий относительно s_1 и s_1' , может быть выбрана бесчисленным множеством способов. В частности можно выбрать инверсию s_1 (или s_1') так, чтобы окружность этой инверсии проходила через полюс P инверсии T . При этом инверсия S_1 (или S_1') обращается в симметрию относительно прямой. Такой выбор инверсии s_1 (или s_1') невозможен только в том случае, когда точка P совпадает с общим центром окружностей инверсий s и s' . При этом

окружности инверсий S и S' также будут концентрическими, а фигуры A и A' — подобными.

Если окружности инверсий S и S' имеют общие точки, то те же самые рассуждения относятся к возможности замены прямых s и s' другой парой прямых s_1 и s_1' в согласии с п. 102а. В частности можно выбрать прямую s_1 (или s_1') так, чтобы она проходила через полюс P инверсии T . При этом инверсия S_1 (или S_1') обращается в симметрию относительно прямой.

3°. Равные фигуры a и a' , полученные из A и A' с помощью инверсии T , получаются одна из другой путём поступательного перемещения, если оси симметрий s и s' параллельны, т. е. если окружности инверсий S и S' касаются одна другой.

4°. Если окружности инверсий S и S' не имеют общих точек, то, выполняя несколько раз подряд последовательно операции S и S' , мы будем получать всё новые и новые фигуры A, A', A'', \dots , так как, выполняя несколько раз подряд последовательно операции s и s' , мы будем получать всё новые и новые фигуры a, a', a'', \dots , имеющие общий центр подобия.

То же самое относится и к случаю, когда окружности инверсий S и S' касаются одна другой.

Если же окружности S и S' пересекаются в двух точках, то фигуры a и $a', a' \text{ и } a'', \dots$ получаются одна из другой путём поворота на один и тот же угол около одной и той же точки. Следовательно, если угол поворота соизмерим с полной окружностью, то одна из фигур a', a'', \dots , скажем $a^{(n)}$, совпадает с a ; при этом фигура $A^{(n)}$, обратная $a^{(n)}$ в инверсии T , совпадает с A . Так как инверсия T сохраняет углы между линиями (п. 219), то это будет в том случае, когда угол между окружностями инверсий S и S' будет соизмерим с полной окружностью.

252. Пусть выполнены последовательно инверсии S_1, S_2, \dots, S_k , имеющие положительные степени¹⁾. Последовательность инверсий S_1, S_2 можно заменить, если полюсы инверсий S_1 и S_2 не совпадают, симметрией I_1 относительно некоторой прямой и некоторой инверсией S_2' (упр. 251, 2°). Таким образом данная последовательность инверсий заменится через $I_1 S_2' S_3 \dots S_k$. Далее заменяем пару инверсий $S_2' S_3$ симметрией I_2 и инверсией S_3' и получаем последовательность $I_1 I_2 S_3' \dots S_k$. Продолжая таким образом, последовательность инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ можно, вообще говоря, заменить последовательностью $I_1 I_2 \dots I_{k-1} S_k'$, состоящей из нескольких симметрий и одной инверсии. Это рассуждение требует видоизменения, если инверсии S_1 и S_2 имеют общий полюс. В этом случае можно сначала заменить пару инверсий $S_2 S_3$ (опять-таки на основании упр. 251, 2°) другой парой инверсий $S_2^* S_3^*$, а-затем уже заменить пару $S_1 S_2^*$ через $I_1 S_2'$ и получить последовательность $I_1 S_2' S_3^* \dots S_k$. Такое же видоизменение при-

¹⁾ Возможно, что среди этих инверсий имеются и симметрии относительно прямой (п. 216).

дётся внести во всех случаях, когда в процессе замены две последовательные инверсии будут иметь общий полюс, если только эти две инверсии не будут последними.

Итак, данную последовательность инверсий можно заменить последовательностью $l_1 l_2 \dots l_{k-1} S'_k$ или последовательностью $l_1 l_2 \dots l_{k-2} S'_{k-1} S_k$, где инверсии S'_{k-1} и S_k имеют общий полюс. Но в последнем случае первоначальная и преобразованная фигуры подобны между собой, так как последовательность $S'_{k-1} S_k$ даёт гометию (п. 215). Следовательно, *последовательность инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ можно заменить через $l_1 l_2 \dots l_{k-1} S'_k$, если только первоначальная и преобразованная фигуры не будут подобными.*

Заметим теперь, что последовательность симметрий $l_1 l_2 \dots l_{k-1}$ можно заменить последовательностью самое большее трёх симметрий. Действительно, если выполнено чётное число симметрий, то данная фигура преобразуется в равную ей фигуру, имеющую то же направление вращения. Следовательно, эта последовательность симметрий равносильна (п. 102) вращению или поступательному перемещению, т. е. последовательности двух симметрий (п. 102а). Если же выполнено нечётное число симметрий, то данная фигура превращается в равную ей фигуру, имеющую противоположное направление вращения, и потому данная последовательность симметрий равносильна (упр. 95) трём, а в частных случаях — одной симметрии. Таким образом, мы доказали, что *данную последовательность инверсий можно заменить одной инверсией, которой предшествует одна, две или три симметрии, если только первоначальная и окончательная фигуры не будут подобными между собой.*

Если бы мы пожелали, чтобы симметрии не предшествовали единственной инверсии, а следовали за ней, то мы начали бы с замены $S_{k-1} S_k$ через $S'_{k-1} l_k$, где l_k — симметрия, заменили бы далее $S_{k-2} S'_{k-1}$ через $S'_{k-2} l_{k-1}$, и т. д.

Примечание. Указанные выше замены $S_2 S_3$ через $S_2^* S_3^*$ и $S_1 S_2^*$ через $l_1 S'_2$ также оказались бы невыполнимыми, если бы не только две, но все три инверсии S_1, S_2, S_3 имели общий полюс. Но в этом случае последовательность $S_1 S_2$ даёт гометию H с центром подобия в полюсе инверсий, а последовательность гометии H и инверсии S_3 — инверсию с тем же самым полюсом и другой степенью. Итак, последовательность трёх инверсий с общим полюсом равносильна одной инверсии с тем же полюсом.

253. Пусть данная последовательность инверсий содержит инверсии как с положительной, так и с отрицательной степенью. Инверсию S с полюсом O и отрицательной степенью $-k$ можно, очевидно, заменить последовательностью симметрии относительно полюса O и инверсии S' с полюсом O и положительной степенью k . В свою очередь симметрию относительно O можно заменить последовательностью симметрий l' и l'' относительно каких-либо двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через O . Таким образом инверсию S с отрицательной степенью можно заменить последовательно-

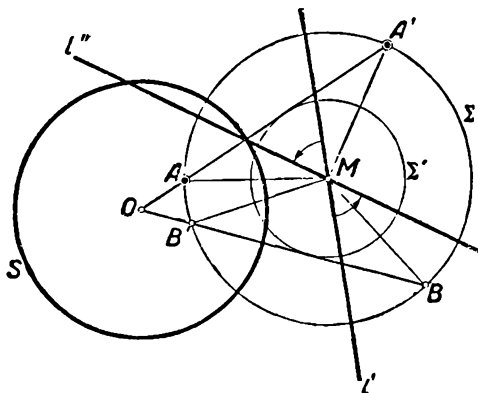
стью трёх инверсий с положительной степенью (в числе которых две симметрии).

В силу этого замечания можно считать, что данная последовательность состоит из нечётного числа инверсий с положительной степенью, в числе которых могут быть и симметрии.

Эту последовательность *нечётного* числа инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ можно заменить (если первоначальная и преобразованная фигуры не подобны между собой) одной инверсией, за которой следуют две симметрии. В самом деле, при выполнении нечётного числа инверсий направление вращения изменяется на обратное, а потому число симметрий, о которых говорится в

упражнении 252, будет в точности равно двум. Итак, рассматриваемое преобразование сводится к инверсии S , сопровождаемой двумя симметриями относительно прямых l' и l'' .

Если прямые l' и l'' параллельны, то задача сводится к нахождению двух точек A и A' , обратных в инверсии S , и притом таких, чтобы отрезок $A'A$ был равен по величине удвоенному расстоянию между осями l' и l'' и в то же время перпенди-



Черт. 478.

кулярны к этим осям. Если обозначить через O полюс инверсии S , то известными будут разность отрезков OA' и OA , равная удвоенному расстоянию между прямыми l' и l'' , и произведение тех же отрезков, равное степени инверсии. Задача сводится к рассмотренной в п. 155, построение 8. Получаются два решения.

Если оси l' и l'' пересекаются в точке M (черт. 478), то задача сводится к нахождению двух точек A и A' , обратных в инверсии S , и притом таких, что точка A получается из A' путём поворота около точки M на угол, равный удвоенному углу между осями l' и l'' и имеющий то же самое направление. Точки A и A' лежат на окружности Σ с центром M ; эта окружность ортогональна к окружности инверсии S , так как она проходит через две взаимно обратные точки. Угол, под которым хорда AA' видна из центра M окружности Σ , известен, а потому можно считать известной длину этой хорды. Таким образом, прямая AA' может быть построена (сравнить решение задачи 114) как проходящая через точку O касательная к определённой окружности Σ' , концентрической с Σ . Задача имеет два решения (точки A и B на черт. 478)¹⁾,

¹⁾ Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что вторые точки пересечения A' и B' прямых OA и OB с окружностью Σ условию задачи не удовлетворяют.

если точка M лежит вне окружности инверсии S , одно решение (а именно самоё точку M), если M лежит на окружности инверсии S , и не имеет решений, если M лежит внутри окружности инверсии S .

253а. Пусть в данную окружность Σ требуется вписать многоугольник $AA_1 \dots A_{k-1}$, стороны которого $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{k-1}A$ проходят соответственно через данные точки O_1, O_2, \dots, O_k или параллельны данным прямым. Рассмотрим последовательность инверсий S_1, S_2, \dots, S_k , имеющих своими полюсами точки O_1, O_2, \dots, O_k , а своими степенями — степени этих точек относительно окружности Σ . Если какая-либо сторона многоугольника вместо того, чтобы проходить через данную точку, должна быть параллельна данной прямой l , то под соответствующей инверсией будем понимать симметрию относительно диаметра окружности Σ , перпендикулярного к прямой l .

Инверсия S_1 преобразует точку A в точку A_1 , инверсия S_2 — точку A_1 в A_2 , ..., инверсия S_k — точку A_{k-1} снова в точку A . Последовательность инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ преобразует точку A в самоё себя.

Если все стороны многоугольника должны быть параллельны данным прямым, то решение задачи значительно упрощается.

Действительно, в этом случае произведение симметрий относительно k диаметров окружности Σ даёт либо симметрию относительно одного из её диаметров, либо поворот около центра окружности, либо тождество. В первом случае искомыми точками будут точки пересечения оси симметрии с окружностью Σ , во втором — задача не имеет решений, в третьем — за A можно принять любую точку окружности Σ .

Поэтому мы будем предполагать, что сторона AA_1 проходит через данную точку O_1 (а не параллельна данной прямой). Таким образом задача сводится к следующей.

Некоторая окружность Σ преобразуется сама в себя данной последовательностью инверсий S_1, S_2, \dots, S_k ¹⁾; построить на этой окружности точку, которая преобразуется этой последовательностью инверсий самоё в себя. При этом степени инверсий могут быть как положительными, так и отрицательными; некоторые инверсии могут обращаться в симметрии. Однако первая инверсия S_1 не есть симметрия. Число инверсий может быть как чётным, так и нечётным; начнём с рассмотрения чётного числа инверсий.

Пусть Q' — точка, соответствующая полюсу O_1 первой инверсии S_1 в последовательности остальных инверсий $S_2 S_3 \dots S_k$ (иначе говоря, точка, соответствующая точке, лежащей в бесконечности, в данной последовательности инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$).

Чтобы охватить все возможные случаи, будем предполагать, что инверсия S_i не обращается в симметрию, а все последующие инверсии $S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_k$ будут симметриями; возможно, конечно, что S_k отлична от симметрии; в этом случае будем полагать $l = k$. Обозначим

¹⁾ В первоначально поставленной задаче о вписанном многоугольнике каждая инверсия S_1, S_2, \dots, S_k в отдельности преобразует окружность Σ в самоё себя; однако для дальнейшего достаточно этого более общего предположения.

теперь через P ту точку, которой в последовательности инверсий $S_1 S_2 \dots S_{l-1}$ соответствует полюс O_l инверсии S_l (иначе говоря, ту точку, которой в данной последовательности инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ соответствует точка, лежащая в бесконечности). Точку P можно получить, выполняя над точкой O_l последовательно инверсии $S_{l-1}, S_{l-2}, \dots, S_1$.

Какая-либо прямая a , проходящая через точку P , преобразуется последовательностью инверсий $S_1 S_2 \dots S_{l-1}$ в окружность или прямую, проходящую через точку O_l , а данной последовательностью инверсий — в некоторую прямую линию a' .

Так как инверсия S_l преобразует прямую a в окружность или прямую, проходящую через точку O_l , а последовательность инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ — точку O_l в точку Q' , то прямая a' проходит через точку Q' . Итак, данная последовательность инверсий преобразует каждую прямую a , проходящую через точку P , в некоторую прямую a' , проходящую через точку Q' .

Если теперь A — искомая точка, то последовательность инверсий $S_1 S_2 \dots S_k$ должна преобразовывать прямую PA в прямую $Q'A$. При этом угол между прямой PA и окружностью Σ должен быть равен по величине углу между прямой $Q'A$ и окружностью Σ в силу п. 219. Более того, из соображений, развитых в том же п. 219, следует, что при каждой инверсии углы, образованные окружностями и прямыми, сохраняют свою величину, но меняют своё направление на обратное. Так как число инверсий S_1, S_2, \dots, S_k , по предположению, чётно, то углы, образованные прямыми PA и $Q'A$ с окружностью Σ , должны быть не только равны, но и одинаково направлены. Отсюда следует, что прямые PA и $Q'A$ совпадают.

Итак, для определения искомого точки A достаточно построить, как было указано выше, точки P и Q' ; прямая, соединяющая эти точки, пересекает окружность Σ в искомым точках. Задача может иметь два решения, одно решение или не иметь ни одного решения.

Описанное построение нуждается в видоизменениях при $l = 1$ (точка P не существует), а также при совпадении точек P и Q' . На рассмотрении этих частных случаев мы останавливаться не будем.

Для решения задачи в случае нечётного числа инверсий можно присоединить к последовательности данных инверсий ещё инверсию S_0 относительно самой окружности Σ и решить ту же задачу для последовательности уже чётного числа инверсий $S_1 S_2 \dots S_k S_0$. Действительно, точки, которые будут преобразовываться в себя данной последовательностью инверсий, будут совпадать с теми, которые преобразуются в себя новой последовательностью инверсий.

Примечание. Другое решение этого упражнения см. в задаче 391.

254. 1°. Пусть O — центр данной окружности, M' и N' — точки пересечения прямых TM и TN с окружностью (черт. 479). Выполним инверсию с полюсом T и степенью, равной квадрату отрезка TT' . При этом окружность, имеющая отрезок TT' своим диаметром,

Последнее равенство показывает, что точка P лежит на радикальной оси точки O и данной окружности. Если точка O лежит вне данной окружности, то геометрическим местом точек P будет отрезок $P'P''$ этой радикальной оси, заключённый между касательными OT' и OT'' из точки O к данной окружности. Если точка O лежит внутри данной окружности, то геометрическим местом точек P будет вся эта радикальная ось.

256. Под углом между двумя окружностями можно понимать любой из двух дополнительных углов между касательными в их общей точке — другими словами, угол между радиусами, проведёнными в их общую точку, или угол, ему дополнительный. В тех случаях, когда придётся делать различие между этими двумя углами, мы будем говорить, что „угол между двумя окружностями *строго* равен α “, понимая под этим, что α есть в точности угол между радиусами, проведёнными в одну из точек пересечения (а не угол, ему дополнительный).

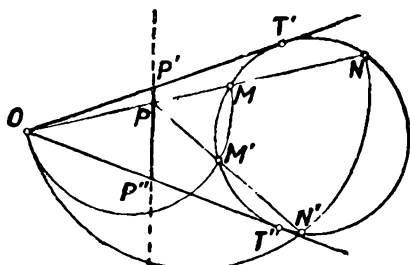
Две окружности, касающиеся одна другой, образуют угол, строго равный $2d$, в случае внешнего касания, и угол, строго равный 0 , — при внутреннем касании.

Если речь идёт о пересечении прямой и окружности, то можно произвольно назвать „внутренней“ по отношению к прямой одну из двух полуплоскостей, на которые прямая делит плоскость, и рассматривать угол между радиусом, проведённым в одну из точек пересечения, и перпендикуляром к прямой, проведённым во „внутреннюю“ область.

Доказанное в п. 227 предложение: „всякая окружность Σ , которая пересекает окружности C и C' под одним и тем же углом, пересекает их в четырёх попарно антигомологических точках, и обратно“ — можно теперь высказать в следующей более точной форме.

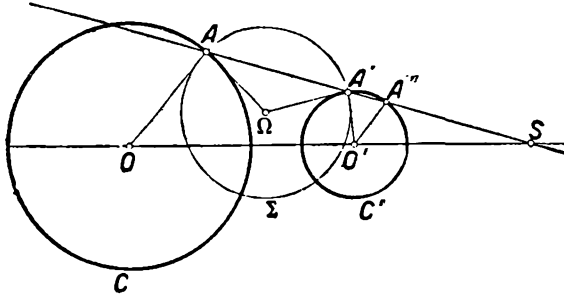
Всякая окружность (или прямая) Σ , которая пересекает окружности C и C' под *строго равными* углами, пересекает их в четырёх точках, попарно антигомологических относительно *внешнего* центра подобия; всякая окружность (или прямая) Σ , которая пересекает окружности C и C' под *строго дополнительными* углами, пересекает их в четырёх точках, попарно антигомологических относительно *внутреннего* центра подобия.

Действительно, пусть O , O' и Ω — центры окружностей C , C' и Σ (черт. 481 и 482), A и A' — две антигомологические (согласно п. 227) точки пересечения окружности Σ с окружностями C и C' , A'' — вторая точка пересечения прямой AA' с окружностью C' . Если углы $\angle A\Omega O$ и $\angle A'\Omega O'$ равны, то точки O и O' лежат по одну сторону от



Черт. 480.

прямой AA' (черт. 481) и, следовательно, параллельные радиусы OA и $O'A''$ направлены в одну и ту же сторону, так что прямая AA' проходит через внешний центр подобия S . Аналогичное рассуждение применимо и к тому случаю, когда углы $\angle A'O$ и $\angle A'O'$ дополнительные (черт. 482). Вместо внешнего центра подобия получится внутренних.



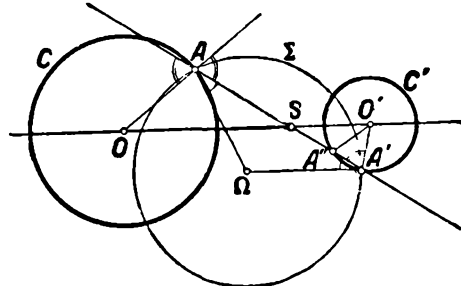
Черт. 481.

Переходим теперь к решению поставленной задачи. Совокупность окружностей, пересекающих окружности A и B под углами, соответственно равными α и β , можно распределить в четыре группы. А именно, отнесём к одной группе все окружности, пересекающие A и B под углами, *строго* равными

- | | |
|----------------------------------|-------------------|
| (1) α и β | для первой группы |
| (2) $2d - \alpha$ и $2d - \beta$ | „ второй „ |
| (3) α и $2d - \beta$ | „ третьей „ |
| (4) $2d - \alpha$ и β | „ четвёртой „ |

Рассмотрим окружности групп (1) и (2) параллельно, указывая каждый раз на первом месте (без скобок) то, что относится к окружностям группы (1) и далее в скобках то, что относится к окружностям группы (2).

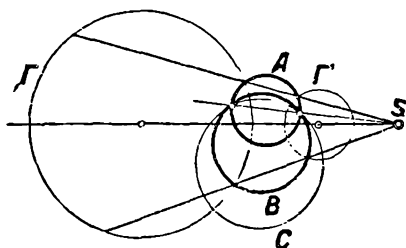
Пусть Γ — некоторая окружность первой группы, т. е. окружность, пересекающая окружности A и B (черт. 483) под углами, строго равными α и β ; пусть далее некоторая другая окружность Γ' принадлежит к первой (ко второй) группе, т. е. пересекает окружности A и B



Черт. 482.

под углами, строго равными α и β (под углами, строго равными $2d - \alpha$ и $2d - \beta$). Так как окружность A пересекает окружности Γ и Γ' под строго равными (под строго дополнительными) углами, то она

пересекает их в четырёх точках, попарно антигомологических относительно внешнего (внутреннего) центра подобия S окружностей Γ и Γ' , и то же имеет место для окружности B . Отсюда следует, что точка S имеет относительно окружностей A и B одну и ту же степень, а именно степень, равную степени той инверсии I с полюсом S , которая преобразует Γ в Γ' (и окружности A и B в самих себя). Относительно любой окружности C , имеющей с A и B общую радикальную ось, точка S имеет ту же самую степень. Следовательно, окружность C преобразуется инверсией I сама в себя и потому она пересекает окружности

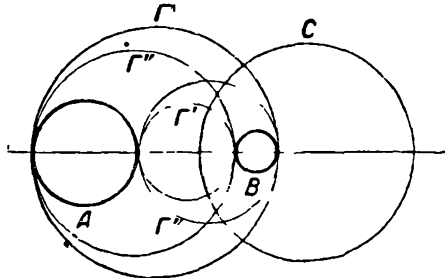


Черт. 483.

Γ и Γ' под строго равными (пополнительными) углами. Итак, все окружности Γ' , пересекающие окружности A и B под углами, строго равными α и β (строго равными $2d - \alpha$ и $2d - \beta$), пересекают окружность C под углом, строго равным (строго пополнительным) тому, под которым его пересекает окружность Γ . Если не делать различия между двумя углами, кото-

рые окружность Γ' образует с окружностью C , то можно будет сказать, что все окружности Γ' , принадлежащие к группам (1) и (2), пересекают окружность C под одними и теми же углами. В этом смысле они принадлежат к одному семейству. Теорема сохраняет силу, если одна из окружностей Γ или Γ' обращается в прямую.

Тем же свойством обладают окружности Γ'' , отнесённые к группам (3) и (4); действительно, группы окружностей (3) и (4) получаются из групп (1) и (2) путём замены значения β данного угла на $2d - \beta$. Эти окружности образуют второе семейство.



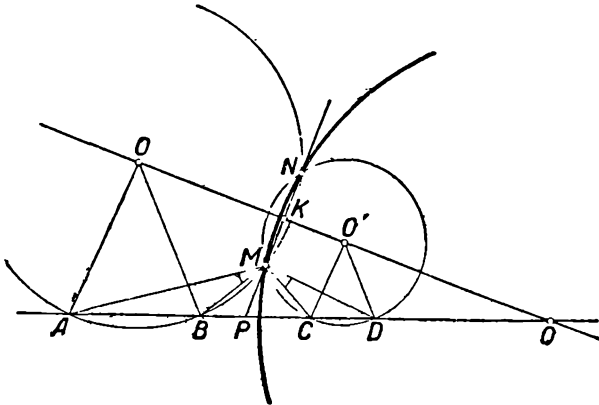
Черт. 484.

Примечание. Распределение окружностей, пересекающих две данные окружности A и B под углами, соответственно равными α и β , в два семейства существенно, так как окружности *различных* семейств могут пересекать окружность C , имеющую с A и B общую радикальную ось, под углами, *не равными между собой и не дополняющими один другой до двух прямых*.

В этом можно убедиться хотя бы на следующем простом примере. Пусть окружности A и B (черт. 484) взаимно обратны относительно окружности C ; все три окружности имеют общую радикальную ось в силу п. 228. Оба угла α и β выбраны равными нулю. Обе изображённые на чертеже окружности Γ и Γ' (образующая с A и B углы, строго равные нулю, и образующая с A и B углы, строго равные $2d$) ортогональны к C (п. 228). В то же время обе окружности Γ'' (образующие с одной из окружностей A и B угол, строго равный нулю, с другой — угол, строго равный $2d$) заведомо

не ортогональны к C . В случае, изображённом на чертеже, окружности Γ' принадлежат к группам (3) и (4) и пересекают C под строго дополнительными углами.

257. Пусть O и O' — центры двух пересекающихся окружностей, проходящих — первая через точки A и B , вторая — через точки C и D и обладающих тем свойством, что из их точек отрезки AB и CD видны под равными или дополнительными углами. Пусть далее M и N — точки пересечения обеих окружностей, K — середина хорды MN , P и Q — точки пересечения прямых MN и OO' с прямой AB .



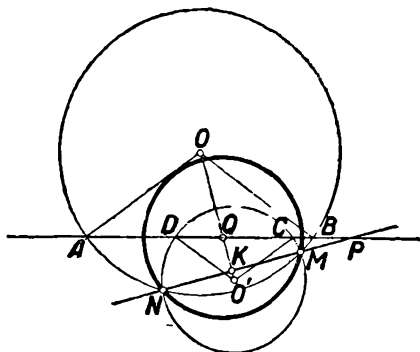
Черт. 485.

Предположим сначала, что отрезки AB и CD расположены один вне другого и что точки A, B, C и D следуют на прямой в том порядке, в каком они перечислены (черт. 485). В этом случае углы AMB и CMD не могут быть дополнительными, так как их сумма заведомо меньше 180° , и могут быть только равными и притом острыми. Дуги AMB и CMD будут каждая больше полуокружности, и потому центры O и O' necessarily лежат по одну сторону от данной прямой. Углы AOB и $CO'D$ также будут равны. Следовательно, радиусы OA и $O'C$ параллельны (а также OB и $O'D$), и точка Q есть внешний центр подобия обеих окружностей. Поэтому точка Q делит отрезок AC внешним образом в отношении $AQ:CQ=AO:CO'=AB:CD$ и не зависит от выбора окружностей O и O' . Инверсия с полюсом Q и степенью, равной $QA \cdot QD = QB \cdot QC$, преобразует окружности O и O' одну в другую, а каждую из точек M и N в самую себя. Следовательно, точки M и N лежат на окружности инверсии. Другими словами, геометрическое место точек пересечения M и N обеих окружностей есть окружность с центром Q и радиусом, равным $\sqrt{QA \cdot QD} = \sqrt{QB \cdot QC}$.

Точка пересечения P прямой MN с прямой AB также не зависит от выбора окружностей AMB и CMD (см. решение упр. 153). Так как отрезок PQ виден из точки K под прямым углом, то геометри-

ческое место точек K есть окружность, имеющая отрезок PQ своим диаметром (на чертеже не показана)

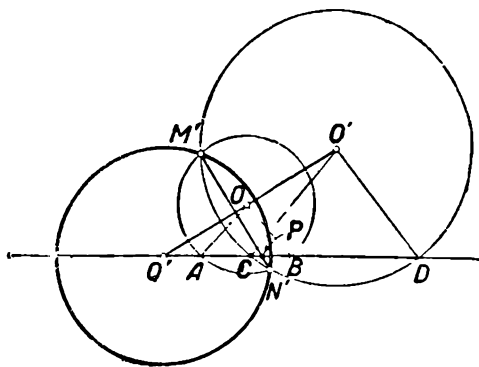
Предположим теперь, что один из двух отрезков AB и CD , скажем CD , лежит внутри другого и что точки A, B, C, D следуют в порядке A, D, C, B (черт. 486). В этом случае углы AMB и CMD не могут быть равными и потому могут быть только дополнительными. Следовательно, дуга AMB будет меньше полуокружности, дуга CMD больше полуокружности, и центры O и O' лежат по разные стороны от AB . Точка Q будет опять центром подобия двух окружностей, на этот раз внутренним. В остальном будут иметь место те же результаты, что и в первом случае.



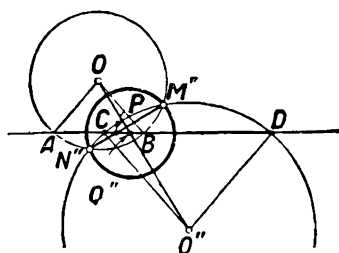
Черт. 486.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда отрезки AB и CD частично налегают один на другой (черт. 487 и 488); пусть данные точки

следуют при этом в порядке A, C, B, D . Центры рассматриваемых окружностей могут лежать при этом и по одну сторону (как O и O' на черт. 487) и по разные стороны (как O и O'' на черт. 488) от данной прямой. В первом случае отрезки AB и CD будут видны из точ-



Черт. 487.



Черт. 488.

ки пересечения M' обеих окружностей под равными углами, во втором — будут видны из точки M'' под дополнительными. Точка Q может занимать на прямой AB два положения Q' и Q'' , точка P , как уже было выяснено, одно. По тем же соображениям, что и выше, геометрическим местом точек M' будет окружность с центром Q' и радиусом $\sqrt{Q'A \cdot Q'D} = \sqrt{Q'B \cdot Q'C}$, геометрическим местом точек M'' — окружность с цент-

ром Q' и радиусом $\sqrt{Q'A \cdot Q'C} = \sqrt{Q'B \cdot Q'D}$. Геометрическим местом середин хорд будут соответственно окружности, имеющие своими диаметрами отрезки PQ' и PQ'' .

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI (стр. 214).

258. Пусть A и B — данные точки, O — данная окружность. Примем одну из данных точек, например B , не лежащую на окружности O , за полюс инверсии; за степень последней проще всего принять степень точки B относительно данной окружности.

Задача сводится к следующей. Провести через точку A' , обратную точке A , прямую, пересекающую данную окружность под данным углом. Но все прямые, пересекающие данную окружность под данным углом, в том числе и искомая прямая, касаются определённой окружности, концентрической с данной.

Примечание. Решение задачи упрощается, если искомая окружность должна пересекать данную под прямым углом. В этом случае искомая окружность должна проходить через точку, обратную одной из данных точек относительно данной окружности (п. 216); таким образом, задача сводится к проведению окружности через три точки.

259. Пусть требуется построить окружность, ортогональную к окружностям O_1 и O_2 и касающуюся окружности O или пересекающую окружность O под данным углом. Рассмотрим отдельно три возможных случая.

1°. Если O_1 и O_2 пересекаются, то принимаем за полюс инверсии одну из точек их пересечения и приходим к задаче: *построить окружность, ортогональную к двум данным пересекающимся прямым, т. е. имеющую своим центром данную точку (точку пересечения обеих прямых) и касающуюся данной окружности (данной прямой) или пересекающую её под данным углом.*

Решение последней задачи очевидно в случае касания, в случае же пересечения под данным углом точка пересечения данной окружности и искомой принадлежит геометрическому месту точек, из которых отрезок, соединяющий центры обеих окружностей, виден под данным углом.

Решив эту новую задачу, мы найдём и решение первоначальной задачи, подвергнув построенную окружность той инверсии, о которой говорилось выше.

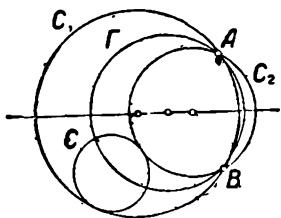
Наибольшее возможное число решений в этом случае равно двум.

2°. Если O_1 и O_2 касаются друг друга, то окружность, ортогональная к ним обеим, очевидно, пройдёт через их точку касания. Принимаем за полюс инверсии точку касания и приходим к задаче: *построить прямую, перпендикулярную к двум данным параллельным прямым и касающуюся данной окружности или пересекающую её под данным углом.* Способ решения этой новой задачи очевиден. Задача имеет два решения.

3°. Если O_1 и O_2 не имеют общих точек, то принимаем за полюс инверсии одну из их предельных точек P или Q (упр. 152) и прихо-

дим к задаче: *построить прямую*, ортогональную к двум концентрическим (упр. 248) окружностям, т. е. *проходящую через данную точку (их общий центр) и касающуюся данной окружности или пересекающую её под данным углом*. Способ решения этой новой задачи очевиден. Наибольшее возможное число решений два.

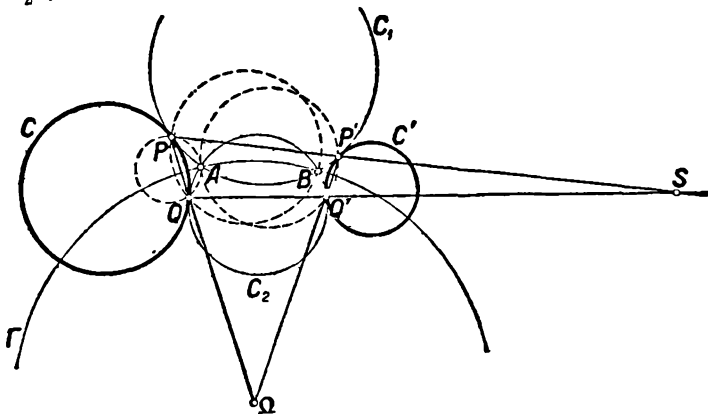
Примечание. В том случае, когда искомая окружность должна касаться третьей данной окружности, задача непосредственно сводится также к задаче, решённой в п. 311, так как окружности, ортогональные к двум данным окружностям O_1 и O_2 , имеют прямую O_1O_2 своей радикальной осью (в силу п. 138).



Черт. 489.

260. Пусть C_1 и C_2 — окружности, касающиеся окружности C и проходящие через точки A и B (черт. 489), Γ — окружность, ортогональная к C и проходящая также через A и B .

Инверсия относительно окружности Γ преобразует окружность C в самую себя, а окружность C_1 — в новую окружность, также проходящую через точки A и B и касающуюся окружности C , т. е. в окружность C_2 . Отсюда следует, что обе окружности C_1 и C_2 пересекают Γ под равными углами и что центр окружности Γ есть центр подобия окружностей C_1 и C_2 .



Черт. 490.

261. Пусть через точку A проведена окружность C_1 , которая касается одинаковым образом данных окружностей C и C' (черт. 490), и окружность Γ , пересекающая их под прямым углом. Инверсия относительно окружности Γ преобразует точку A и каждую из окружностей C и C' , ортогональных к Γ , в самую себя. Окружность C_1 , проходящая через точку A и касающаяся окружностей C и C' одинаковым образом, преобразуется той же инверсией в некоторую окруж-

ность C_2 . Последняя также проходит через A и касается окружностей C и C' , и притом (как можно видеть хотя бы из чертежа) также *одинаковым образом*.

В том, что окружность C_2 касается окружностей C и C' одинаковым образом, можно с полной строгостью убедиться так: Если P и P' — точки касания окружности C_1 с окружностями C и C' , Q и Q' — точки касания окружности C_2 с теми же окружностями, то прямые PQ и $P'Q'$ проходят через полюс инверсии, т. е. через центр Ω окружности Γ . Но точка Ω лежит на радикальной оси окружностей C и C' как центр окружности, к ним ортогональной (п. 138). Так как окружность C_1 касается окружностей C и C' одинаковым образом, то точки касания P и P' — антигомологичны относительно *внешнего* центра подобия S этих окружностей. Так как прямые PQ и $P'Q'$, проходящие через две антигомологические точки P и P' , пересекаются на радикальной оси окружностей C и C' , то они являются антигомологическими хордами (п. 224). Следовательно, точки Q и Q' также антигомологичны относительно *внешнего* центра подобия S , и потому окружность C_2 касается C и C' одинаковым образом.

Итак, инверсия относительно окружности Γ преобразует проходящие через точку A окружности C_1 и C_2 , каждая из которых касается окружностей C и C' одинаковым образом, одну в другую. Отсюда следует, что вторая точка пересечения B окружностей C_1 и C_2 лежит на окружности Γ , что окружность Γ делит угол между окружностями C_1 и C_2 пополам и что центр Ω окружности Γ есть центр подобия окружностей C_1 и C_2 .

Примечание. Таким же образом можно доказать, что проходящие через точку A окружности, каждая из которых касается окружностей C и C' *неодинаковым* образом, обладают по отношению к окружности Γ аналогичными свойствами.

262. Обозначения те же, что и в решении упражнения 261 (черт. 490).

1°. Инверсия относительно окружности Γ преобразует каждую из окружностей APQ и $AP'Q'$ в самую себя, так как первая из них проходит через взаимно обратные точки P и Q , вторая — через взаимно обратные точки P' и Q' . Следовательно, обе эти окружности ортогональны к окружности Γ и потому касаются одна другой в точке A . Точно так же окружности BPQ и $BP'Q'$ ¹⁾ ортогональны к Γ и потому касаются одна другой в точке B .

2°. Окружности APQ и BPQ пересекают окружность Γ в точках A и B под прямым углом и потому пересекают в этих точках окружность C_1 под одним и тем же углом (дополнительным к углу между Γ и C_1). Следовательно, окружности APQ и BPQ пересекают в точке P под одним и тем же углом окружность C_1 , а значит и касательную к ней окружность C . Итак, окружности APQ и BPQ образуют в точке P равные углы с окружностью C .

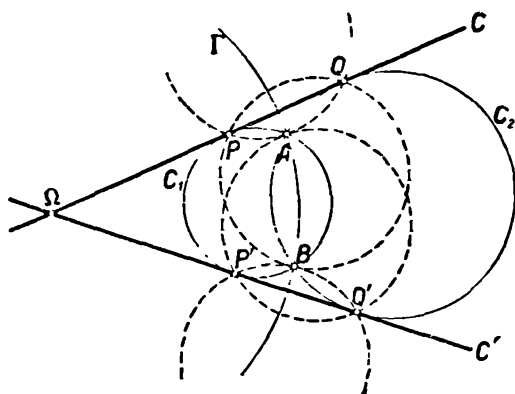
Инверсия относительно окружности C преобразует окружность APQ в новую окружность, проходящую через точки P и Q и образующую

1) Окружность $BP'Q'$ на чертеже не показана, чтобы не загромождать чертежа.

с C угол, равный углу между окружностями APQ и C , т. е. в окружность BPQ (две точки и касательная в одной из них вполне определяют окружность). Итак, окружности APQ и BPQ обратны относительно C .

Таким же путём докажем, что окружности $AP'Q'$ и $BP'Q'$ обратны относительно C' .

3°. Если заменить данные окружности прямыми линиями C и C' (черт. 491), то свойство 1° сохраняет силу, так как инверсия отно-



Черт. 491.

сительно Γ преобразует, очевидно, каждую из прямых C и C' — в самоё себя, а окружности C_1 и C_2 — одну в другую.

Свойство 2° читается при этом так: окружности APQ и BPQ симметричны относительно прямой C , окружности $AP'Q'$ и $BP'Q'$ — относительно прямой C' . Доказательство, данное выше, сохраняет силу: окружно-

сти APQ и BPQ будут симметричны относительно прямой C , так как они пересекают её под равными углами.

Окружности APQ и $BP'Q'$ также будут равны, так как они симметричны относительно биссектрисы угла между прямыми C и C' . Следовательно, все четыре окружности APQ , $AP'Q'$, BPQ , $BP'Q'$ равны.

263. Пусть требуется построить окружность C_0 , проходящую через данную точку A_0 и касающуюся двух данных прямых, пересекающихся в точке P .

Построим произвольную окружность C , касающуюся двух данных прямых и расположенную внутри того из углов, образованных данными прямыми, в котором лежит точка A_0 , или внутри угла, ему вертикального. Так как точка P есть точка пересечения общих внешних или внутренних касательных к окружностям C и C_0 , то точка P есть центр подобия обеих окружностей. Точка A , соответственная точке A_0 , есть одна из точек пересечения окружности C с прямой OA_0 . Зная центр подобия P и пару соответственных точек A и A_0 , можно построить окружность C_0 , гомотетичную окружности C .

Примечание. Если данные прямые параллельны, то гомотетия относительно центра подобия P заменяется поступательным перемещением (сравнить сказанное в п. 142 о поступательном перемещении как предельном случае гомотетии).

264. Пусть требуется построить окружность, касающуюся двух данных прямых, пересекающихся в точке P , и данной окружности Γ

(черт. 492). Если C — какая-либо окружность, касающаяся данных прямых и имеющая центр на той же биссектрисе угла между данными прямыми, что и искомая окружность C_0 , то точка P есть центр подобия окружностей C и C_0 . Прямая, соединяющая точку P с точкой касания T окружностей C_0 и Γ , пересекает окружности Γ и C_0 под равными углами; окружности C_0 и C она также пересекает под равными углами, так как она проходит через их центр подобия P . Следовательно, прямая PT пересекает окружности C и Γ под равными углами и потому проходит через один из центров подобия S (то же следует и из теоремы п. 145 об осях подобия: точка T есть центр подобия окружностей C_0 и Γ , точка P — центр подобия окружностей C_0 и C ; поэтому прямая PT проходит через один из центров подобия S окружностей C и Γ).

Итак, строим окружность C , как было указано, и соединяем точку P с одним из центров подобия S окружностей C и Γ . Точки пересечения полученной прямой с окружностью Γ будут искомыми точками касания.

Наибольшее возможное число решений равно 8. Действительно, центр вспомогательной окружности C можно выбрать на той или другой из биссектрис углов между данными прямыми, а за центр подобия S принять тот или другой из центров подобия окружностей C и Γ .

Примечание. Если данные прямые параллельны, то решение упрощается. В этом случае радиус r искомой окружности равен половине расстояния между данными прямыми. Центр искомой окружности равноудалён от данных прямых и лежит от центра данной окружности Γ на расстоянии, равном $R+r$ или $|R-r|$, где R — радиус окружности Γ .

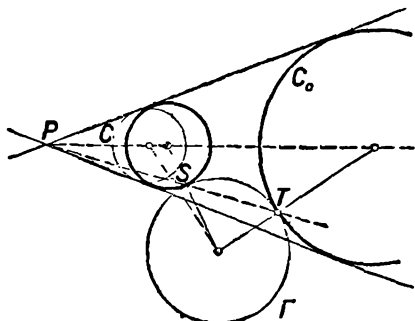
265. Пусть O — общий центр двух данных концентрических окружностей, r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$) — их радиусы, O' — центр третьей данной окружности, r_3 — её радиус, M — центр искомой окружности.

Если искомая окружность касается обеих концентрических окружностей внутренним образом, то её радиус равен $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, а расстояние

OM равно $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$. При этом $O'M = \left| r_3 \pm \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \right|$.

Если искомая окружность касается одной из концентрических окружностей внутренним, а другой — внешним образом, то её радиус равен $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$. При этом будем иметь $OM = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$;

$O'M = \left| r_3 \pm \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \right|$.



Черт. 492.

В том и другом случае положение точки M определяется пересечением двух окружностей с центрами в точках O и O' ; радиусы их определяются указанными выше выражениями для OM и $O'M$.

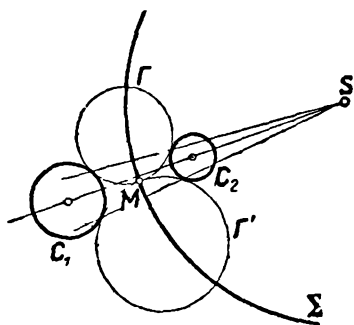
Наибольшее возможное число решений равно 8.

266. Пусть две окружности Γ и Γ' , касающиеся друг друга, касаются каждая двух данных окружностей C_1 и C_2 . При этом возможны три различных случая: 1) каждая из окружностей Γ и Γ' касается окружностей C_1 и C_2 одинаковым образом; 2) каждая из окружностей Γ и Γ' касается окружностей C_1 и C_2 неодинаковым образом; 3) одна из окружностей Γ и Γ' , скажем Γ , касается окружностей C_1 и C_2 неодинаковым образом, другая Γ' — одинаковым образом. В этом последнем случае можно, не нарушая общности, предположить, что касание окружностей C_1 и Γ — внешнее, а касание окружностей C_2 и Γ — внутрен-

нее (так как в противном случае можно изменить обозначение окружностей C_1 и C_2).

Рассмотрим все три случая по порядку:

1°. Пусть каждая из окружностей Γ и Γ' касается обеих окружностей C_1 и C_2 одинаковым образом (черт. 493)¹⁾. При этом окружность Γ касается окружностей C_1 и C_2 в двух точках, антигомологических относительно их внешнего центра подобия S , и, следовательно, преобразуется сама в себя той инверсией с полю-



Черт. 493.

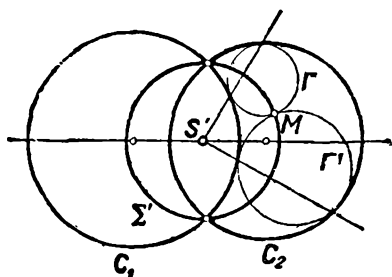
сом S , которая преобразует окружности C_1 и C_2 одну в другую. То же имеет место и для окружности Γ' . Следовательно, точка касания окружностей Γ и Γ' лежит на окружности инверсии Σ , так как если бы окружности Γ и Γ' имели общую точку, не лежащую на окружности Σ , то они имели бы и вторую общую точку, обратную первой относительно Σ .

Обратно, каждая точка M окружности инверсии Σ принадлежит искомому геометрическому месту. Действительно, всегда можно построить две окружности Γ и Γ' , которые касались бы в данной точке M окружности Σ радиуса этой окружности и, кроме того, касались бы одной из данных окружностей C_1 (ср. решение упр. 74). Каждая из окружностей Γ и Γ' , ортогональных к Σ , преобразуется инверсией относительно Σ в самую себя, а потому касается и окружности C_2 .

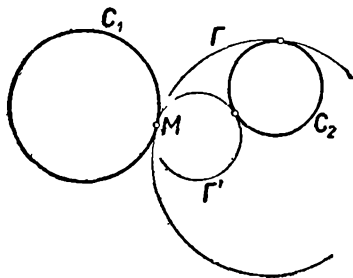
Следовательно, геометрическим местом точек M будет вся окружность Σ .

¹⁾ В этом случае безразлично, касается ли окружность Γ или Γ' данных окружностей внешним или внутренним образом; может случиться, что все четыре касания будут внутренними, что все четыре касания будут внешними и, наконец, что одна из окружностей Γ или Γ' касается данных окружностей внешним образом, другая — внутренним.

2°. Пусть каждая из окружностей Γ и Γ' касается окружностей C_1 и C_2 неодинаковым образом (черт. 494). Таким же образом, как и в первом случае, убедимся, что точка их касания M лежит на той окружности Σ' с центром во внутреннем центре подобия данных окружностей, относительно которой эти окружности обратны друг другу, и что за точку M можно принять любую точку окружности Σ' .

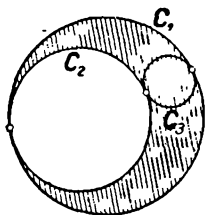


Черт. 494.

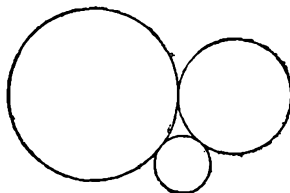


Черт. 495

3°. Если теперь окружность Γ касается окружностей C_1 и C_2 неодинаковым образом, а окружность Γ' — одинаковым образом, то представляется более или менее очевидным (сравнить хотя бы случай, изображенный на черт. 495), что касание окружностей Γ и Γ' может иметь место только на одной из данных окружностей C_1 или C_2 .



Черт. 496.



Черт. 497.

Чтобы строго доказать это положение, начнем со следующего предварительного замечания:

Если три окружности касаются одна другой в трёх различных точках, то из трёх касаний либо только одно (черт. 496), либо все три (черт. 497) будут внешними.

Действительно, если касание окружностей C_1 и C_2 — внутреннее (черт. 496), то окружность C_3 , касающаяся C_1 и C_2 в различных точках, necessarily располагается в заштрихованной части плоскости и потому касается одной из окружностей C_1 и C_2 внутренним образом, другой — внешним. Иначе говоря, если имеется одно внутреннее касание, то имеется и второе.

Пусть теперь окружность Γ касается окружности C_1 внешним образом, а окружности C_2 — внутренним (черт. 495), и окружность Γ' касается окружностей C_1 и C_2 одинаковым образом. Сделаем предположение, что точки попарного касания окружностей C_1 , Γ и Γ' различны, и точно так же, что точки касания окружностей C_2 , Γ и Γ' различны.

Если оба одинаковые касания (Γ', C_1) и (Γ', C_2) — внешние (внутренние), то мы имеем следующее положение вещей. Так как касание (Γ, C_1) — внешнее и касание (Γ', C_1) — также внешнее (внутреннее), то в силу сделанного замечания касание (Γ, Γ') должно быть внешним (внутренним). Но в то же время касание (Γ, C_2) внутреннее, касание (Γ', C_2) внешнее (внутреннее), и потому касание (Γ, Γ') должно быть внутренним (внешним). Итак, окружности Γ и Γ' должны касаться друг друга одновременно и внешним и внутренним образом.

Полученное противоречие показывает, что либо три точки попарного касания окружностей C_1, Γ и Γ' совпадают между собой, либо три точки попарного касания окружностей C_2, Γ и Γ' совпадают между собой. Иначе говоря, точка касания окружностей Γ и Γ' лежит либо на окружности C_1 , либо на окружности C_2 .

Как и в первом случае, покажем, что через любую точку M одной из окружностей C_1 (или C_2) проходят две окружности, касающиеся в точке M окружности C_1 (или C_2) и в то же время касающиеся другой данной окружности. Следовательно, в этом третьем случае геометрическим местом точек M будет совокупность данных окружностей.

Итак, геометрическое место точек M состоит всегда из данных окружностей C_1 и C_2 и, кроме того, включает в себя: а) окружность Σ , если окружности C_1 и C_2 расположены одна вне другой или касаются одна другой внешним образом (окружность Σ' при этом не существует); б) окружности Σ и Σ' , если окружности C_1 и C_2 пересекаются; с) окружность Σ' , если окружности C_1 и C_2 касаются одна другой внутренним образом или расположены одна внутри другой (окружность Σ при этом не существует).

267. В п. 232 было показано, что окружности Σ и Σ' , каждая из которых касается трёх данных окружностей одинаковым образом, преобразуются одна в другую инверсией с полюсом в радикальном центре I данных окружностей. Следовательно, линия центров окружностей Σ и Σ' проходит через I . Далее там же было показано, что окружности Σ и Σ' имеют своей радикальной осью внешнюю ось подобия данных окружностей, и потому линия центров окружностей Σ и Σ' перпендикулярна к этой оси подобия.

Аналогично, если некоторая окружность Σ_1 касается трёх данных окружностей неодинаковым образом (скажем, окружностей B и C одинаковым образом, но неодинаковым образом окружностей A и B), то та же инверсия с полюсом I преобразует Σ_1 в некоторую окружность Σ'_1 , также касающуюся трёх данных. Следовательно, линия центров окружностей Σ_1 и Σ'_1 проходит через I . Далее, окружности Σ_1 и Σ'_1 имеют своей радикальной осью, как указано в п. 234, одну из внутренних осей подобия данных окружностей (в указанном выше случае ту ось подобия, на которой лежит внешний центр подобия окружностей B и C , внутренний центр подобия окружностей A и B и внутренний же центр подобия окружностей A и C). Поэтому линия центров окружностей Σ_1 и Σ'_1 будет перпендикулярна к этой оси подобия.

268. Чтобы применить к решению предложенной задачи косвенный метод, рассмотренный в упражнении 174, начинаем с решения следующей задачи:

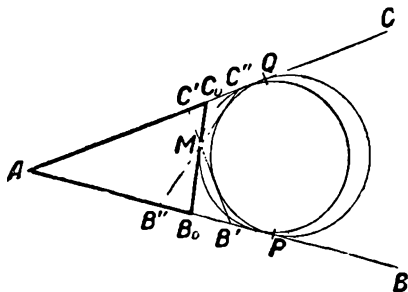
А) Через точку M , лежащую внутри данного угла BAC (черт. 498), провести секущую $B'C'$, образующую со сторонами угла (не продолженными за вершину) треугольник $AB'C'$, имеющий данный периметр $2p$.

Рассмотрим вневписанную окружность этого треугольника, касающуюся стороны $B'C'$ и продолжений сторон AB' и AC' соответственно в точках P и Q ; так как периметр треугольника $AB'C'$ равен $2p$, то мы будем иметь (сравнить решение упр. 90) $AP=AQ=p$. Отсюда вытекает такое решение задачи А: строим окружность, касающуюся прямых AB и AC в точках P и Q , и через данную точку M проводим к этой окружности касательные.

Если точка M будет лежать вне построенной окружности и притом в части плоскости, ограниченной отрезками AP и AQ и меньшей дугой PQ , то задача будет иметь два решения (треугольники $AB'C'$ и $AB''C''$ на черт. 498). Если точка M будет лежать на меньшей дуге PQ , задача будет иметь одно решение. При другом положении точки M задача не имеет решений.

Чтобы решить теперь предложенную задачу:

В) Провести через точку M прямую B_0C_0 , для которой периметр треугольника AB_0C_0 имеет наименьшее возможное значение, — мы должны отыскать наименьшее значение p , для которого предыдущая задача А ещё возможна. Это наименьшее значение p определяется окружностью, проходящей через M и касающейся прямых AB и AC , точнее говоря — большей из двух окружностей, удовлетворяющих этим условиям. Построив эту окружность, как указано в решении упражнения 263, и проведя к ней в точке M касательную B_0C_0 , мы и получим искомый треугольник AB_0C_0 .



Черт. 498.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII (стр. 222).

269. Пусть точка M , лежащая в плоскости равностороннего треугольника ABC , удовлетворяет условию $MA = MB + MC$. Так как $BC = CA = AB$, то отсюда вытекает, что $MA \cdot BC = MB \cdot CA + MC \cdot AB$; следовательно, четырёхугольник $ABMC$ можно вписать в окружность, и потому точка M лежит на описанной окружности.

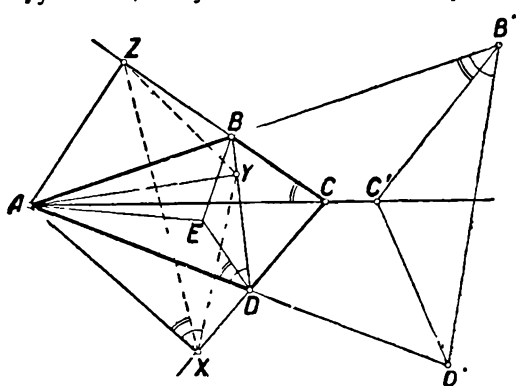
В противном случае $MA \cdot BC < MB \cdot CA + MC \cdot AB$ (п. 237а), и, следовательно, $MA < MB + MC$.

270. 1°. Так как точки B' , C' и D' получаются из точек B , C и D инверсией с полюсом A , то мы имеем (п. 218) $B'C' = \frac{k \cdot CB}{AB \cdot AC}$; $C'D' = \frac{k \cdot DC}{AC \cdot AD}$; $D'B' = \frac{k \cdot BD}{AB \cdot AD}$, где k — степень инверсии. Отсюда

$$B'C' : C'D' : D'B' = (BC \cdot AD) : (CD \cdot AB) : (DB \cdot AC). \quad (1)$$

Так как в правой части этого равенства точки A , B , C и D входят вполне симметрично, то мы получим те же отношения сторон, строя треугольник, аналогичный $B'C'D'$, исходя не из вершины A , а из какой-либо другой вершины четырёхугольника¹⁾.

2°. Так как точки B , C , B' и C' (черт. 499) лежат на одной окружности, то углы $BB'C'$ и BCA равны; точно так же равны углы $BB'D'$ и BDA . Отсюда



Черт. 499.

$\angle C'B'D' = \angle BB'D' = \angle BB'C' = \angle BDA = \angle BCA$. Аналогично и для других углов треугольника.

3°. Пусть X , Y и Z — основания перпендикуляров из точки A на стороны CD , DB и BC треугольника BCD . Так как точки A , D , X и Y лежат на одной окружности, то $\angle YXA = \angle YDA$; так как точки A , C , X и Z лежат

на одной окружности, то $\angle ZXA = \angle ZCA$. Следовательно, $\angle YXZ = \angle YXA - \angle ZXA = \angle YDA - \angle ZCA = \angle BDA - \angle BCA$. Но в силу 2° имеем $\angle BDA - \angle BCA = \angle C'B'D'$, и значит угол при вершине X треугольника XYZ равен углу при вершине B' треугольника $B'C'D'$. Таким же путём доказывается и равенство остальных углов этих треугольников. Итак, треугольники XYZ и $B'C'D'$ подобны друг другу.

Далее, если треугольники AED и ABC подобны, то $ED : BC = AD : AC$, откуда $ED : BD = (AD \cdot BC) : (AC \cdot BD) = B'C' : B'D'$ в силу формулы (1). Кроме того, $\angle BDE = \angle BDA - \angle EDA = \angle BDA - \angle BCA = \angle C'B'D'$. Следовательно, треугольники BDE и $D'B'C'$ подобны.

¹⁾ Если данный четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то вместо треугольника $B'C'D'$ получаются три точки, лежащие на одной прямой; предоставляем читателю проследить, как видоизменяются в этом случае рассматриваемые свойства фигуры.

4°. Выполним теперь над точками A, B, C и D инверсию с произвольным полюсом O и произвольной степенью k ; пусть точкам A, B, C и D соответствуют в этой инверсии некоторые точки A_1, B_1, C_1 и D_1 . При этом имеем согласно п. 218: $B_1C_1 = \frac{k \cdot CB}{OB \cdot OC}$; $A_1D_1 = \frac{k \cdot DA}{OA \cdot OD}$, откуда $B_1C_1 \cdot A_1D_1 = \frac{k^2 \cdot BC \cdot AD}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}$. Аналогично найдём, что $C_1D_1 \cdot A_1B_1 = \frac{k^2 \cdot CD \cdot AB}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}$ и $D_1B_1 \cdot A_1C_1 = \frac{k^2 \cdot DB \cdot AC}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}$, и, следовательно,

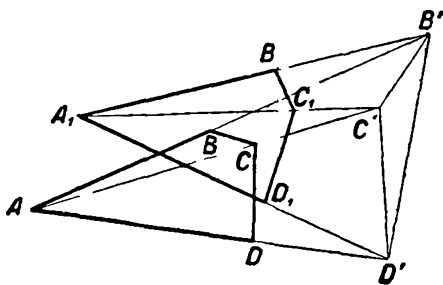
$$\begin{aligned} (BC \cdot AD) : (CD \cdot AB) : (DB \cdot AC) = \\ = (B_1C_1 \cdot A_1D_1) : (C_1D_1 \cdot A_1B_1) : (D_1B_1 \cdot A_1C_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее соотношение и показывает, что треугольник $B'C'D'$, о котором говорилось выше, и аналогичный треугольник $B_1'C_1'D_1'$, который получится из четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, подобны между собой. В самом деле, отношения сторон этих треугольников определяются равенствами (1) и аналогичными им равенствами $B_1'C_1' : C_1'D_1' : D_1'B_1' = (B_1C_1 \cdot A_1D_1) : (C_1D_1 \cdot A_1B_1) : (D_1B_1 \cdot A_1C_1)$. В силу соотношений (2) мы имеем, очевидно, $B'C' : C'D' : D'B' = B_1'C_1' : C_1'D_1' : D_1'B_1'$.

5°. Пусть четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ обладают тем свойством, что треугольники $B'C'D'$ и $B_1'C_1'D_1'$, получающиеся с помощью указанных выше построений, подобны. Выбирая надлежащим образом степень инверсии с полюсом A , преобразующей точки B, C и D в точки B', C' и D' , а также степень инверсии с полюсом A_1 , преобразующей B_1, C_1, D_1 в B_1', C_1', D_1' , можно сделать так, что треугольники $B'C'D'$ и $B_1'C_1'D_1'$ будут не только подобными, но и равными.

Далее, перемещая четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, можно сделать так, что треугольник $B_1'C_1'D_1'$ будет совпадать с $B'C'D'$ (черт. 500). При этом точки A_1, B_1, C_1, D_1 получаются из точек A, B, C и D с помощью последовательности двух инверсий. Действительно, инверсия с полюсом A преобразует точки B, C, D и A соответственно в точки B', C', D' и в точку, лежащую в бесконечности, а вторая инверсия с полюсом A_1 преобразует эти последние точки в точки B_1, C_1, D_1 и A_1 .

Если четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ не подобны между собой, то эту последовательность инверсий можно заменить (упр. 251, 2°) одной инверсией I и одной симметрией относительно прямой. Следовательно, инверсия I преобразует точки A, B, C и D в вершины четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$.



Черт. 500.

рѣхугольника, симметричного с $A_1B_1C_1D_1$ относительно некоторой прямой и потому равного $A_1B_1C_1D_1$.

Полюс O и степень k инверсии I можно найти следующим образом. Так как точки, обратные точкам A, B, C и D в искомой инверсии, образуют четырёхугольник, равный данному четырёхугольнику

$$A_1B_1C_1D_1, \text{ то мы должны иметь } B_1C_1 = \frac{k \cdot CB}{OB \cdot OC}; C_1D_1 = \frac{k \cdot DC}{OC \cdot OD}; \\ D_1B_1 = \frac{k \cdot BD}{OB \cdot OD}. \text{ Отсюда}$$

$$OB:OC:OD = \frac{C_1D_1}{CD} : \frac{D_1B_1}{DB} : \frac{B_1C_1}{BC}, \quad (3)$$

и положение полюса инверсии O по отношению к точкам B, C и D определяется, как указано в решении упражнения 127. Зная полюс

$$\text{инверсии, можем определить и её степень } k = \frac{OB \cdot OD \cdot B_1D_1}{DB} = \\ = \frac{OC \cdot OB \cdot C_1B_1}{BC} = \frac{OD \cdot OC \cdot D_1C_1}{CD}.$$

Примечания: 1°. Если четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны, то соответствующие им треугольники $B'C'D'$ и $B_1C_1D_1$ также подобны, как это следует из соотношения (1). Однако в этом случае *не всегда* существует инверсия, обладающая требуемым свойством. В самом деле, если такая инверсия с полюсом O существует, то мы имеем $A_1B_1 = \frac{k \cdot BA}{OA \cdot OB}$;

$A_1C_1 = \frac{k \cdot CA}{OA \cdot OC}$. С другой стороны, в силу подобия четырёхугольников $A_1B_1:AB = A_1C_1:AC$. Отсюда непосредственно следует $OB = OC$. По той же причине $OA = OB = OC = OD$, так что *четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, и точка O есть центр этой окружности.*

2°. Мы доказали существование (при определённом условии) инверсии I , преобразующей точки A, B, C и D в точки, образующие четырёхугольник, равный данному четырёхугольнику $A_1B_1C_1D_1$. Можно показать, что такого рода инверсия будет, *вообще говоря*, единственной (с точностью до знака её степени). В самом деле, пусть инверсия I' с полюсом O' и инверсия I'' с полюсом O'' преобразуют точки A, B, C и D соответственно в точки A', B', C' и D' и в точки A'', B'', C'' и D'' такие, что четырёхугольники $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$ равны. В таком случае последовательность $I'I''$ инверсий I' и I'' преобразует точки A', B', C' и D' в A'', B'', C'' и D'' . Если полюсы O' и O'' различны, то последовательность инверсий $I'I''$ можно опять заменить одной инверсией I_0 и одной симметрией. Следовательно, инверсия I_0 преобразует четыре точки A', B', C' и D' в новые четыре точки, образующие четырёхугольник, равный $A''B''C''D''$. Так как четырёхугольники $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$ равны, то, в силу сказанного в предыдущем примечании, это не может иметь места для произвольного четырёхугольника $A'B'C'D'$, т. е. для произвольного четырёхугольника $ABCD$. Если же полюсы инверсий I' и I'' совпадают, то в силу равенства четырёхугольников $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$ степени этих двух инверсий отличаются только знаком.

Один из случаев, когда полюс инверсии I не является единственным, разобран в решении задачи 387.

3°. Задача, поставленная в упражнении 127, может, вообще говоря, иметь два решения, одно решение или вовсе не иметь решений. В дан-

ном случае аналогичная задача отыскания точки O заведомо *будет* иметь решение, так как существование инверсии I нами доказано. Однако, как это следует из предыдущего примечания, из двух точек O , удовлетворяющих условиям (3), только одна будет, в общем случае, полюсом искомой инверсии.

270а. Пусть инверсия с полюсом O и степенью k преобразует три данные точки A, B и C в три другие точки A', B' и C' , которые образуют треугольник $A'B'C'$, равный данному треугольнику $A_1B_1C_1$.

При этом мы должны иметь $B'C' = \frac{k \cdot CB}{OB \cdot OC} = B_1C_1$ и аналогичные равенства для двух других сторон. Отсюда

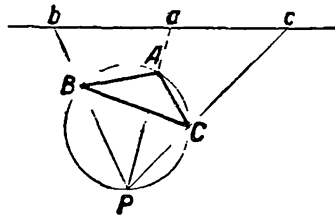
$$OB \cdot OC = k \cdot \frac{CB}{B_1C_1}; \quad (1)$$

из этого равенства и из двух других ему аналогичных имеем $OA:OB:OC = \frac{B_1C_1}{BC} : \frac{C A_1}{CA} : \frac{A B_1}{AB}$. Таким образом, положение точки O определяется, как указано в решении упражнения 127 (сравнить решение упр. 270, 5°). Зная полюс инверсии O , можно определить из равенства (1) и её степень.

Примечание. В то время как задача, рассмотренная в упражнении 127, может иметь, а может и не иметь решений, данная задача всегда имеет решения. В самом деле, инверсия с полюсом P на окружности, описанной около треугольника ABC , преобразует точки A, B и C в лежащие на одной прямой точки a, b и c (черт. 501). Выбрав полюс P надлежащим образом, можно достичь того, что будем, например, иметь $ab = ac$ (для этого достаточно, чтобы $PB:PC = AB:AC$). Точно так же точки A_1, B_1 и C_1 можно с помощью аналогичной инверсии преобразовать в три точки a_1, b_1 и c_1 , лежащие на одной прямой и удовлетворяющие условиям $a_1b_1 = a_1c_1 = ab = ac$. Отсюда следует (как и в решении упр. 270, 5°), что вершины треугольника ABC можно преобразовать в вершины треугольника, равного $A_1B_1C_1$, с помощью последовательности двух инверсий.

Если треугольник ABC не подобен $A_1B_1C_1$, то эту последовательность двух инверсий можно заменить одной инверсией I и одной симметрией. Инверсия I , очевидно, преобразует точки A, B и C в вершины треугольника, равного $A_1B_1C_1$.

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то полюсом O искомой инверсии будет, очевидно, центр окружности, описанной около треугольника ABC .



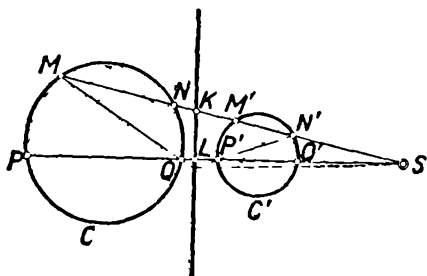
Черт. 501.

271. При указанных в тексте задачи условиях мы имели бы $OP^2 - OQ^2 = MP^2 - MQ^2 = M'P^2 - M'Q^2$. В силу п. 128а, следствие, точки O, M, M' лежали бы на одной прямой, и, как и в п. 241, мы имели бы $OM \cdot OM' = OP^2 - PM^2 = \text{const.}$

271а. Пусть $AB=CD=a$; $BC=AD=b$; $AO:AB=h$; $BO:BA=$
 $=h'$ (черт. 211). В силу подобия треугольников AOM и ABD , BOM ,
 и BAC имеем $OM=BD \cdot \frac{AO}{AB}=BD \cdot h$; $OM'=AC \cdot \frac{BO}{BA}=AC \cdot h'$. От-
 сюда $OM \cdot OM' = AC \cdot BD \cdot h \cdot h'$. Но четырёхугольник $ABDC$ — вписан-
 ный, откуда $AC \cdot BD = AD \cdot BC = AB \cdot CD = b^2 - a^2$, и $OM \cdot OM' =$
 $= hh'(b^2 - a^2)$.

ЗАДАЧИ К ДОПОЛНЕНИЯМ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ (стр. 223).

272. Пусть S — один из центров подобия окружностей C и C' ,
 (черт. 502); M и N' , а также Q и P' — две пары антигомологических
 точек; K и L — точки пересечения прямых MN' и QP' с радикальной
 осью. Так как прямые MQ и $N'P'$ пересекаются (как антигомологи-



Черт. 502.

ческие хорды, см. п. 224) на
 радикальной оси, то мы имеем
 (п. 200) равенство сложных от-
 ношений $(SKMN') = (SLQP')$.
 Изменяя положение секущей QP'
 и оставляя на месте секущую
 MN' , видим, что $(SLQP') =$
 $= \text{const.}$

273. Пусть P, A, B, C
 и D — пять точек одной окруж-
 ности; P', A', B', C' и D' —
 точки, им обратные. Так как
 пары прямых PA и $P'A'$, PB и $P'B'$, PC и $P'C'$, PD и $P'D'$ пере-
 секаются в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 , лежащих на радикальной оси
 обеих окружностей (п. 224), то, обозначая через (PA, PB, PC, PD)
 сложное отношение четырёх прямых, будем иметь $(PA, PB, PC, PD) =$
 $= (A_0B_0C_0D_0) = (P'A', P'B', P'C', P'D')$. Но (PA, PB, PC, PD)
 является сложным отношением точек A, B, C и D согласно п. 212,
 и то же имеет место для точек A', B', C' и D' .

Если окружность, на которой лежат точки A, B, C и D , совпа-
 дает со своей обратной, то точки A_0, B_0, C_0 и D_0 лежат на поляре
 полюса инверсии (п. 224, примечание), и то же рассуждение сохра-
 няет силу.

Если окружность, на которой лежат точки A, B, C и D , прохо-
 дит через полюс инверсии O , то точки A', B', C' и D' лежат на пря-
 мых OA, OB, OC и OD , и равенство $(OA, OB, OC, OD) = (A'B'C'D')$
 становится очевидным.

Примечание. Другое доказательство приведено во втором томе
 книги Адамара, п. 719.

274. Пусть A, B, C и D — четыре точки одной окружности, P —
 произвольная точка той же окружности; A', B', C' и D' — точки, об-
 ратные точкам A, B, C и D в инверсии с полюсом P и произвольной
 степенью. По определению (п. 212), сложное отношение точек A, B, C и D

равно (PA, PB, PC, PD) . Но $(PA, PB, PC, PD) = (A'B'C'D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$.

Мы имеем $A'C' = \frac{k \cdot CA}{OC \cdot OA}$; $B'C' = \frac{k \cdot CB}{OB \cdot OC}$ (п. 218), откуда $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{OB \cdot AC}{OA \cdot BC}$. Аналогично найдём, что $\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{OB \cdot AD}{OA \cdot BD}$. Отсюда получаем $(PA, PB, PC, PD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$. Это равенство определяет сложное

отношение точек A, B, C и D только по абсолютной величине; сложное отношение этих точек будет, как легко видеть, положительным, если точки C и D лежат на одной и той же из двух дуг, имеющих своими концами точки A и B , и отрицательным, если они лежат на различных дугах.

275. Пусть данные окружности C_1 и C_2 преобразуются в две равные окружности \bar{C}_1 и \bar{C}_2 с помощью инверсии I . Так как окружности \bar{C}_1 и \bar{C}_2 симметричны относительно их радикальной оси \bar{C} , то (упр. 250) окружности C_1 и C_2 обратны относительно той окружности C , которая преобразуется инверсией I в прямую \bar{C} . Следовательно, полюсом инверсии I может быть произвольная точка окружности инверсии, преобразующей C_1 в C_2 (а степень инверсии произвольна).

Чтобы преобразовать три данные окружности в три равные окружности, необходимо принять за полюс инверсии одну из точек пересечения двух окружностей, инверсии относительно которых преобразуют одну из данных окружностей в две другие.

276. Пусть C_1, C_2 и C_3 — данные окружности; Γ_{23}, Γ_{31} и Γ_{12} — окружности инверсий, преобразующих соответственно C_2 в C_3 , C_3 в C_1 и C_1 в C_2 . Центрами окружностей Γ будут (в силу п. 222) центры подобия данных окружностей, взятых попарно. При этом окружности Γ_{23}, Γ_{31} и Γ_{12} выбраны так, что их центры лежат на одной прямой, т. е. на одной и той же оси подобия данных окружностей.

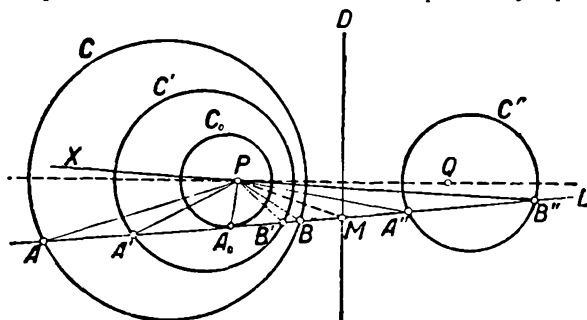
Окружности C_2, C_3 и Γ_{23} имеют общую радикальную ось (п. 228); эта радикальная ось проходит через радикальный центр трёх данных окружностей. Следовательно, радикальный центр данных окружностей C_1, C_2 и C_3 имеет относительно Γ_{23} ту же степень, что и относительно каждой из данных окружностей. То же имеет место и для окружностей Γ_{31} и Γ_{12} . Следовательно, радикальной осью окружностей Γ_{23}, Γ_{31} и Γ_{12} служит перпендикуляр из радикального центра данных окружностей на ось подобия, на которой лежат центры трёх окружностей Γ .

277. Если инверсия с полюсом O преобразует две данные окружности C_1 и C_2 в две окружности C_1' и C_2' , из которых первая (C_1') делит вторую (C_2') в точках A' и B' на две равные части, то окружности C_1 и C_2 также пересекаются. При этом окружность Σ , проходящая через точки пересечения окружностей C_1 и C_2 и ортогональная к окружности C_2 , преобразуется рассматриваемой инверсией в прямую линию $A'B'$. Следовательно, полюс O есть произвольная точка окружности Σ .

Аналогично, в более общем случае, получаем две окружности Σ' и Σ'' , проходящие через точки пересечения данных окружностей и

пересекающие окружность C_2 под углом, равным половине данного центрального, одна из которых должна преобразовываться искомой инверсией в прямую линию. Следовательно, полюсом инверсии может быть любая точка той или другой из окружностей Σ' и Σ'' .

278. Пусть некоторая прямая L пересекает две окружности C и C' (или C и C''), имеющие своими предельными точками точки P и Q (черт. 503), в точках A, B и A', B' (или A, B и A'', B''). Требуется доказать, что биссектрисы углов APB и $A'PB'$ совпадают (или что биссектрисы углов APB и $A''PB''$ взаимно перпендикулярны).



Черт. 503.

Обозначим через M точку пересечения прямой L с радикальной осью D данных окружностей. Мы имеем (в силу упр. 152) $MA \cdot MB = MP^2$, или $MA:MP = MP:MB$. Отсюда следует, что треугольники MAP и MPB подобны, так что

$$\angle MAP = \angle MPB. \quad (1)$$

Таким же образом докажем:

$$\angle MA'P = \angle MPB', \quad (2)$$

$$\angle MA''P = \angle MPB''. \quad (3)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\angle APA' = \angle MA'P - \angle MAP = \angle MPB' - \angle MPB = \angle BPB'$. Отсюда вытекает, что углы APB и $A'PB'$ имеют общую биссектрису.

Аналогично из равенств (1) и (3) следует, что $\angle APA'' = 180^\circ - \angle MAP - \angle MA''P = 180^\circ - \angle MPB - \angle MPB'' = 180^\circ - \angle BPB'' = \angle BPX$, где PX — продолжение PB'' . Отсюда следует, что углы APB и $A''PX$ имеют общую биссектрису, а углы APB и $A''PB''$ — взаимно перпендикулярные биссектрисы.

Если, в частности, принять за окружность C' окружность C_0 , касательную к прямой L , то точки A' и B' обе совпадают с точкой касания A_0 , так что прямая PA_0 будет биссектрисой угла APB .

279. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в данную окружность Γ ; L, M, N — точки пересечения противоположных сторон (черт. 504).

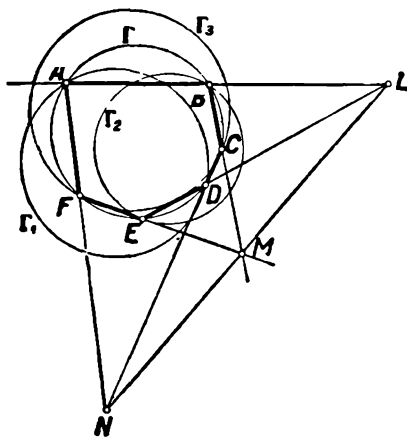
Проведём через точки A и D произвольную окружность Γ_1 . Построим окружность Γ_2 , соответствующую Γ_1 в инверсии с полюсом L и степенью, равной степени точки L относительно Γ . Окружность Γ_2 пройдёт через точки B и E ; точки A и B , D и E будут антигомологическими точками окружностей Γ_1 и Γ_2 относительно центра подобия L .

Построим далее окружность Γ_3 , соответствующую Γ_1 в инверсии с полюсом N и степенью, равной степени точки N относительно окружности Γ . Окружность Γ_3 пройдёт через точки C и F ; точки A и F , D и C будут антигомологическими точками окружностей Γ_1 и Γ_3 относительно центра подобия N .

Данная окружность Γ пересекает окружности Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 под равными углами (п. 227); поэтому четыре точки пересечения B , C , E и F окружности Γ с окружностями Γ_2 и Γ_3 будут попарно антигомологичны относительно одного из центров подобия этих двух окружностей; при этом точка B будет антигомологична именно точке C , а не точке F , так как угол между Γ и Γ_2 в точке B и угол между Γ и Γ_3 в точке F будут иметь оба одинаковое направление (противоположное направлению угла между Γ и Γ_1 в точке A), в то время как в антигомологических точках соответствующие углы должны иметь противоположные направления. Итак, точки B и C , E и F будут попарно антигомологичны относительно одного из центров подобия окружностей Γ_2 и Γ_3 , откуда следует, что N будет одним из центров подобия окружностей Γ_2 и Γ_3 .

Остаётся ещё показать, что три центра подобия L , M и N окружностей Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , взятых попарно, лежат на одной оси подобия. Это вытекает из следующих соображений. Если окружность Γ пересекает все окружности Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 под *строго равными* углами, то все три центра подобия будут внешними (см. решение упр. 256). Если же Γ пересекает окружности Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 не под строго равными углами, то она пересекает две из них под строго равными углами, а третью — под дополнительным. Имеем один внешний и два внутренних центра подобия (опять в силу сказанного в решении упр. 256). Как в том, так и в другом случае три центра подобия L , M и N действительно лежат на одной прямой — оси подобия.

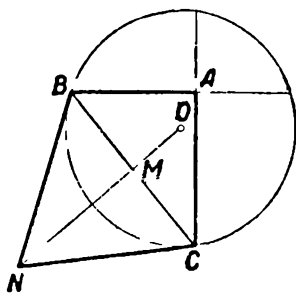
280. Пусть для определённости требуется найти окружность, касающуюся данных окружностей O_1 , O_2 и O_3 *одинаковым* образом. Обозначим через a , b и c точки касания искомой окружности с тремя



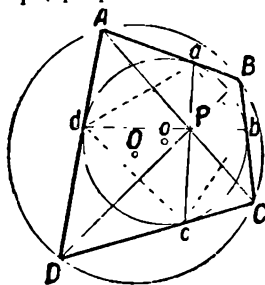
Черт. 504.

данными и через S_{12} , S_{23} и S_{13} — внешние центры подобия данных окружностей.

Рассмотрим три инверсии соответственно с полюсами S_{12} , S_{23} и S_{31} , преобразующие последовательно O_1 в O_2 , O_2 в O_3 , O_3 в O_1 . Точка a преобразуется этими тремя инверсиями (в силу п. 227) последовательно в точку b , в точку c и, наконец, в точку a . Обратно, если a — точка первой окружности, преобразующаяся последовательностью трёх указанных инверсий в самоё себя, и b и c — соответствующие ей точки окружностей O_2 и O_3 , то окружность, проходящая через точки a , b и c , касается трёх данных, так как иначе точкой, антигомологической точке c относительно S_{31} , была бы не точка a , а вторая точка пересечения окружности abc с окружностью O_1 (ср. решение задачи 279).



Черт. 505.



Черт. 506.

Таким образом, определение положения точки a сведено к упражнению 253; точки b и c можно получить с помощью указанных выше инверсий.

Аналогичные рассуждения применимы и к окружностям, касающимся данных неодинаковым образом.

281. Пусть BAC — прямой угол, о котором идёт речь (черт. 505). Точка N , в которой пересекаются касательные к окружности в точках B и C , обратна относительно данной окружности точке M — середине хорды BC , так как произведение $OM \cdot ON$ равно квадрату радиуса окружности (п. 216). Так как геометрическое место точек M есть окружность, то геометрическое место точек N есть также окружность (хорда BC не может совпадать с диаметром, следовательно, точка M не может совпадать с центром O , и геометрическое место точек N не вырождается в прямую линию; исключение будет только в том случае, когда точка A лежит на окружности — при этом точка M всё время совпадает с O , а точки N все лежат в бесконечности).

282. Пусть для определённости окружность o расположена внутри четырёхугольника $ABCD$, так что последний принадлежит к тому типу описанных четырёхугольников, который изображён на чертеже 332.

1°. Прямые ac , bd , AC и BD пересекаются в силу упражнения 239 в одной точке P (черт. 466 и 506). Эта точка P имеет своей полярной относительно окружности o ту прямую, на которой лежит точка пере-

сечения e прямых ab и cd , а также точка f пересечения прямых ad и bc (п. 211). Та же точка P имеет своей полярной относительно окружности O ту прямую, на которой лежит точка пересечения E прямых AB и CD , а также точка пересечения F прямых AD и BC (опять в силу п. 211). Так как точки e, f, E и F лежат, в силу упражнения 239, на одной прямой, то точка P имеет относительно окружностей o и O одну и ту же полярную и, следовательно, является (упр. 241.2°) одной из их предельных точек.

2°. Так как прямая AB касается окружности o в точке a , то прямая Pa есть биссектриса угла APB в силу задачи 278. Точно так же Pb есть биссектриса угла BPC .

3°. Так как прямые Pa и Pb являются биссектрисами углов APB и BPC , то эти прямые взаимно перпендикулярны. Поэтому окружность, которая получилась бы в задаче 281, исходя из точки P и окружности o , проходит через точки A, B, C и D и, следовательно, совпадает с O .

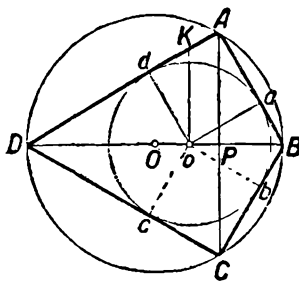
4°. Если существует один четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность O и описанный около окружности o , то при вращении пары перпендикулярных прямых ac и bd около точки P точки пересечения касательных в точках a, b, c и d будут перемещаться по окружности (задача 281), и эта окружность будет совпадать с окружностью O , так как на ней должны лежать точки A, B, C и D .

Итак, если существует один четырёхугольник, вписанный в окружность O и описанный около окружности o , то существует бесчисленное множество таких четырёхугольников.

Среди этих четырёхугольников можно найти такой, для которого одна из диагоналей, например BD , будет совпадать с диаметром окружности O . Для этого достаточно выбрать такое положение точки a , при котором касательная aB пересекала бы окружность O в конце диаметра, проходящего через P . Так как точка o лежит на прямой OP , то четырёхугольник этот будет симметричен относительно прямой OP (черт. 507). При этом треугольник ABD будет прямоугольным. Восставим в точке o перпендикуляр oK к прямой BD . Получим два равных треугольника oAB и oK^2 . Применяя к треугольнику DoK теорему упражнения 136, получим $\frac{1}{od^2} = \frac{1}{oD^2} + \frac{1}{oK^2} = \frac{1}{oD^2} + \frac{1}{oB^2}$ или

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R + \delta)^2} + \frac{1}{(R - \delta)^2}, \quad (1)$$

где R и r — радиусы окружностей O и o , а δ — расстояние между их центрами.



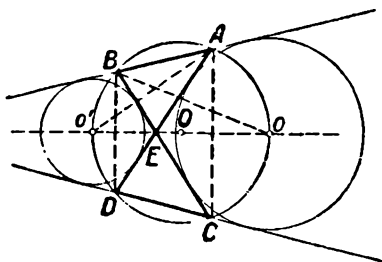
Черт. 507.

Чтобы в окружность O можно было вписать четырехугольник, описанный около окружности o , необходимо, чтобы их радиусы и расстояние между их центрами удовлетворяли соотношению (1).

Обратно, если это соотношение выполнено и $R > \delta$ (в выведенное соотношение R и δ входят симметрично, и потому возможно как $R > \delta$, так и $R < \delta$), то можно построить прямоугольный треугольник ABD , имеющий своей гипотенузой диаметр DB окружности O , проходящий через точку o , и основанием биссектрисы — эту же точку o . Окружность, имеющая своим центром точку o и касающаяся сторон AD и AB , будет иметь радиус, определяемый соотношением (1), и потому будет совпадать с данной окружностью o . Строя точку C , симметричную с A относительно BD , получим один из искомым четырехугольников.

Примечание. Мы предполагали, что окружность o располагается внутри четырехугольника $ABCD$.

Если четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, но окружность o касается продолжений всех его сторон, как на чертеже 334, то все предыдущие рассуждения сохраняют силу с единственным изменением, состоящим в том, что в соотношении (1) $R < \delta$.



Черт. 503.

Пусть теперь описанный четырехугольник $ABCD$ — несобственный, как на черт. 336 и 508. Если четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то углы ABC и ADC равны, так что треугольники ABE и CDE , где E — точка пересечения прямых AD и BC , подобны. Из подобия этих треугольников имеем $AB = k \cdot CD$; $BE = k \cdot DE$; $AE = k \cdot CE$, где k — коэффициент подобия. Условие $AB + AD = BC + CD$, при

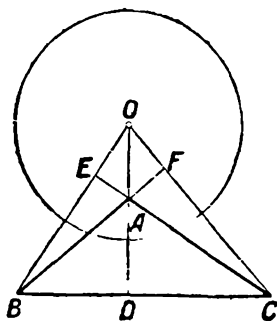
котором четырехугольник $ABCD$ — описанный (сравнить решение упр. 87), принимает вид $k \cdot CD + (k \cdot CE + ED) = (k \cdot DE + EC) + CD$ или $(k - 1)(CD + EC - ED) = 0$. Так как $CD + EC > ED$, то $k = 1$, и, следовательно, $AB = CD$; $AD = BC$. Итак, четырехугольник $ABCD$ есть *антипараллелограмм* (п. 46а), т. е. образован диагоналями AD и BC и боковыми сторонами AB и CD равнобедренной трапеции $ABDC$.

Обратно, всякий антипараллелограмм можно, очевидно, вписать в окружность. При этом середины o и o' дуг AC и BD равноудалены от всех сторон антипараллелограмма, так как прямые Bo и Ao' — биссектрисы углов ABC и BAD . Каждая из точек o и o' есть центр окружности, касающейся всех сторон антипараллелограмма. Соотношение (1) заменяется условием $R = \delta$ (причем $r < 2R$).

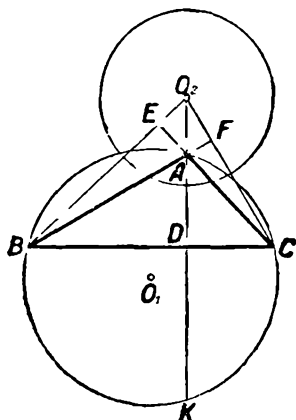
283. Пусть O — центр окружности, по отношению к которой каждая вершина данного треугольника ABC является полюсом противоположающей стороны. Так как прямая OA перпендикулярна к поляре BC точки A , то точка O должна лежать на высоте AD треугольника, проходящей через A . По той же причине точка O должна лежать на двух других высотах треугольника. Таким образом, O есть точка пересечения высот треугольника. Радиус искомой окружности должен удовлетворять соотношениям $R^2 = OA \cdot OD = OB \cdot OE = OC \cdot OF$ (черт. 509).

При этом три последние произведения равны в силу подобия треугольников OAE и OBD , OAF и OCD . Треугольник ABC должен быть тупоугольным для того, чтобы точки A и D (а также B и E , C и F) лежали по одну сторону от точки пересечения O его высот.

284. Пусть существует треугольник ABC , вписанный в окружность O_1 и сопряжённый (задача 283) с окружностью O_2 (черт. 510). В силу сказанного в решении задачи 283 точка O_2 есть точка пересечения высот этого треугольника. Так как прямая BC есть полярная точки A относительно окружности O_2 , то радиус R_2 окружности O_2 удовлетво-



Черт. 509.



Черт. 510.

ряет условию $R_2^2 = O_2A \cdot O_2D$. Если K — вторая точка пересечения прямой AD с окружностью O_1 , то $O_2D = \frac{1}{2} O_2K$ (упр. 70), так что

$$R_2^2 = \frac{1}{2} O_2A \cdot O_2K, \quad (1)$$

т. е. квадрат радиуса второй окружности равен половине степени её центра относительно первой окружности.

Кроме того, одна из вершин треугольника ABC necessarily лежит внутри окружности O_2 , а две другие — вне её. В самом деле, если прямая BC не пересекает окружности O_2 , то полюс A прямой BC лежит внутри этой окружности, а точки B и C — вне её. Если же прямая BC пересекает окружность O_2 , то одна из точек B и C лежит внутри окружности (так как одна из точек B и C лежит на полярной другой) и, следовательно, две другие вершины треугольника — вне её. Так как на окружности O_1 лежат как точки, внутренние по отношению к окружности O_2 , так и точки, внешние относительно O_2 , то окружности O_1 и O_2 пересекаются.

Обратно, пусть O_1 и O_2 — две пересекающиеся окружности, удовлетворяющие условию (1). Пусть A — одна из точек окружности O_1 ,

сумма углов криволинейного треугольника $AB'C'$ будет меньше суммы углов прямолинейного треугольника $AB'C'$.

Если не существует окружности, ортогональной к трём данным, то, выполнив ту же инверсию, мы снова получим два прямолинейных отрезка AB' и AC' . При этом уже не будет существовать окружности с центром A , ортогональной к той окружности, дугой которой служит $B'C'$. Следовательно, точка A будет внутренней по отношению к этой последней окружности (черт. 511), а сумма углов криволинейного треугольника $AB'C'$ будет больше суммы углов прямолинейного треугольника $AB'C'$.

286. Так как точки B' , C' и D' лежат на одной прямой, то мы можем предполагать, что и точка C' лежит между точками B' и D' ; при этом (п. 127) $AB'^2 \cdot D'C' + AD'^2 \cdot B'C' - AC'^2 \cdot B'D' = B'C' \cdot C'D' \cdot B'D'$. Если k — степень инверсии, преобразующей точки B , C и D в точки B' , C' и D' , то $AB' = \frac{k}{AB}$; $AC' = \frac{k}{AC}$; $AD' = \frac{k}{AD}$; $B'C' = \frac{k \cdot CB}{AB \cdot AC}$; $C'D' = \frac{k \cdot DC}{AC \cdot AD}$; $B'D' = \frac{k \cdot DB}{AB \cdot AD}$.

Подставляя эти значения в предыдущее соотношение, получим:

$$\frac{k^3 \cdot CD}{AB^2 \cdot AC \cdot AD} + \frac{k^3 \cdot BC}{AD^2 \cdot AB \cdot AC} - \frac{k^3 \cdot BD}{AC^2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{k^3 \cdot BC \cdot CD \cdot BD}{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2}.$$

Сокращая на k^3 и умножая почленно на $AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2$, найдём $CD \cdot AC \cdot AD + BC \cdot AB \cdot AC - BD \cdot AB \cdot AD = BC \cdot CD \cdot BD$. Отсюда, группируя члены, будем иметь $AC \cdot (AD \cdot CD + AB \cdot BC) = BD \cdot (AB \cdot AD + BC \cdot CD)$, или $\frac{AC}{AB \cdot AD + BC \cdot CD} = \frac{BD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}$, т. е. соотношение, выведенное в п. 240.

КНИГА ЧЕТВЁРТАЯ.

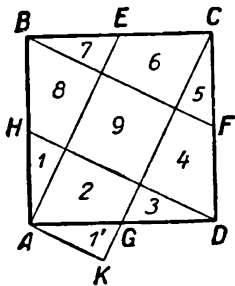
ПЛОЩАДИ.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I (стр. 232).

287. Так как высота равностороннего треугольника со стороной a равна $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$ (сравнить п. 167), то его площадь равна $\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$.

288. В силу упражнения 287 имеем равенство $\frac{1}{4} a^2\sqrt{3} = 1 \text{ м}^2$, откуда $a = 1,52 \text{ м}$.

289. Пусть $ABCD$ — данный квадрат (черт. 513); E, F, G и H — середины его сторон. Прямые AE, BF, CG и DH пересекают площадь данного квадрата на девять частей, одна из которых (обозначенная на чертеже цифрой 9) есть квадрат.



Черт. 513.

Опустив из точки A перпендикуляр AK на прямую CG , получим треугольник I' , равный треугольнику I . Следовательно, сумма площадей частей 1 и 2 равна сумме площадей частей I' и 2, т. е. площади квадрата 9.

Итак, $\text{пл. } 1 + \text{пл. } 2 = \text{пл. } 3 + \text{пл. } 4 = \text{пл. } 5 + \text{пл. } 6 = \text{пл. } 7 + \text{пл. } 8 = \text{пл. } 9$. Отсюда и следует, что площадь нового квадрата в пять раз меньше площади данного.

290. Так как $\text{пл. } 1 = \text{пл. } 2$; $\text{пл. } 3 = \text{пл. } 4$; $\text{пл. } 1 + \text{пл. } 5 + \text{пл. } 3 = \text{пл. } 2 + \text{пл. } 6 + \text{пл. } 4$ (черт. 514), то $\text{пл. } 5 = \text{пл. } 6$.

291. Так как из двух треугольников с общим основанием большую площадь имеет тот, который имеет большую высоту, то из всех треугольников с общим основанием и равными углами при вершине мы должны выбрать тот, который имеет наибольшую высоту.

Геометрическое место вершин A равных углов этих треугольников есть дуга BAC (черт. 515); точнее говоря, дуга BAC и дуга, ей симметричная относительно BC ; но вторая дуга не приводит к новым треугольникам. Если A_0 — точка пересечения этой дуги с перпендикуляром, восстановленным в середине H_0 стороны BC , A — произвольная точка этой дуги и AH — высота треугольника ABC , то мы имеем, очевидно, $AH < A_0H_0$, и, следовательно, наибольшей высотой будет A_0H_0 .

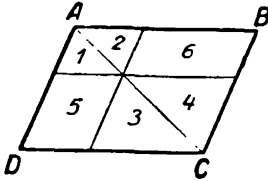
Итак, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник A_0BC .

292. Если O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ (черт. 278), то $\text{пл. } ACD = \text{пл. } BCD$. Отнимая от равных площадей площадь треугольника COD , получим $\text{пл. } AOD = \text{пл. } BOC$.

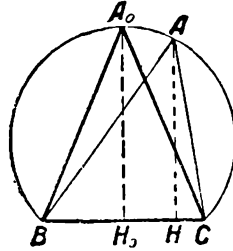
Обратно, если в некотором четырёхугольнике два треугольника, образованные двумя его противоположными сторонами и отрезками

диагоналей, равновелики, то данный четырёхугольник есть трапеция.

Действительно, если $\text{пл. } AOD = \text{пл. } BOC$, то и $\text{пл. } AOD + \text{пл. } COD = \text{пл. } BOC + \text{пл. } COD$, т. е. $\text{пл. } ACD = \text{пл. } BCD$. Следовательно, треугольники ACD и BCD , имеющие общее основание, имеют и равные высоты, так что прямая AB параллельна прямой CD .

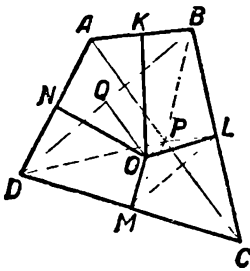


Черт. 514.

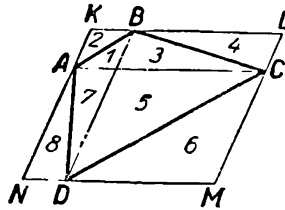


Черт. 515.

293. Пусть K, L, M, N, P и Q — середины сторон и диагоналей четырёхугольника $ABCD$ (черт. 516), OP и OQ — прямые, параллельные



Черт. 516.



Черт. 517.

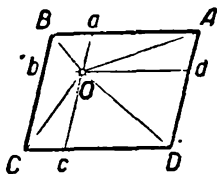
ельные BD и AC . Так как $AP = PC$, то $\text{пл. } ABP = \text{пл. } PBC$, $\text{пл. } ADP = \text{пл. } PDC$ и, следовательно, $\text{пл. } ABPD = \text{пл. } BCDP = \frac{1}{2} \text{пл. } ABCD$. Далее, так как $BL = LC$; $DM = MC$, то $\text{пл. } BPL = \text{пл. } LPC$, $\text{пл. } DPM = \text{пл. } MPC$ и, следовательно, $\text{пл. } PLCM = \frac{1}{2} \text{пл. } BCDP = \frac{1}{4} \text{пл. } ABCD$. Наконец, прямая OP параллельна BD и, следовательно, параллельна LM ; так что $\text{пл. } OLCM = \text{пл. } PLCM = \frac{1}{4} \text{пл. } ABCD$. Точно так же доказывается, что и каждая из площадей $ONAK$, $OKBL$ и $OMDN$ равняется одной четверти площади $ABCD$.

294. Так как $\text{пл. } 1 = \text{пл. } 2$, $\text{пл. } 3 = \text{пл. } 4$, $\text{пл. } 5 = \text{пл. } 6$, $\text{пл. } 7 = \text{пл. } 8$ (черт. 517), то площадь полученного параллелограмма $KLMN$ вдвое более площади данного четырёхугольника.

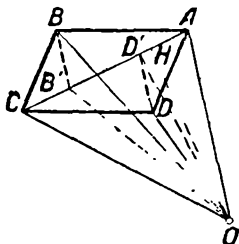
Если диагонали двух четырёхугольников соответственно равны и пересекаются под равными углами, то обоим четырёхугольникам

соответствуют равные параллелограммы, аналогичные $KLMN$, а потому четырёхугольники равновелики.

295. Пусть O — такая точка, лежащая внутри треугольника, что $\text{пл. } OBC : \text{пл. } OCA : \text{пл. } OAB = p : q : r$ (черт. 188). Треугольники OCA и OAB имеют общее основание OA , и потому их площади относятся как соответствующие высоты или, что то же, как отрезки aC и aB .



Черт. 518.



Черт. 519.

Таким образом имеем $aC : aB = q : r$; $bA : bC = r : p$; $cB : cA = p : q$. Следовательно, для построения точки O достаточно разделить две стороны треугольника в данных отношениях и соединить точки деления с противолежащими вершинами.

Если треугольники OBC , OCA , OAB равновелики, то точка O есть центр тяжести треугольника (п. 56).

295а. Если прямые Aa , Bb , Cc (черт. 188) проходят через одну точку O , то (упр. 295) $aB : aC = \text{пл. } OAB : \text{пл. } OAC$; $bC : bA = \text{пл. } OBC : \text{пл. } OBA$; $cA : cB = \text{пл. } OCA : \text{пл. } OCB$. Перемножая эти три равенства, получим $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$ (все отрезки рассматриваются лишь по абсолютной величине).

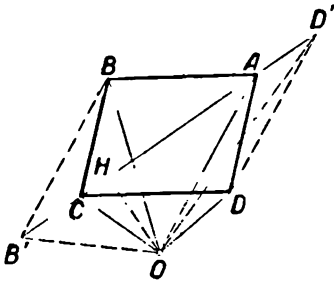
296. 1°. Проведим через точку O прямые, параллельные сторонам параллелограмма $ABCD$ (черт. 518), и обозначим через a , b , c и d точки пересечения этих прямых со сторонами AB , BC , CD и DA . Имеем $\text{пл. } OAa = \text{пл. } OdA$; $\text{пл. } OaB = \text{пл. } OBb$; $\text{пл. } Ocb = \text{пл. } Ocb$; $\text{пл. } Ocd = \text{пл. } Odd$. Откуда путём почленного сложения и получаем искомое соотношение.

2°. Проводим через точки B и D прямые BB' и DD' , параллельные AO (черт. 519 и 520), и пусть B' и D' — точки пересечения этих прямых с AC . Треугольники ADD' и CBB' равны, откуда $AD' = B'C$.

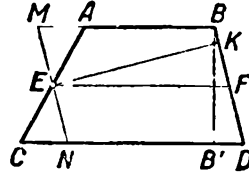
Так как прямая BB' параллельна прямой AO , то $\text{пл. } OAB = \text{пл. } OAB'$ и аналогично $\text{пл. } OAD = \text{пл. } OAD'$. Но треугольники OAD' и $OB'C$ равновелики, как имеющие равные основания $AD' = B'C$ и общую высоту OH , и потому $\text{пл. } OAD = \text{пл. } OB'C$. Так как $AC = AB' + B'C$ (черт. 519) или $AC = AB' - B'C$ (черт. 520), то $\text{пл. } OAC = \frac{1}{2} AC \cdot OH = (AB' \pm B'C) \cdot OH = \frac{1}{2} AB' \cdot OH \pm \frac{1}{2} BC \cdot OH = \text{пл. } OAB' \pm \text{пл. } OB'C = \text{пл. } OAB \pm \text{пл. } OAD$.

297. Пусть E и F — середины непараллельных сторон трапеции $ABDC$ (черт. 521).

1°. Если BB' — перпендикуляр к CD и EK — перпендикуляр к BD , то из подобия треугольников EFK и BDB' , имеющих соответственно перпендикулярные стороны, следует, что $EF \cdot BB' = BD \cdot EK$, причём $EF \cdot BB'$ есть площадь данной трапеции.



Черт. 520.



Черт. 521.

2°. Если прямая MN , проходящая через точку E , параллельна BD , то треугольники EAM и ECN равны, откуда пл. $ABDC = \text{пл. } MBDN = BD \cdot EK$.

Площадь треугольника BED равна $\frac{1}{2} BD \cdot EK = \frac{1}{2} \text{пл. } ABDC$.

298. Если O — точка, лежащая внутри правильного многоугольника $ABC \dots KL$, то пл. $ABC \dots KL = \text{пл. } OAB + \text{пл. } OBC + \dots + \text{пл. } OKL + \text{пл. } OLA$. Отсюда следует, что пл. $ABC \dots KL$ равна половине произведения стороны многоугольника на сумму расстояний от точки O до всех его сторон, так что эта сумма расстояний не зависит от выбора точки O .

299. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 522), I и R — центр и радиус вписанной окружности, I_a и R_a — центр и радиусневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон. Как в п. 254, имеем пл. $ABC = \text{пл. } IBC + \text{пл. } ICA + \text{пл. } IAB = \frac{1}{2} R \cdot (BC + CA + AB) = p \cdot R$. Аналогично пл. $ABC =$

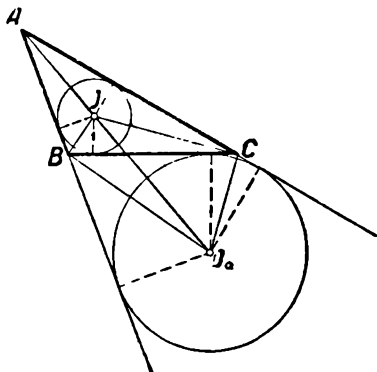
$$= -\text{пл. } I_a BC + \text{пл. } I_a CA + \text{пл. } I_a AB = \frac{1}{2} R_a \cdot (-BC + CA + AB) = R_a(p - a).$$

300. В силу упражнения 299 имеем $\frac{1}{R} = \frac{p}{\text{пл. } ABC}$; $\frac{1}{R_a} = \frac{p-a}{\text{пл. } ABC}$; $\frac{1}{R_b} = \frac{p-b}{\text{пл. } ABC}$; $\frac{1}{R_c} = \frac{p-c}{\text{пл. } ABC}$. Отсюда $\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{3p - (a+b+c)}{\text{пл. } ABC} = \frac{p}{\text{пл. } ABC} = \frac{1}{R}$.

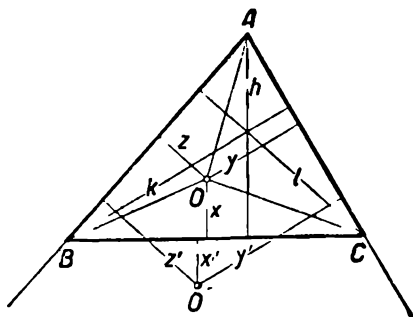
301. Пусть O — точка, лежащая внутри треугольника ABC (черт. 523). Имеем $x : h = \text{пл. } OBC : \text{пл. } ABC$; $y : k = \text{пл. } OCA : \text{пл. } ABC$; $z : l = \text{пл. } OAB : \text{пл. } ABC$. Отсюда

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = \frac{\text{пл. } OBC + \text{пл. } OCA + \text{пл. } OAB}{\text{пл. } ABC} = \frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } ABC} = 1.$$

Если точка O' лежит вне треугольника, например в области, прилежащей к стороне BC и к продолжениям двух других сторон, и x', y' и



Черт. 522.



Черт. 523.

z' — расстояния точки O' от сторон треугольника, то $-\frac{x'}{h} + \frac{y'}{k} + \frac{z'}{l} = \frac{-\text{пл. } O'BC + \text{пл. } O'CA + \text{пл. } O'AB}{\text{пл. } ABC} = 1$. Аналогично мы имеем во всех случаях равенство $\pm \frac{x}{h} \pm \frac{y}{k} \pm \frac{z}{l} = 1$.

Примечание. Будем считать расстояние x точки O , лежащей в плоскости треугольника, от его стороны BC положительным, если точка O лежит по ту же сторону от прямой BC , как и вершина A , и отрицательным — в противном случае. Аналогичные условия примем для расстояний y и z . При этом для любой точки O плоскости имеем по абсолютной величине и по знаку $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1$, или, принимая во внимание, что $\frac{1}{h} = \frac{BC}{2 \text{ пл. } ABC}$ и т. д., $BC \cdot x + CA \cdot y + AB \cdot z = 2 \text{ пл. } ABC$.

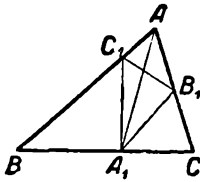
УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II (стр. 235).

302. Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 делят (внутренним или внешним образом) стороны треугольника ABC (черт. 524) в отношениях $A_1B:A_1C = \alpha$; $B_1C:B_1A = \beta$; $C_1A:C_1B = \gamma$ по абсолютной величине и по знаку. При этом $\text{пл. } AB_1C_1 : \text{пл. } ABC = \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{AC_1}{AB}$. Но $\frac{AB_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1C} = \frac{1}{1 - B_1C:B_1A} = \frac{1}{1 - \beta}$; $\frac{AC_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC_1 + C_1B} = \frac{1}{1 - C_1B:C_1A} = \frac{1}{1 - 1:\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$. Отсюда $\text{пл. } AB_1C_1 = \frac{\gamma}{(1 - \beta)(\gamma - 1)} \cdot \text{пл. } ABC$.

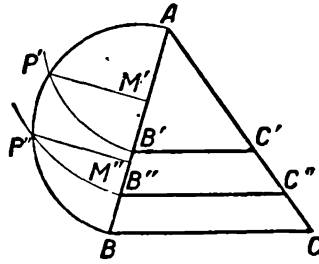
Из равенства $\text{пл.} A_1 B_1 C_1 = \text{пл.} ABC - \text{пл.} AB_1 C_1 - \text{пл.} BC_1 A_1 - \text{пл.} CA_1 B_1$ следует $\text{пл.} A_1 B_1 C_1 = \text{пл.} ABC \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} + \frac{\alpha}{(1-\gamma)(1-\alpha)} + \frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \right) = \frac{1-\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot \text{пл.} ABC$.

Чтобы точки A_1 , B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $1-\alpha\beta\gamma=0$. В этом и состоят теоремы пп. 192—193.

Равенство $\text{пл.} A_1 B_1 C_1 = \text{пл.} ABC - \text{пл.} AB_1 C_1 - \text{пл.} BC_1 A_1 - \text{пл.} CA_1 B_1$ и все предыдущие соотношения сохраняют силу во всех случаях, если рассматривать знаки площадей, как это сделано в решении задачи 324.



Черт. 524.



Черт. 525.

303. Начнём с деления площади треугольника ABC прямой $B'C'$, параллельной стороне BC (черт. 525), в данном отношении $m:n$, считая от вершины A .

Пусть M' — точка, делящая сторону AB в отношении $AM':M'B = m:n$, так что

$$AM':AB = m:(m+n). \quad (1)$$

С другой стороны, по условию $\text{пл.} AB'C' : \text{пл.} BCC'B' = m:n$, так что

$$\text{пл.} AB'C' : \text{пл.} ABC = m:(m+n). \quad (2)$$

Но

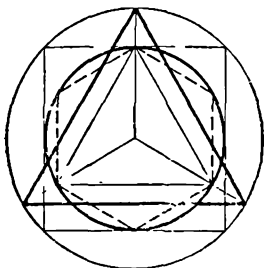
$$\text{пл.} AB'C' : \text{пл.} ABC = AB'^2 : AB^2. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует $AB'^2 : AB^2 = AM' : AB$, т. е. $AB'^2 = AB \cdot AM'$. Таким образом, задача сведена к построению среднего пропорционального между AB и AM' (п. 153): на AB как на диаметре описываем полуокружность; если перпендикуляр, восстановленный к стороне AB в точке M' , пересекает её в точке P' , то $AB' = AP'$.

Чтобы разделить площадь треугольника ABC прямыми, параллельными BC , на данное число равновеликих частей, делим на то же число равных частей сторону AB точками M', M'', \dots , и для каждой из этих точек повторяем предыдущее построение (на черт. 525 показано деление площади треугольника на три равновеликие части).

Действительно, чтобы разделить площадь треугольника прямыми, параллельными основанию, например, на пять равных частей, достаточно разделить её (считая каждый раз от вершины) в отношениях 1:4; 2:3; 3:2; 4:1.

304. Начнём с деления площади трапеции $BCC'B'$ (черт. 525) прямой $B''C''$, параллельной основаниям BC и $B'C'$, в данном отношении $m:n$, считая от меньшего основания $B'C'$.



Черт. 526.

Решение упражнения 303 приводит к следующему построению. Пусть A — точка пересечения непараллельных сторон. На отрезке AB , как на диаметре, строим полуокружность и засекаем отрезок $AP' = AB'$. Перпендикуляр, опущенный из точки P' на AB , определяет точку M' . Делим отрезок $M'B$ в точке M'' в отношении $m:n$. Восстанавливая в точке M'' перпендикуляр к AB , получим на полуокружности точку P'' . При этом $AB'' = AP''$.

Действительно, $\text{пл.} AB'C' : \text{пл.} AB''C'' : \text{пл.} ABC = AB'^2 : AB''^2 : AB^2 = AP'^2 : AP''^2 : AB^2 = (AM' \cdot AB) : (AM'' \cdot AB) : AB^2 = AM' : AM'' : AB$. Следовательно, $\text{пл.} B'C'C'B' : \text{пл.} B''C''CB = (\text{пл.} AB''C'' - \text{пл.} AB'C') : (\text{пл.} ABC - \text{пл.} AB''C'') = (AM'' - AM') : (AB - AM'') = M'M'' : M''B = m:n$.

Чтобы теперь разделить площадь трапеции на данное число равновеликих частей, строим, как указано, точку M' , делим отрезок $M'B$ на данное число равных частей точками M'', M''', \dots , и для каждой из точек деления повторяем данное выше построение (сравнить конец решения упр. 303).

305. Отношение радиусов обеих окружностей равно $\sqrt{2}$; следовательно, отношение сторон треугольников также равно $\sqrt{2}$, а отношение их площадей равно 2. Но из чертежа 526 очевидно, что площадь правильного вписанного шестиугольника равна удвоенной площади правильного треугольника, вписанного в ту же окружность. Следовательно, площадь большего равностороннего треугольника действительно равна площади шестиугольника.

306. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник (черт. 527), O — точка пересечения его диагоналей; пусть далее прямые AA' и CC' , параллельные данной прямой MN , пересекают диагональ BD в точках A' и C' , а прямые BB' и DD' , параллельные той же прямой MN , пересекают диагональ AC в точках B' и D' . При этом в силу параллельности прямых AA' , BB' , CC' и DD' , пересекающих прямые OA и

OA' , имеем:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{B'D'}{BD}. \quad (1)$$

1°. Так как треугольники OAB и $OA'B'$ имеют общий угол, то $\text{пл. } OAB : \text{пл. } OA'B' = (OA \cdot OB) : (OA' \cdot OB')$. В силу (1) последнее отношение равно единице, и $\text{пл. } OAB = \text{пл. } OA'B'$. Точно так же докажем, что $\text{пл. } OBC = \text{пл. } OB'C'$ и т. д. Таким образом, четырёхугольники равновелики.

2°. Если стороны AB и CD данного четырёхугольника параллельны, то $OA:OB = OC:OD$ или

$$OA \cdot OD = OB \cdot OC. \quad (2)$$

Но в силу (1) $OA \cdot OD = OA' \cdot OD'$; $OB \cdot OC = OB' \cdot OC'$, и равенство (2) переходит в равенство $OA' \cdot OD' = OB' \cdot OC'$, выражающее параллельность прямых $A'B'$ и $C'D'$.

То же относится ко второй паре сторон AD и BC .

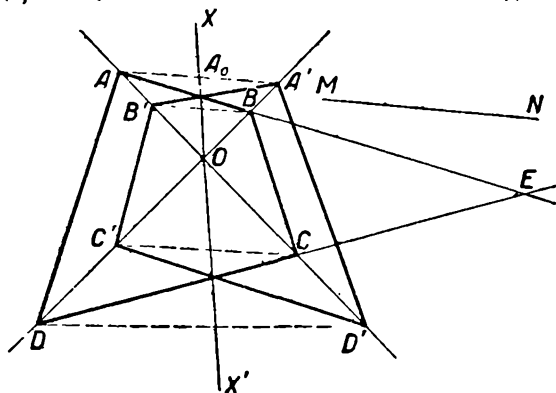
3°. Если стороны AB и CD пересекаются в точке E , то применение теоремы п. 192 к треугольнику OAB и секущей CD приводит к соотношению $\frac{DO}{DB} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{CA}{CO} = 1$ (в котором все отрезки можно

рассматривать как положительные). Отсюда $EA:EB = \frac{DO \cdot CA}{CO \cdot DB}$. Если

стороны $A'B'$ и $C'D'$ пересекаются в точке E' , то точно так же $E'A':E'B' = \frac{D'O \cdot C'A'}{C'O \cdot D'B'}$. Но в силу (1) $DO \cdot CA = D'O \cdot C'A'$; $CO \cdot DB = C'O \cdot D'B'$, так что $EA:EB = E'A':E'B'$.

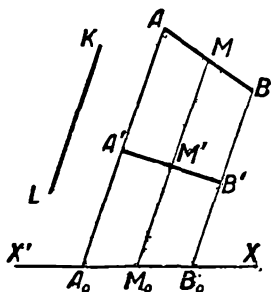
307. Пусть через концы некоторого отрезка AB проведены прямые AA_0 и BB_0 (черт. 528), параллельные данному направлению KL и пересекающие данную прямую XX' в точках A_0 и B_0 . Отложим на этих прямых отрезки AA' и BB' , пропорциональные расстояниям точек A и B от прямой XX' , т. е. пропорциональные AA_0 и BB_0 , так что $AA':AA_0 = BB':BB_0$. Отсюда будем иметь $(AA_0 - AA'):AA_0 = (BB_0 - BB'):BB_0$, или $A'A_0:AA_0 = B'B_0:BB_0 = h = \text{const}$, и далее $(A'A_0 + B'B_0):(AA_0 + BB_0) = A'A_0:AA_0 = B'B_0:BB_0$.

Если обозначить теперь через M, M' и M_0 середины отрезков $AB, A'B'$ и A_0B_0 , то $A'A_0 + B'B_0 = 2M'M_0$ и $AA_0 + BB_0 = 2MM_0$, так что

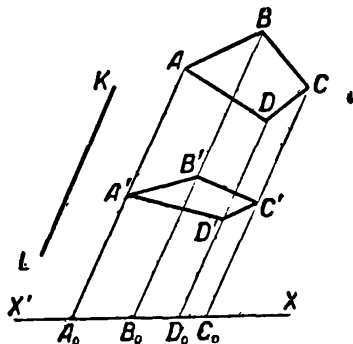


Черт. 527.

$\frac{M'M_0}{MM_0} = \frac{A'A_0}{AA_0} = \frac{B'B_0}{BB_0} = h$. Так как отрезки $M'M_0$ и MM_0 , очевидно, пропорциональны расстояниям точек M' и M от прямой A_0B_0 , то в силу упражнения 297 будем иметь пл. $A'A_0B_0B'$: пл. $AA_0B_0B = h$. Это соотношение будет иметь место для каждой стороны AB , BC , ... данного многоугольника, например данного четырёхугольника $ABCD$ (черт. 529). Итак, имеем пл. $A'A_0B_0B'$: пл. $AA_0B_0B =$ пл. $B'B_0C_0C'$: пл. $BB_0C_0C =$ пл. $C'C_0D_0D'$: пл. $CC_0D_0D =$ пл. $D'D_0A_0A'$: пл. $DD_0A_0A = h$. Так как пл. $ABCD =$ пл. $AA_0B_0B +$ пл. $BB_0C_0C -$ пл. $CC_0D_0D -$ пл. DD_0A_0A и аналогичное выражение имеем и для пл. $A'B'C'D'$, то отсюда и следует, что пл. $A'B'C'D'$: пл. $ABCD = h$. Доказательство, очевидно, сохраняет силу для произвольного многоугольника.



Черт. 528.



Черт. 529.

Новые многоугольники будут равновелики исходным, не совпадая с ними, если $h = A'A_0 : AA_0 = B'B_0 : BB_0 = \dots = 1$ (по абсолютной величине). При этом будем, очевидно, иметь $AA' : AA_0 = BB' : BB_0 = \dots = 2$ (по абсолютной величине и знаку), так как точки A_0, B_0, \dots будут серединами отрезков AA' , BB' , ...

308. В упражнении 306 прямая XX' (черт. 527), проходящая через точку O и через середину A_0 отрезка AA' , делит также пополам отрезки BB' , CC' и DD' . Отсюда следует, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ получается из $ABCD$ построением упражнения 307, причём $AA' : AA_0 = 2$.

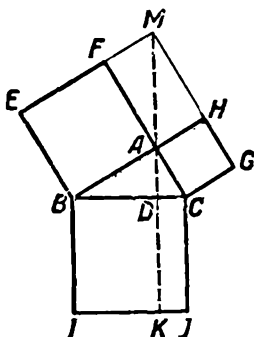
309. Площадь квадрата $HBKF$ (черт. 292) равна пл. $HBCE$ + пл. BCK + пл. EFC = пл. $HBCE$ + пл. ABH + пл. FGH = пл. $ABCD$ + пл. $DEFG$. Так как квадрат $HBKF$ имеет своей стороной гипотенузу HB треугольника ABH , а квадраты $ABCD$ и $DEFG$ — катеты B и $AH = DE$ того же треугольника, то отсюда и вытекает теорема п. 258.

310. Из подобия треугольников ABC , DBA и DAC (черт. 530) имеем пл. ABC : пл. DBA : пл. $DAC = BC^2 : AB^2 : AC^2$, откуда

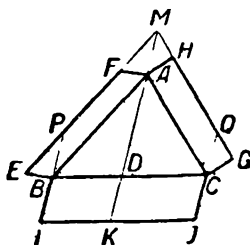
пл. ABC : (пл. $DBA + \text{пл. } DAC$) $= BC^2 : (AB^2 + AC^2)$. Но так как пл. $ABC = \text{пл. } DBA + \text{пл. } DAC$, то $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

311. Пусть стороны BI и CJ параллелограмма $BCJI$ равны и параллельны AM (черт. 531); пусть далее прямая AM пересекает BC и IJ соответственно в точках D и K , а прямые BI и CJ пересекают EF и GH соответственно в точках P и Q . При этом будем иметь $BP = AM$, а так как $BI = AM$, то $BP = BI$; аналогично $CQ = CJ$.

Так как параллелограммы, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики, то пл. $ABEF = \text{пл. } ABPM = \text{пл. } BDKI$, пл. $ACGH = \text{пл. } ACQM = \text{пл. } DCJK$. Отсюда пл. $ABEF + \text{пл. } ACGH = \text{пл. } BDKI + \text{пл. } DCJK = \text{пл. } BCJI$.



Черт. 530.



Черт. 531.

Чтобы показать, что доказанная теорема включает в себя как частный случай теорему о квадрате гипотенузы, предположим, что угол BAC — прямой и что оба параллелограмма $ABEF$ и $ACGH$ — квадраты (черт. 530). При этом четырёхугольник $AFMH$ будет прямоугольником, так что $FM = AH = AC$. Следовательно, треугольники FAM и ABC равны, откуда $AM = BC$ и $\angle CAD = \angle MAF = \angle ABC$. Отсюда следует, что прямая AM , а следовательно, и BI , перпендикулярна к BC и что $BI = AM = BC$. Таким образом, параллелограмм $BCJI$ есть также квадрат, и этот квадрат равновелик по доказанному сумме квадратов $ABEF$ и $ACGH$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III (стр. 239).

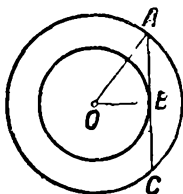
312. В силу п. 261 имеем $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,5642$ м, или 56,42 см.

313. В силу п. 262 имеем равенство $\frac{\pi R^2 \cdot 15,25}{400} = 1$, откуда $R = \sqrt{\frac{400}{15,25\pi}} = 2,887$ м.

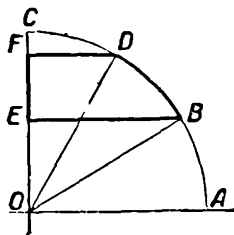
314. В силу п. 262 и решения упражнения 287 имеем $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = 1$ или $0,0906 R^2 = 1$, откуда $R = 3,32$ м.

315. Площадь кольца, заключённого между двумя концентрическими окружностями радиусов OA и OB (черт. 532), равна разности площадей этих окружностей, т. е. $\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OB^2 = \pi \cdot (OA^2 - OB^2) = \pi \cdot AB^2$ (на основании теоремы п. 258). Но $\pi \cdot AB^2$ есть площадь круга, радиус которого равен AB .

316. Так как отрезки AB и CD равны, то и дуги AB и CD равны, и $\angle AOB = \angle COD$ (черт. 533). Следовательно, треугольники BOE



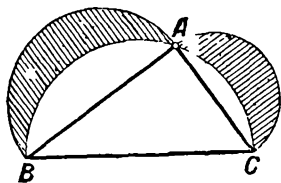
Черт. 532.



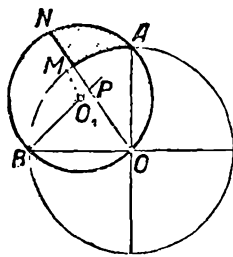
Черт. 533.

и DOF равны, и $\text{пл.} BDFE = \text{пл.} OBDF - \text{пл.} OBE = \text{пл.} OBDF - \text{пл.} ODF = \text{пл.} \text{сектора } OBD$.

317. Сумму площадей двух луночек, заштрихованных на чертеже 534, можно найти, прибавляя к площади треугольника ABC сумму площадей двух полуокружностей, построенных на катетах, т. е.



Черт. 534.



Черт. 535.

$$\frac{\pi \cdot AB^2}{8} + \frac{\pi \cdot AC^2}{8} = \frac{\pi \cdot (AB^2 + AC^2)}{8} = \frac{\pi \cdot BC^2}{8}, \text{ и вычитая затем площадь}$$

полуокружности, построенной на гипотенузе, т. е. также $\frac{\pi \cdot BC^2}{8}$.

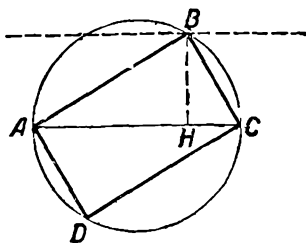
318. Пусть O_1 — середина стороны AB и P — точка пересечения прямых OM и AB (черт. 535). В силу соотношений $\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AO_1N$ и $AO = AO_1 \cdot \sqrt{2}$ имеем: $\text{пл. сектора } OAM = \text{пл. сектора } O_1AN$ или $\text{пл. } OAP + \text{пл. } APM = \text{пл. } O_1PN + \text{пл. } APM + \text{пл. } AMN$. Отсюда $\text{пл. } AMN = \text{пл. } OAP - \text{пл. } O_1PN$. С помощью циркуля и линейки можно, очевидно, построить некоторый треугольник,

площадь которого равнялась бы разности площадей двух треугольников OAP и O_1NP , а следовательно, и квадрат, равновеликий этой разности площадей (п. 265). Этот квадрат и будет равновелик криволинейному треугольнику AMN .

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV (стр. 241).

319. Чтобы построить прямоугольник, зная его периметр и площадь, надо построить два отрезка — стороны искомого прямоугольника. При этом известны: сумма этих отрезков, равная половине данного периметра, и их произведение — площадь искомого прямоугольника. Таким образом задача непосредственно сводится к рассмотренной в п. 155, построение 7.

Так как произведение двух отрезков, сумма которых постоянна, будет наибольшим, если эти отрезки равны (см. п. 155), то из всех прямоугольников, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.



Черт. 536.

320. Пусть $ABCD$ — искомый прямоугольник (черт. 536) и BH — перпендикуляр из вершины B на AC . При этом площадь прямоугольника $ABCD$, очевидно, равна $AC \cdot BH$. Так как AC есть диаметр окружности, то, зная площадь прямоугольника, можно построить отрезок BH . (Если площадь искомого прямоугольника задана условием, что он должен быть равновелик некоторому данному прямоугольнику, то отрезок BH определится как четвёртый пропорциональный к AC и к сторонам этого данного прямоугольника.)

Определив длину отрезка BH , проводим произвольно диаметр AC . Далее проводим прямую, параллельную AC и отстоящую от неё на расстоянии BH . Эта прямая определяет положение вершины B .

Площадь прямоугольника $ABCD$ будет наибольшей, если BH будет иметь наибольшее возможное значение. Но это наибольшее значение BH будет равно радиусу окружности. Следовательно, наибольшую площадь имеет вписанный квадрат.

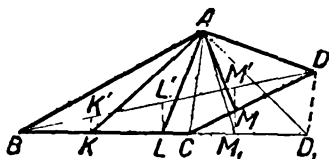
321. Начнём с деления площади данного треугольника ABC (черт. 537) в данном отношении $m:n$ прямой EF , параллельной данной прямой PQ . Если прямая PQ параллельна одной из сторон данного треугольника, то задача сводится к упражнению 303. Поэтому предположим, что прямая PQ не параллельна ни одной из сторон данного треугольника.

Проводим через вершины данного треугольника прямые AA' , BB' и CC' , параллельные PQ . Одна из этих прямых будет проходить через внутреннюю область треугольника; пусть это будет AA' (две другие прямые будут лежать вне треугольника). Если обозначить через D

Делим отрезок XV точкой M в данном отношении $XM:MV = m:n$. Если точка M лежит между X и Y , то остаётся только разделить площадь треугольника ABB' в отношении $XM:MY$ прямой, параллельной BB' . Действительно, если $пл. AKL:пл. KLEDCB = m:n = XM:MV$, то $пл. AKL:пл. LKBB' = XM:MY$ в силу (4). Если бы точка M лежала между Y и Z , то площадь трапеции $BB'EE'$ пришлось бы делить прямой, параллельной BB' , в отношении $YM:MZ$, и т. д. Таким образом мы приходим к задачам, рассмотренным в решениях упражнений 303 и 304.

Умея разделить площадь многоугольника прямой, параллельной PQ , в данном отношении, мы без труда разделим её и на *данное число равновеликих частей*. Так, деление на пять, например, равновеликих частей сводится к делению в отношениях 1:4; 2:3; 3:2; 4:1. Следовательно, отрезок XV придётся делить на n равных частей.

322. Начнём с *деления площади данного четырёхугольника $ABCD$* (черт. 539) в данном отношении $m:n$ прямой, выходящей из вершины A .



Черт. 539.

Построим треугольник ABD_1 , равновеликий данному четырёхугольнику. Для этого проведём прямую DD_1 , параллельную AC , до пересечения с BC в точке D_1 (сравнить п. 265).

Разделим теперь площадь треугольника ABD_1 в данном отношении $m:n$ прямой AM_1 , выходящей из вершины A . Для этого достаточно разделить в данном отношении $BM_1:M_1D_1 = m:n$ сторону BD_1 и соединить делящую точку M_1 с точкой A . Проведя теперь прямую M_1M , параллельную AC , до пересечения в точке M со стороной CD , будем иметь $пл. ACM_1 = пл. ACM$. Следовательно, $пл. AM_1D_1 = пл. ACD_1 - пл. ACM_1 = пл. ACD - пл. ACM = пл. AMD$, и потому $пл. ABM_1:пл. AMD = пл. ABM_1:пл. AM_1D_1 = m:n$.

Вместо того чтобы делить в данном отношении отрезок BD_1 , достаточно (не строя треугольника ABD_1) разделить в данном отношении $BM':M'D = m:n$ диагональ BD данного четырёхугольника и провести прямую $M'M$, параллельную AC .

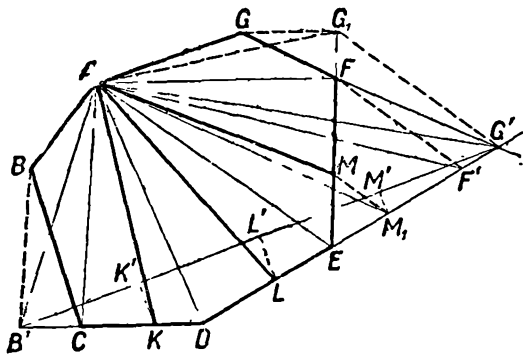
Умея разделить площадь четырёхугольника прямой, выходящей из A , в данном отношении, мы без труда *разделим её и на данное число равновеликих частей*. Так, чтобы разделить её на четыре равновеликие части, делим на четыре равные части $BK' = K'L' = L'M' = M'D$ диагональ BD и проводим прямые $K'K$, $L'L$ и $M'M$, параллельные AC , до пересечения в точках K , L и M со сторонами данного четырёхугольника. Прямые AK , AL и AM делят площадь четырёхугольника на четыре равные части.

323. Начнём с *деления площади данного многоугольника*, например данного семиугольника $ABCDEFG$ (черт. 540), в данном отношении $m:n$ прямой, выходящей из вершины A .

Построим четырёхугольник $AB'DG'$, равновеликий данному многоугольнику, и разобьём этот четырёхугольник прямыми, выходящими

из вершины A , на части, соответственно равновеликие треугольникам ABC , ACD , ADE , AEF и AFG . Для этого достаточно провести прямую BB' , параллельную AC , до пересечения с прямой CD в точке B' , затем прямую GG_1 , параллельную AF , до пересечения с EF в точке G_1 , и, наконец, прямые FF' и G_1G' , параллельные AE , до пересечения с DE в точках F' и G' . Действительно, при этом будем иметь (сравнить п. 265) $\text{пл.}ABC = \text{пл.}AB'C$; $\text{пл.}AEF = \text{пл.}AEF'$; $\text{пл.}AFG = \text{пл.}AFG_1 = \text{пл.}AEG_1 - \text{пл.}AEF = \text{пл.}AEG' - \text{пл.}AEF' = \text{пл.}AF'G'$ и $\text{пл.}ABCDEFG = \text{пл.}AB'DG'$.

Разделим теперь площадь четырёхугольника $AB'DG'$ в данном отношении $m:n$ прямой, выходящей из вершины A . Для этого достаточно (см. решение упр. 322) разделить в данном отношении $m:n$ диагональ $B'G'$ и провести через точку деления M' прямую $M'M_1$, параллельную другой его диагонали AD до пересечения в точке M_1 со стороной четырёхугольника.



Черт. 540.

Предположим для определённости, что точка M_1 лежит между точками E и F' . Проведя через точку M_1 прямую M_1M , параллельную AE , до пересечения с EF в точке M , будем иметь $\text{пл.}AEM_1 = \text{пл.}AEM$, и, следовательно, $\text{пл.}AM_1F' = \text{пл.}AEF' - \text{пл.}AEM_1 = \text{пл.}AEF - \text{пл.}AEM = \text{пл.}AMF$. Отсюда и из выведенных выше равенств найдём, что $\text{пл.}ABCDEM : \text{пл.}AMFG = \text{пл.}AB'DM_1 : \text{пл.}AM_1G' = m:n$. Прямая AM делит, таким образом, площадь данного многоугольника в данном отношении.

Умея разделить площадь многоугольника в данном отношении прямой, выходящей из A , мы без труда разделим её и на данное число равновеликих частей. Деление на четыре равновеликие части $ABCK$, $AKDL$, $ALEM$ и $AMFG$ показано на чертеже 540 (при этом $B'K' = K'L' = L'M' = M'G'$).

ЗАДАЧИ К ЧЕТВЁРТОЙ КНИГЕ (стр. 241).

324. Будем считать площадь какого-либо треугольника ABC положительной, если последовательность вершин A, B, C соответствует

обходу данного треугольника против часовой стрелки, и отрицательной в противном случае. При этом условии знак площади треугольника зависит от порядка, в котором перечисляются его вершины (подобно тому как знак отрезка зависит от последовательности, в которой заданы две его конечные точки; сравнить п. 185), а именно: площадь треугольника изменяет свой знак на обратный при перестановке двух вершин и сохраняет свой знак при „круговой перестановке“ вершин. Таким образом, имеем $\text{пл.}ABC = \text{пл.}BCA = \text{пл.}CAB = -\text{пл.}ACB = -\text{пл.}CBA = -\text{пл.}BAC$. Площади двух треугольников будут иметь одинаковый знак, если они имеют одинаковое направление вращения, и противоположные знаки — в противном случае.

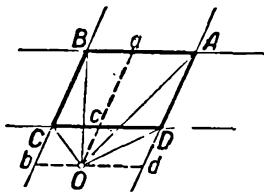
Заметим, что при введённом условии относительно знака площади треугольника для любых трёх точек A , B и C одной прямой и произвольной точки O плоскости имеет место равенство

$$\text{пл.}OAB + \text{пл.}OBC + \text{пл.}OCA = 0, \quad (1)$$

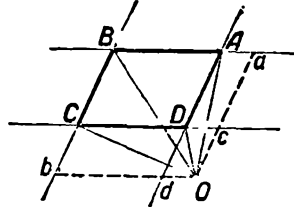
аналогичное равенству (1) п. 186. В самом деле, если точка B лежит между A и C , то имеет место равенство

$$\text{пл.}OAB + \text{пл.}OBC = \text{пл.}OAC, \quad (2)$$

равносильное равенству (1), так как в этом случае площади OAB , OBC и OAC имеют одинаковые знаки и $AB + BC = AC$. Но каждое



Черт. 541.



Черт. 542.

из равенств (1) и (2) сохраняет своё значение при перестановке двух из трёх букв A , B и C ; следовательно, оно верно при всяком расположении точек (сравнить аналогичное доказательство в п. 186).

Предложения, приведённые в упражнении 296, принимают теперь следующую форму:

1°. Где бы ни лежала в плоскости параллелограмма $ABCD$ точка O , имеет место по величине и знаку равенство:

$$\text{пл.} OAB + \text{пл.} OCD = \text{пл.} OBC + \text{пл.} ODA. \quad (3)$$

При этом точка O может лежать внутри параллелограмма (черт. 518) или в части плоскости, ограниченной одной стороной и продолжениями двух других (черт. 541), или в части плоскости, ограниченной продолжениями двух смежных сторон (черт. 542), или, наконец, на одной из сторон параллелограмма или её продолжении.

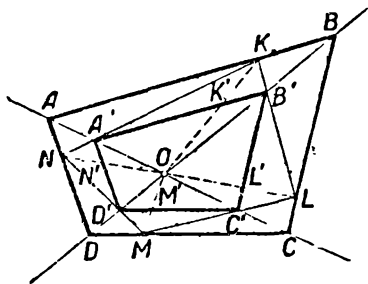
Для доказательства проводим через точку O прямые, параллельные сторонам параллелограмма, и обозначаем через a, b, c и d точки пересечения этих прямых соответственно с прямыми AB, BC, CD и DA . В силу равенства (2) имеем по величине и по знаку $\text{пл.}OAB = \text{пл.}OAa + \text{пл.}OaB$; $\text{пл.}OBC = \text{пл.}OBb + \text{пл.}ObC$ и т. д., откуда $\text{пл.}OAB + \text{пл.}OCD = \text{пл.}OAa + \text{пл.}OaB + \text{пл.}OCc + \text{пл.}OcD$, (4) $\text{пл.}OBC + \text{пл.}ODA = \text{пл.}OBb + \text{пл.}ObC + \text{пл.}ODd + \text{пл.}OdA$. (4')

Так как четырёхугольник $OdaA$ есть параллелограмм, то треугольники $OdaA$ и $OaAa$ равны и имеют одинаковое направление вращения. Следовательно, мы будем иметь по абсолютной величине и знаку $\text{пл.}OdA = \text{пл.}OAa$. Аналогично $\text{пл.}OaB = \text{пл.}OBb$; $\text{пл.}ObC = \text{пл.}OCc$; $\text{пл.}OcD = \text{пл.}ODd$. Таким образом, каждый из членов правой части равенства (4) равен одному из членов правой части равенства (4'). Следовательно, левые части этих равенств равны друг другу, и мы получаем соотношение (3).

2°. Где бы ни лежала в плоскости параллелограмма $ABCD$ точка O , имеет место по величине и знаку равенство

$$\text{пл.}OAC = \text{пл.}OAB + \text{пл.}OAD. \quad (5)$$

Для доказательства проведём через точки B и D прямые, параллельные прямой OA , и обозначим через B' и D' точки пересечения этих прямых с AC (черт. 519 и 520).



Черт. 543.

Так как при перемещении вершины треугольника по прямой, параллельной основанию, сохраняется не только абсолютная величина, но и знак площади треугольника, то $\text{пл.}OAB = \text{пл.}OAB'$; $\text{пл.}OAD = \text{пл.}OAD'$. Так как отрезки AD' и $B'C$ не только равны, но и направлены в одну и ту же сторону, то треугольники OAD' и $OB'C$ имеют одинаковое направление вращения, и потому $\text{пл.}OAD' = \text{пл.}OB'C$. Пользуясь соотношением

(2) и тремя последними равенствами, имеем $\text{пл.}OAC = \text{пл.}OAB' + \text{пл.}OB'C = \text{пл.}OAB' + \text{пл.}OAD' = \text{пл.}OAB + \text{пл.}OAD$. Равенство (5) д. казано.

Если точка O лежит на прямой AC , то приведённое построение невыполнимо. Но при этом, очевидно, $\text{пл.}OAC = \text{пл.}OAB + \text{пл.}OAD = 0$, так что равенство (5) сохраняет силу.

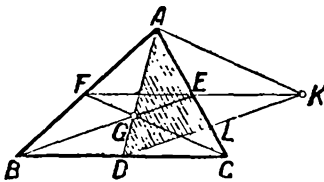
Примечание. В решениях последующих задач мы будем, если не оговорено противное, рассматривать площади фигур в обычном смысле, т. е. брать их лишь по абсолютной величине независимо от знака.

325. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (черт. 543) — два гомотетических четырёхугольника, и O — их центр подобия (доказательство не зави-

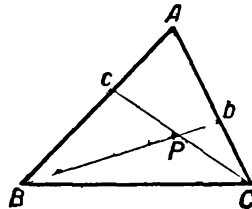
сит от числа сторон), $KLMN$ — четырёхугольник, вписанный в четырёхугольник $ABCD$ и описанный около $A'B'C'D'$. Обозначим через k коэффициент подобия обоих многоугольников $k = OA:OA' = OB:OB' = OC:OC' = OD:OD' = AB:A'B' = \dots$ и через K', L', M' и N' — точки пересечения прямых OK, OL, OM и ON со сторонами многоугольника $A'B'C'D'$. Имеем $\text{пл.} OA'K : \text{пл.} OA'K' = OK:OK' = k$; $\text{пл.} OB'K : \text{пл.} OB'K' = k$; и т. д. Складывая, получим $\text{пл.} KLMN : \text{пл.} A'B'C'D' = k$.

Точно так же $\text{пл.} OAK : \text{пл.} OA'K = OA:OA' = k$; $\text{пл.} OKB : \text{пл.} OKB' = k$; \dots , откуда $\text{пл.} ABCD : \text{пл.} KLMN = k$.

Итак, $\text{пл.} ABCD : \text{пл.} KLMN = \text{пл.} KLMN : \text{пл.} A'B'C'D'$.



Черт. 544.



Черт. 545.

326. Пусть D, E и F — середины сторон треугольника ABC (черт. 544) и G — точка пересечения его медиан. Отложив на продолжении отрезка FE равный ему отрезок EK , получим $AK = CF$; $DK = BE$. Обозначим через L точку пересечения прямых AC и DK . Прибавляя к площади треугольника ADL соответственно равные площади, получим $\text{пл.} ADK = \text{пл.} ADL + \text{пл.} ELK + \text{пл.} AEK = \text{пл.} ADL + \text{пл.} DLC + \text{пл.} AEF = \text{пл.} ADC + \text{пл.} AEF = \frac{1}{2} \text{пл.} ABC + \frac{1}{4} \text{пл.} ABC = \frac{3}{4} \text{пл.} ABC$.

327. Пусть P — точка пересечения трансверселей Bb и Cc , делящих (внутренним образом) стороны треугольника ABC в отношениях $bC:bA = q$ и $cA:cB = r$ (черт. 545). Мы будем в дальнейшем рассматривать отношения направленных отрезков, так что $q < 0$ и $r < 0$. Требуется определить отношения площадей треугольников PBC, Pcb, Pcb и четырёхугольника $AcPb$.

Найдём предварительно отношение, в котором точка P делит отрезок Cc . Для этого применим теорему п. 192 к треугольнику ACc

и секущей BPb . Будем иметь $\frac{PC}{Pc} \cdot \frac{Bc}{BA} \cdot \frac{bA}{bC} = 1$, откуда

$$\frac{PC}{Pc} = \frac{bC}{bA} \cdot \frac{BA}{Bc} = \frac{bC}{bA} \cdot \left(1 + \frac{cA}{Bc}\right) = q(1 - r). \quad (1)$$

Далее, так как треугольники cBC , AcC и ABC имеют общую высоту, то $\text{пл.}cBC : \text{пл.}AcC : \text{пл.}ABC = Bc : cA : BA = Bc : cA : (Bc + cA) = 1 : \frac{cA}{Bc} : \left(1 + \frac{cA}{Bc}\right) = 1 : (-r) : (1-r)$. Отсюда

$$\text{пл.}BCc = \frac{1}{1-r} \cdot \text{пл.}ABC \quad (2)$$

и

$$\text{пл.}AcC = \frac{-r}{1-r} \cdot \text{пл.}ABC. \quad (3)$$

Так как треугольники CPB , PcB и CcB имеют общую высоту, то $\text{пл.}CPB : \text{пл.}PcB : \text{пл.}CcB = PC : cP : cC = PC : cP : (cP + PC) = \frac{PC}{cP} : 1 : \left(1 + \frac{PC}{cP}\right) = -q(1-r) : 1 : (1-q+qr)$ в силу равенства (1). Отсюда на основании (2) имеем:

$$\text{пл.}PBC = \frac{-q(1-r)}{1-q+qr} \cdot \text{пл.}BCc = -\frac{q}{1-q+qr} \cdot \text{пл.}ABC, \quad (4)$$

$$\text{пл.}PcB = \frac{1}{1-q+qr} \cdot \text{пл.}BCc = \frac{1}{(1-r)(1-q+qr)} \cdot \text{пл.}ABC. \quad (5)$$

Площадь треугольника PCb можно, очевидно, получить из площади треугольника PcB , поменяв в выражении последней ролями $bC : bA = q$ и $cB : cA = \frac{1}{r}$, т. е. заменив в выражении (5) q через $\frac{1}{r}$ и r через $\frac{1}{q}$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \text{пл.}PCb &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{qr}\right)} \cdot \text{пл.}ABC = \\ &= \frac{-q^2r}{(1-q)(1-q+qr)} \cdot \text{пл.}ABC. \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, площадь четырёхугольника $AcPb$ можно получить как разность площадей треугольников AcC и PCb . В силу равенств (3) и (6) будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{пл.}AcPb &= \left[-\frac{r}{1-r} + \frac{q^2r}{(1-q)(1-q+qr)} \right] \cdot \text{пл.}ABC = \\ &= \frac{-r(1-2q+qr)}{(1-q)(1-r)(1-q+qr)} \cdot \text{пл.}ABC. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенства (4), (5), (6) и (7) дают решение поставленной задачи.

328. Пусть прямые Aa , Bb и Cc , делящие стороны треугольника ABC (внутренним образом) в отношениях $aB : aC = p$, $bC : bA = q$ и

$cA:cB=r$ ($p < 0$, $q < 0$, $r < 0$), пересекаются попарно в точках P , Q и R (черт. 546). Требуется определить площадь треугольника PQR .

При решении задачи 327 мы нашли, что $\text{пл. } PcB = \frac{1}{(1-r)(1-q+qr)} \cdot \text{пл. } ABC$. В силу п. 256 имеем:

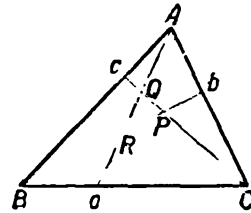
$$\begin{aligned} \text{пл } PQR &= \frac{PQ}{Pc} \cdot \frac{PR}{PB} \cdot \text{пл. } PcB = \\ &= \frac{1}{(1-r)(1-q+qr)} \cdot \frac{PQ}{Pc} \cdot \frac{PR}{PB} \cdot \text{пл. } ABC, \end{aligned} \quad (1)$$

и остаётся только найти $PQ:Pc$ и $PR:PB$.

Для вычисления отношения $PQ:Pc$ применим теорему п. 192 к треугольнику BCc и секущей AQa . Получим

$$\begin{aligned} \frac{QC}{Qc} \cdot \frac{Ac}{Ab} \cdot \frac{aB}{aC} &= 1, \text{ откуда } \frac{QC}{Qc} = \frac{aC}{aB} \cdot \frac{Ab}{Ac} = \\ &= \frac{aC}{aB} \cdot \frac{Ac+cB}{Ac} = \frac{aC}{aB} \cdot \left(1 - \frac{cB}{cA}\right) = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{r-1}{rp} \text{ и} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{QC}{Cc} &= \frac{QC}{cQ+Qc} = \frac{QC:Qc}{1-QC:Qc} = \\ &= \frac{r-1}{1-r+rp}. \end{aligned} \quad (2)$$



Черт. 546.

Далее в силу соотношения (1) из решения задачи 327 имеем:

$$\frac{Cc}{Pc} = \frac{CP+Pc}{Pc} = 1 - \frac{PC}{Pc} = 1 - q + qr \quad (3)$$

и

$$\frac{PC}{Cc} = \frac{PC}{Pc} \cdot \frac{Cc}{Pc} = \frac{q(1-r)}{1-q+qr}. \quad (4)$$

Из равенств (2) и (4) находим $\frac{PQ}{Cc} = \frac{PC}{Cc} - \frac{QC}{Cc} = \frac{q(1-r)}{1-q+qr} - \frac{r-1}{1-r+rp} = \frac{(1-r)(pqr+1)}{(1-q+qr)(1-r+rp)}$. Наконец, пользуясь равенством (3), из последнего равенства получим:

$$\frac{PQ}{Pc} = \frac{PQ}{Cc} \cdot \frac{Cc}{Pc} = \frac{(1-r)(pqr+1)}{1-r+rp}. \quad (5)$$

Для вычисления отношения $\frac{PR}{PB}$ применим ту же теорему п. 192 к треугольнику BCh и секущей ARa . Получим $\frac{RB}{Rb} \cdot \frac{Ab}{Ac} \cdot \frac{aC}{aB} = 1$, откуда $\frac{RB}{Rb} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{Ac}{Ab} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{Ab+bC}{Ab} = \frac{aB}{aC} \cdot \left(1 - \frac{bC}{bA}\right) = p(1-q)$,

II

$$\frac{RB}{Bb} = \frac{RB}{BR + Rb} = \frac{RB:Rb}{1 - RB:Rb} = \frac{p(1-q)}{1-p+pq}. \quad (6)$$

Далее применяем ту же теорему к треугольнику ABb и секущей CPc . Получим $\frac{PB}{Pb} \cdot \frac{Cb}{CA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$, откуда $\frac{PB}{Pb} = \frac{cB}{cA} \cdot \frac{cA}{Cb} =$
 $= \frac{cB}{cA} \cdot \frac{Cb + bA}{Cb} = \frac{cB}{cA} \cdot \left(1 - \frac{bA}{bC}\right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{q-1}{qr}$, и

$$\frac{PB}{Bb} = \frac{PB}{BP + Pb} = \frac{PB:Pb}{1 - PB:Pb} = \frac{q-1}{1-q+qr}. \quad (7)$$

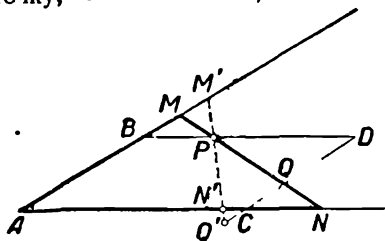
Из равенств (6) и (7) находим $\frac{PR}{Bb} = \frac{PB}{Bb} - \frac{RB}{Bb} = \frac{q-1}{1-q+qr} -$
 $-\frac{p(1-q)}{1-p+pq} = \frac{(q-1)(pqr+1)}{(1-p+pq)(1-q+qr)}$, и

$$\frac{PR}{PB} = \frac{PR}{Bb} : \frac{PB}{Bb} = \frac{pqr+1}{1-p+pq}. \quad (8)$$

Подставляя теперь в равенство (1) значения $PQ:Pc$ и $PR:PB$, определяемые равенствами (5) и (8), получим окончательно:

$$\text{пл. } PQR = \frac{(pqr+1)^2}{(1-p+pq)(1-q+qr)(1-r+rp)} \cdot \text{пл. } ABC. \quad (9)$$

Условие, при котором прямые Aa , Bb и Cc проходят через одну точку, состоит в том, что $\text{пл. } PQR = 0$. В силу равенства (9) отсюда вытекает, что $pqr = -1$. Таким образом, получаются теоремы пп. 197 и 198.



Черт. 547.

329. Пусть $ABDC$ (черт. 547) — параллелограм, имеющий заданную площадь, один из углов которого совпадает с данным углом BAC и одна из сторон которого BD проходит через данную точку P . Искомая секущая MN (или $M'N'$) должна пересекать сторону

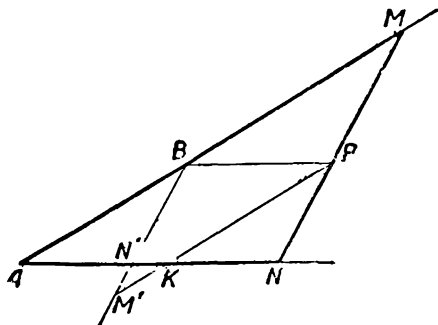
CD (или её продолжение) в такой точке Q (или Q'), чтобы $\text{пл. } PQD = \text{пл. } BPM + \text{пл. } CNQ$ (или $\text{пл. } BM'P = \text{пл. } PDCN' = \text{пл. } PDQ' -$
 $- \text{пл. } N'CQ'$, т. е. $\text{пл. } PQ'D = \text{пл. } BM'P + \text{пл. } CN'Q'$). Отсюда следует, что $\frac{\text{пл. } BPM}{\text{пл. } PQD} + \frac{\text{пл. } CNQ}{\text{пл. } PQD} = 1$ (или $\frac{\text{пл. } BPM'}{\text{пл. } PQ'D} + \frac{\text{пл. } CN'Q'}{\text{пл. } PQ'D} =$
 $= 1$). Но $\text{пл. } BPM : \text{пл. } PQD = (BP:PD)^2$ и $\text{пл. } CNQ : \text{пл. } PQD =$

$$= (CQ:QD)^2, \text{ так что } (BP:PD)^2 + (CQ:QD)^2 = 1, \text{ и } CQ:QD = \frac{\sqrt{PD^2 - BP^2}}{PD} \text{ и } CQ':Q'D = \frac{\sqrt{PD^2 - BP^2}}{PD}.$$

Для построения точек Q и Q' достаточно разделить отрезок CD внутренним и внешним образом в отношении $\frac{\sqrt{PD^2 - BP^2}}{PD}$.

Задача имеет два решения при $PD > BP$, одно решение при $PD = BP$ и не имеет решений при $PD < BP$.

330. Первое решение. Из решения задачи 329 (черт. 547) вытекает, что наименьшее возможное значение площади треугольника AMN соответствует наименьшему значению площади параллелограмма $ABDC$, т. е. наименьшему значению отрезка BD , для которого задача построения треугольника AMN имеет решение. Далее из решения того же упражнения следует, что это наименьшее значение отрезка BD определяется условием $PD=BP$ и что при этом $CQ=CQ'=0$. Из равенства $PD=BP$ следует, что $AC=BD=BP+PD=2BP$.



Черт. 548.

Отсюда вытекает такое построение: через P проводим прямую PB , параллельную стороне AC данного угла, и откладываем отрезок $AC = 2BP$. Прямая PC определяет искомый треугольник.

Второе решение. Пусть MN — произвольная секущая, проходящая через точку P (черт. 548), PB и PK — прямые, проходящие через ту же точку и параллельные сторонам данного угла. Проводим через B прямую BN' , параллельную MN .

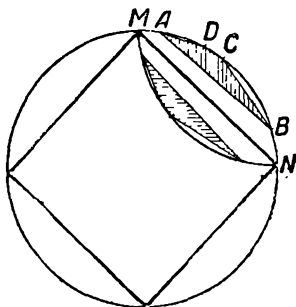
Если прямая BN' пересекает сторону AK параллелограмма $AKPB$ в точке N' и продолжение стороны PK того же параллелограмма в точке M' , то $\text{пл. } AMN = \text{пл. } AKPB + \text{пл. } KNP + \text{пл. } BPM = = \text{пл. } AKPB + \text{пл. } AN'B + \text{пл. } BM'P = 2\text{пл. } AKPB + \text{пл. } KM'N'$. Аналогичное равенство будет иметь место и в том случае, если прямая BN' пересекает сторону PK параллелограмма $AKPB$ и продолжение его стороны AK . Отсюда следует, что площадь треугольника AMN будет иметь наименьшее значение, если прямая MN будет параллельна BK , так как при этом $\text{пл. } KM'N' = 0$ и $\text{пл. } AMN = 2\text{пл. } AKPB$.

331. Пусть в окружность вписан многоугольник, имеющий данное число сторон n и отличный от правильного. Вершины этого многоугольника делят окружность на n дуг, наименьшая из которых меньше $\frac{1}{n}$ -ой части окружности. Соединяющая концы этой дуги *сторона*

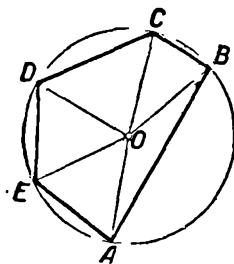
многоугольника меньше стороны s_n правильного выпуклого n -угольника, вписанного в ту же окружность.

Рассмотрим теперь наибольшую из дуг, на которые вершины n -угольника делят окружность: эта дуга больше $\frac{1}{n}$ -ой части окружно-

сти. Если эта дуга окажется больше $\frac{n-1}{n}$ всей окружности, то соединяющая её концы сторона многоугольника будет опять-таки меньше стороны правильного вписанного n -угольника (черт. 549, при $n=4$). Но при этом вписанный многоугольник $ABCD$ целиком расположен внутри сегмента, отсекаемого от круга стороной MN правильного n -



Черт. 549.



Черт. 550.

угольника, и его площадь заведомо будет меньше площади правильного n -угольника, как это видно хотя бы из построения, выполненного для четырёхугольника $ABCD$ на чертеже 549.

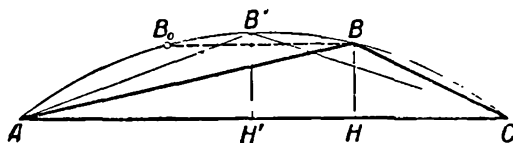
Поэтому мы можем предположить, что наибольшая из дуг, на которые вершины вписанного многоугольника делят окружность, меньше $\frac{n-1}{n}$ всей окружности, и, следовательно, соединяющая её концы сторона n -угольника больше стороны правильного n -угольника.

Соединив вершины данного вписанного многоугольника с центром O окружности, мы разобьём его на треугольники OAB, OBC, \dots . Перемещая эти треугольники, мы можем, очевидно, располагать стороны данного вписанного многоугольника в любом порядке, причём многоугольник будет оставаться вписанным в данную окружность и будет сохранять свою площадь. Основываясь на этом, можно заменить данный вписанный многоугольник, не изменяя длин его сторон и его площади другим многоугольником (черт. 550), в котором сторона, меньшая стороны правильного n -угольника, и сторона, большая её, будут смежными.

Пусть теперь сторона AB больше s_n , а сторона BC меньше s_n (черт. 551), и прямая BB_0 параллельна AC . Если мы построим хорду $AB' = s_n$, то точка B' будет лежать между B_0 и B , и потому высота

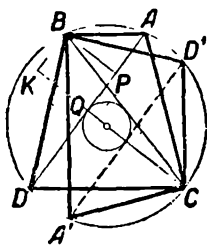
$B'H'$ треугольника $AB'C$ будет больше высоты BH треугольника ABC , а следовательно, и $\text{пл.} AB'C > \text{пл.} ABC$. Итак, заменяя вершину B вершиной B' и не изменяя положения остальных вершин, мы сделаем сторону AB' равной c_n и в то же время увеличим площадь данного многоугольника.

Повторяя конечное число раз две последние операции (перемена порядка сторон, замена стороны, не равной c_n , стороной, которая равна c_n), мы заменим данный многоугольник правильным n -угольником, вписанным в ту же окружность и имеющим большую площадь, чем данный. Следовательно, из всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет *правильный n -угольник*.



Черт. 551.

332. Пусть ABC — искомый треугольник, в котором известны сторона $BC = a$, высота $AH = h$ и радиус R вписанной окружности. Строим полупериметр p искомого треугольника как четвертый пропорциональный, пользуясь равенством $pR = \frac{1}{2}ah$ (см. упр. 299). Далее



Черт. 552.

строим отрезок $p - a$, равный (в силу упр. 90а) расстоянию $AE = AF$ от вершины A до точки касания вписанной окружности со стороной AC или AB (черт. 102). Если построить прямоугольный треугольник по двум катетам R и $p - a$, то угол, противолежащий первому из этих катетов, будет равен $\frac{A}{2}$, а следовательно, мы получаем угол A искомого треугольника. Задача сводится теперь к упражнению 77 (первый случай).

333. Пусть $ABDC$ — искомая трапеция (черт. 552). Задание угла D определяет длину диагонали BC , а следовательно, и диагонали AD , так как трапеция, вписанная в окружность, necessarily равнобедренная и потому имеет равные диагонали. Опустив из точек B и C перпендикуляры BP и CQ на диагональ AD , имеем $\text{пл.} ABDC = \frac{1}{2} AD \cdot (BP + CQ)$. Знание площади позволяет, таким образом, построить сумму $BP + CQ$. Опустив из точки B перпендикуляр BK на прямую CQ , будем, очевидно, иметь $CK = CQ + BP$. Прямоугольный треугольник BCK , в котором известны гипотенуза BC и катет CK , можно построить.

Итак, приходим к следующему построению. Строим хорду BC так, чтобы опирающийся на неё угол BDC имел данную величину. Далее,

строим прямоугольный треугольник BCK по гипотенузе BC и катету CK . Наконец, проводим в окружности хорду AD (или $A'D'$), параллельную BK и равную BC . (С этой целью строим вспомогательную окружность, концентрическую с данной и касающуюся прямой BC .)

Если задача возможна, то она имеет, вообще говоря, два решения (грапации $ABDC$ и $A'BD'C$ на черт. 552).

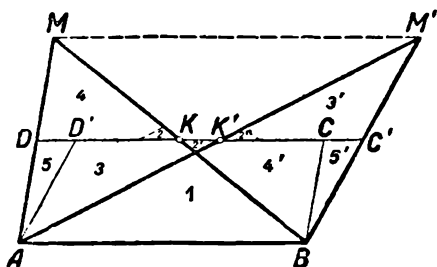
334. Совместим основание данного параллелограмма $BCFD$ с основанием BC данного треугольника BCA так, чтобы совпали их равные углы B (черт. 56). Так как $\text{пл.} BCA = \text{пл.} BCFD$, то $\text{пл.} DEA = \text{пл.} CFE$, и так как углы обоих треугольников равны, то и треугольники равны.

Итак, в треугольнике достаточно провести среднюю линию DE , а в параллелограме — соединить вершину C с серединой E стороны FD .

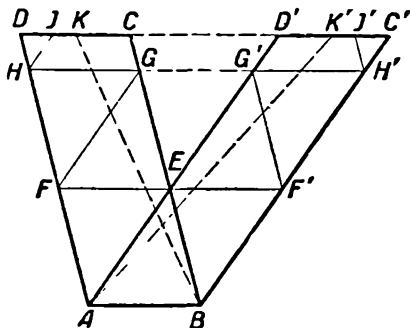
335. Совместим основание одного из данных треугольников с основанием AB другого,

располагая оба треугольника так, чтобы их вершины M и M' лежали по одну сторону от прямой AB (черт. 553). Выполним в каждом из треугольников ABM и ABM' построение, указанное в решении задачи 334. Получим два параллелограмма $ABCD$ и $ABC'D'$ с общим основанием и общей высотой. Они состоят из общей части $ABCD$ и соответственно из треугольников ADD' и BCC' , равных между собой. Мы видим из чертежа, на какие пять частей следует разрезать треугольник ABM , чтобы можно было, расположив их иначе, получить из тех же частей и треугольник ABM' . Эти части обозначены на чертеже цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 1', 2', 3', 4', 5'.

На чертеже 553 стороны CD и $C'D'$ параллелограммов имели общую часть CD' . Может, однако, случиться, что эти стороны не будут иметь общих точек (черт. 554). В таком случае через точку пересечения E сторон BC и AD' параллелограммов проводим прямую FF' , параллельную AB , далее строим прямые FG и $F'G'$, соответственно параллельные AE и BE , прямую $HGG'H'$, параллельную AB , и т. д. Процесс закончится, когда прямые HI и $H'I'$, соответственно параллельные AE и BE , пересекут стороны CD и $C'D'$ данных параллелогра-



Черт. 553.



Черт. 554.

мов. При этом оба параллелограмма будут разрезаны на соответственно равные части.

Примечание. Построения, которыми мы пользовались при решении этой задачи, можно рассматривать с более общей точки зрения, которая лучше уясняет их сущность, а также оказывается полезной и при решении последующих задач.

Будем называть два многоугольника *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на такие части, которые, будучи сложены иначе, давали бы другой. Решая задачу 334, мы показали, что треугольник и параллелограм, о которых там говорился, равносоставлены. В настоящей задаче мы доказали равносоставленность двух треугольников (а также и двух параллелограмов), имеющих одно и то же основание и одну и ту же высоту. В задачах 336 и 337 мы встретимся с более общими случаями равносоставленности многоугольников.

Одно из основных свойств равносоставленных многоугольников находит своё выражение в следующей теореме: *Два многоугольника, равносоставленные с одним и тем же многоугольником, равносоставлены друг с другом.* Иначе говоря, если многоугольник P можно разбить на части (будем называть их „частями первого рода“) так, чтобы, сложенные иначе, они давали многоугольник Q , и если, кроме того, тот же многоугольник можно разбить на части („части второго рода“) так, чтобы, сложенные иначе, они давали многоугольник R , то и многоугольник Q можно разбить на части так, чтобы, сложенные иначе, они давали многоугольник R .

Для доказательства проведём в многоугольнике P и те линии, которые разбивают его на „части первого рода“, и те линии, которые разбивают его на „части второго рода“. Совокупность тех и других прямых даст разбиение многоугольника P на новые „мелкие“ части (при этом все или некоторые из „частей первого рода“ окажутся в свою очередь подразделёнными на части, и то же будет иметь место для „частей второго рода“). Из этих „мелких“ частей можно составить „части первого рода“, а значит, складывая их иначе, многоугольник Q . Из тех же „мелких“ частей можно составить и „части второго рода“, а значит, складывая их иначе, и многоугольник R . Таким образом, теорема доказана.

В приведённом только что решении устанавливалась равносоставленность треугольника ABM и параллелограмма $ABCD$, затем параллелограмов $ABCD$ и $ABC'D'$ и, наконец, параллелограмма $ABC'D'$ и треугольника ABM .

Если разрезать параллелограм $ABCD$ на трапецию $ABKD$ и треугольник BCK (черт. 553), то из них можно сложить треугольник ABM , если разрезать его на трапецию $ABCD'$ и треугольник $AD'D$, то из них можно составить параллелограм $ABC'D'$. Если провести в $ABCD$ отрезки BK и AD' , то получим три части $ABKD'$, BCK и $AD'D$, из которых можно сложить как треугольник ABM , так и параллелограм $ABC'D'$ и т. д. Мы видим, что предлагаемое решение задачи 335 есть лишь применение того метода, с помощью которого мы доказывали общую теорему о равносоставленности.

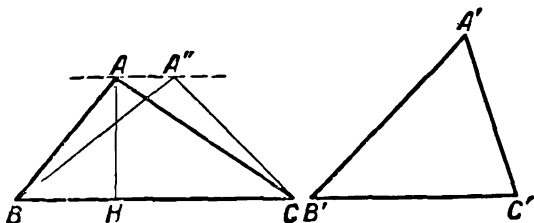
336. При решении этой задачи мы будем существенно опираться на сказанное выше в решении задачи 335 и, в частности, на те сведения, которые даны в примечании к этому решению.

Мы должны доказать, что один из двух равновеликих треугольников всегда можно разрезать на такие части, которые, будучи сложены иначе, давали бы другой. Короче говоря, мы должны доказать, что *всякие два равновеликих треугольника равносоставлены*.

Не нарушая общности, можно предположить, что сторона BC есть наибольшая из сторон данных треугольников ABC и $A'B'C'$. Отсюда

следует, что соответствующая ей высота AH треугольника есть наименьшая из высот обоих треугольников. На основании этого можно заключить, что AH меньше сторон второго треугольника.

Пользуясь этим, можно построить треугольник $A''BC$ (черт. 555), имеющий то же основание и ту же высоту, что и треугольник ABC , и притом такой, что $A''C = A'C'$. Треугольник $A''BC$ равносоставлен с ABC в силу задачи 335. Далее треугольники $A''BC$ и $A'B'C'$ имеют равные основания $A''C = A'C'$ и равновелики между собой, так как каждый из них равновелик ABC . Следовательно, эти два треугольника имеют и одну и ту же высоту, а потому равносоставлены (задача 335).



Черт. 555.

Итак, треугольники ABC и $A'B'C'$ равносоставлены оба с треугольником $A''BC$. По основному свойству равносоставленных многоугольников (решение задачи 335, примечание) они равносоставлены между собой.

337. При решении этой задачи мы будем опираться на решения задач 335 и 336 и, в частности, на те сведения, которые даны в примечании к решению задачи 335.

Мы должны доказать, что *всякие два равновеликих многоугольника равносоставлены*.

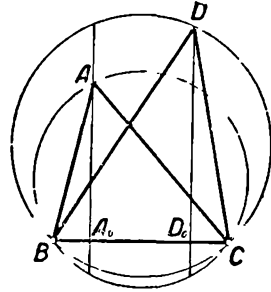
Пусть дан некоторый многоугольник, хотя бы пятиугольник $ABCDE$ (черт. 229). Строя равновеликий ему четырёхугольник $ABCD'$, как указано в п. 265, мы видим, что треугольники CED и CED' не только равновелики, но и равносоставлены (задача 335). Следовательно, многоугольники $ABCDE$ и $ABCD'$ также равносоставлены. Продолжая эти построения и рассуждения, мы можем прийти к треугольнику, равносоставленному с данным многоугольником. Действительно, каждый вновь получаемый многоугольник (имеющий на одну сторону меньше, чем предыдущий) будет равносоставлен с предыдущим, а потому и все вновь получаемые многоугольники равносоставлены с данным. Итак, *всякий многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником*.

Если теперь даны два равновеликих многоугольника P и P' , то мы можем найти два треугольника Δ и Δ' , равносоставленных соответственно с многоугольниками P и P' . Эти два треугольника Δ и Δ' будут также равновелики, так как площадь каждого из них равна площади многоугольников P и P' . Следовательно, треугольники Δ и Δ' будут и равносоставлены (задача 336).

Итак, многоугольник P равносоставлен с треугольником Δ , треугольник Δ — с треугольником Δ' , треугольник Δ' — с многоугольником P' . В силу основного свойства равносоставленных многоугольников данные многоугольники P и P' равносоставлены.

338. Пусть (A) есть степень точки A относительно окружности BCD (черт. 556), и аналогичное значение имеют (B) , (C) и (D) ; далее пусть O_a есть центр окружности, описанной около треугольника BCD , и т. д.

Обозначим через AA_0 и DD_0 перпендикуляры, опущенные из точек A и D на прямую BC . В силу п. 136, примечание 3°, разность степеней какой-либо точки относительно двух окружностей равна удвоенному произведению расстояния той же точки от их радикальной оси на расстояние между центрами. Применим это предположение к точке A и окружностям BCD и ABC . Так как в данном случае прямая BC есть радикальная ось и степень точки A относительно окружности ABC равна нулю, то $(A) = 2O_a O_d \cdot A_0 A$. Аналогично $(D) = 2O_d O_a \cdot D_0 D = -2O_a O_d \cdot D_0 D$. Отсюда $(A):(D) = -A_0 A : D_0 D$.



Черт. 556.

С другой стороны, имеем пл. ABC : пл. $DBC = A_0 A : D_0 D$. Таким образом получаем пл. ABC : пл. $DBC = -(A):(D)$, т. е. $-(A) \cdot \text{пл.} BCD = (D) \cdot \text{пл.} ABC$, или $(A) \cdot \text{пл.} BCD = (D) \cdot \text{пл.} ACB$. Аналогично и для других точек.

Все написанные равенства верны как по абсолютной величине, так и по знаку.

339. Обозначим, как и в решении задачи 338, через (A) степень точки A относительно окружности BCD . Инверсия с полюсом A и степенью (A) преобразует окружность BCD в самоё себя, так как степень точки A относительно этой окружности равна степени инверсии, а точки B , C и D — в некоторые точки B' , C' и D' , лежащие на той же окружности.

В силу п. 218 стороны треугольника $B'C'D'$ соответственно равны

$$B'C' = \frac{(A) \cdot CB}{AB \cdot AC}; \quad (1)$$

и т. д., откуда $\frac{B'C'}{BC \cdot AD} = \frac{C'D'}{CD \cdot AB} = \frac{D'B'}{DB \cdot AC} = \frac{(A)}{AB \cdot AC \cdot AD}$. Последние

равенства показывают, что треугольник $B'C'D'$ подобен треугольнику со сторонами $BC \cdot AD$, $CD \cdot AB$, $DB \cdot AC$ и что коэффициент подобия

равен $\frac{(A)}{AB \cdot AC \cdot AD}$. Следовательно,

$$\text{пл. } B'C'D' = \frac{(A)^3}{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2} \cdot \Sigma, \quad (2)$$

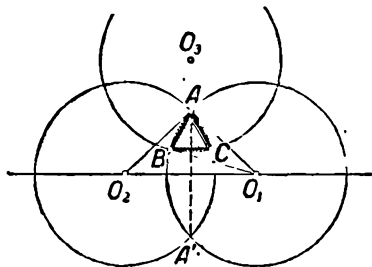
где Σ — площадь треугольника со сторонами $EC \cdot AD$, $CD \cdot AB$ и $DB \cdot AC$.

С другой стороны, треугольники ECD и $B'C'D'$ вписаны в одну и ту же окружность, и из п. 251, примечание, вытекает, что $\text{пл. } B'C'D' : \text{пл. } BCD = \frac{B'C' \cdot C'D' \cdot D'B'}{BC \cdot CD \cdot DB}$. Заменяя здесь $B'C'$, $C'D'$ и

$D'B'$ их выражениями (1), получим $\text{пл. } B'C'D' = \frac{(A)^3}{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2} \cdot \text{пл. } BCD$.

Сравнивая последнее выражение для $\text{пл. } B'C'D'$ с её выражением (2), мы и получим $(A) \cdot \text{пл. } BCD = \Sigma$.

340. Задача неопределённая. Одно из решений получается так: Соединяя центр вписанной окружности с вершинами треугольника и



Черт. 557.

опуская из той же точки перпендикуляры на стороны, разложим данный треугольник на шесть прямоугольных треугольников. Каждый из них разлагается на два равнобедренных медианой, выходящей из вершины прямого угла.

Другие решения получим, заменяя центр вписанной окружности какой-либо внутренней точкой, выбранной так, чтобы основания перпендикуляров из этой точки на стороны

лежали на самих сторонах, а не на их продолжениях.

В случае остроугольного треугольника достаточно соединить центр описанной окружности с вершинами.

Многоугольник разрезаем сначала на треугольники.

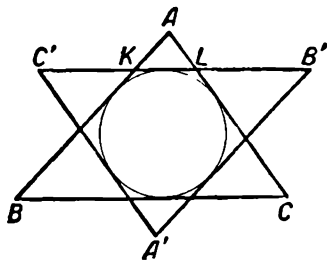
341. Пусть три равные окружности O_1 , O_2 и O_3 радиуса R пересекаются попарно под прямым углом в точках A , B и C (черт. 557). Требуется вычислить площадь S криволинейного треугольника ABC .

В силу симметрии фигуры имеем $AB = BC = CA$, и $\angle O_1AC = \angle O_2AB = \frac{1}{2}(90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$. Следовательно, $\angle BAO_1 = \angle ABO_1 = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$, и потому $\angle AO_1B = 30^\circ$. Отсюда вытекает, что AB есть сторона c_{12} правильного выпуклого двенадцатиугольника, вписанного в данную окружность. Для площади S получим следующее выражение: $S = \frac{1}{4} c_{12}^2 \sqrt{3} + 3 \left(\frac{\pi R^2}{12} - \frac{1}{2} c_{12} a_{12} \right)$, где a_{12} — апофема правильного выпуклого двенадцатиугольника.

Согласно формуле п. 181 имеем: $c_{12} = \sqrt{R \left(R + \frac{1}{2} R \right)} - \sqrt{R \left(R - \frac{1}{2} R \right)} = \frac{1}{2} R (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ и $2a_{12} = \sqrt{R \left(R + \frac{1}{2} R \right)} +$

$+ \sqrt{R\left(R - \frac{1}{2}R\right)}$, т. е. $a_{12} = \frac{1}{4}R(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Подставляя эти значения c_{12} и a_{12} в приведённое выше выражение для S и выполняя выкладки, найдём $S = R^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \right) = 0,1514 \dots R^2$.

342. Обозначим через a, b, c, p, S и R стороны, полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности данного треугольника ABC , через h — его высоту, опущенную на сторону a , и через S_1 — площадь треугольника AKL , прилежащего к вершине A (черт. 558).



Черт. 558.

Требуется найти произведение площадей восьми треугольников, а именно данного треугольника ABC , треугольника $A'B'C'$, симметричного с данным относительно центра вписанной окружности, и шести треугольников, аналогичных AKL и прилежающих соответственно к вершинам A, B, C, A', B' и C' .

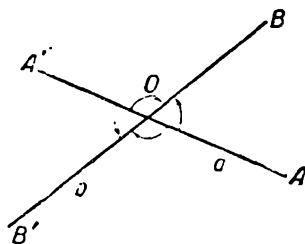
В силу подобия треугольников ABC и AKL имеем $S_1:S = (h-2R)^2:h^2$. Из равенств $S=pR = \frac{1}{2}ah$ (см. упр. 299) находим $2R:h = a:p$, и, следовательно, $S_1:S = (p-a)^2:p^2$. Отсюда $S_1 = S \cdot \frac{(p-a)^2}{p^2} = \frac{(p-a)^2 R}{p}$. Обозначая через S_2 и S_3 площади треугольников, аналогичных AKL , но прилежащих соответственно к вершинам B и C , будем иметь $S_2 = \frac{(p-b)^2 R}{p}$; $S_3 = \frac{(p-c)^2 R}{p}$. Отсюда находим $SS_1S_2S_3 = R^4 \cdot \frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{p^2}$. Но $\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{p^2} = \frac{p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{p^4} = \frac{S^4}{p^4} = R^4$, и окончательно $SS_1S_2S_3 = R^8$.

Так как треугольники, о которых идёт речь, попарно симметричны относительно центра окружности, вписанной в треугольник ABC , то, возводя последнее равенство в квадрат, мы и получаем искомый результат.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

343. Дуга aB по условию равна половине дуги AB , т. е. $\widehat{aB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$; точно так же $Bb = \frac{1}{2} \widehat{BC}$; $\widehat{cD} = \frac{1}{2} \widehat{CD}$; $\widehat{Dd} = \frac{1}{2} \widehat{DA}$. Отсюда имеем $\widehat{ab} + \widehat{cd} = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}) = 180^\circ$. Угол между прямыми ac и bd измеряется полусуммой дуг ab и cd и потому прямой.

344. При решении этой и некоторых из последующих задач мы будем рассматривать направленные углы, чтобы получить доказательства, пригодные при любом расположении элементов фигуры (сравнить подстрочное примечание к тексту задачи 346).



Черт. 559.

Под алгебраической величиной угла AOB мы будем понимать абсолютную величину того из углов между полупрямыми OA и OB , который не превосходит полуокружности, взятую со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, вращается ли полупрямая, описывающая этот угол, начиная от OA к OB , в положительном или

в отрицательном направлении. Алгебраическую величину угла AOB будем обозначать через $\angle AOB$. Алгебраическая величина угла зависит от порядка, в котором заданы его стороны: $\angle AOB = -\angle BOA$ (сравнить п. 185).

При рассмотрении направленных углов оказывается целесообразным считать равными между собой те углы, алгебраические величины которых или равны, или отличаются друг от друга на целое число полуокружностей. При этом условии можно говорить об алгебраической величине угла между двумя прямыми; этот угол зависит от порядка, в котором заданы обе прямые, но не зависит от выбора на этих прямых того или иного направления. Так, если прямые a (или AA') и b (или BB') пересекаются в точке O (черт. 559), то

$$\angle(a, b) = \angle AOB = \angle A'OB = \angle AOB' = \angle A'OB' = -\angle(b, a). \quad (I)$$

При пользовании направленными углами имеют место следующие предложения, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

А) Каковы бы ни были лучи OA , OB и OC , выходящие из точки O , всегда имеем:

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 0. \quad (II)$$

Действительно, если луч OB лежит внутри (не превосходящего полуокружности) угла между OA и OC , то углы AOB , BOC и AOC имеют один и тот же знак, и их абсолютные величины удовлетворяют условию $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$, откуда и следует (II). То же рассуждение применимо и в том случае, когда луч OA лежит внутри угла BOC или луч OC внутри угла AOB .

Если же ни один из трёх лучей не лежит внутри угла, образованного двумя другими, то все три угла AOB , BOC и COA имеют один и тот же знак, и сумма их абсолютных величин равна целой окружности, откуда опять следует (II).

В) Для любых трёх точек плоскости имеем:

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 0. \quad (III)$$

Действительно, если последовательность вершин A, B, C соответствует обходу треугольника ABC в положительном (отрицательном) направлении, то все три угла BAC, CBA, ACB имеют положительный (отрицательный) знак, и сумма их абсолютных величин равна полуокружности, откуда в силу введённого выше условия и следует (III). Если же точки A, B и C лежат на одной прямой, то каждое из слагаемых в левой части равенства (III) равно нулю.

С) Если точки A, B, C и D лежат на одной окружности (или на одной прямой), то имеем (сравнить п. 82а):

$$\angle ACB = \angle ADB, \quad (IV')$$

и обратно, из соотношения (IV) следует, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности (или на одной прямой).

Действительно, если точки A, B, C и D лежат на одной окружности и точки C и D лежат по одну сторону от AB , то углы ACB и ADB имеют один и тот же знак и одну и ту же абсолютную величину; если точки A, B, C и D лежат на одной окружности и точки C и D лежат по разные стороны от AB , то углы ACB и ADB имеют различные знаки, а сумма их абсолютных величин равна полуокружности, откуда и получается соотношение (IV).

Если точки A, B и C лежат на одной окружности и точка T лежит на касательной к окружности в точке B , то равенство (IV) заменяется следующим:

$$\angle ACB = \angle ABT. \quad (IV'')$$

Действительно, первый из этих углов есть вписанный угол, опирающийся на дугу AB , второй — угол между хордой AB и касательной в её конце B . Если точки C и T лежат по разные стороны от AB , то углы ACB и ABT имеют один и тот же знак и одну и ту же абсолютную величину; если же точки C и T лежат по одну сторону от AB , то углы ACB и ABT имеют противоположные знаки и сумма их абсолютных величин равна полуокружности. В обоих случаях будем иметь соотношение (IV'').

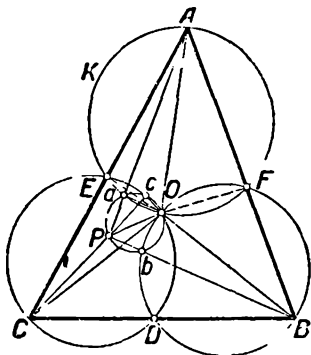
Переходим теперь к решению задачи 344.

1°. Обозначим через O точку пересечения окружностей AEF и BFD (черт. 560). Так как точка D лежит на одной прямой с точками B и C , то, согласно (I), $\sphericalangle BDO = \sphericalangle CDO$, и аналогично $\sphericalangle CEO = \sphericalangle AEO$; $\sphericalangle AFO = \sphericalangle BFO$. Далее точки A, O, E и F (а также B, O, F и D) лежат на одной окружности, откуда на основании (IV) $\sphericalangle AEO = \sphericalangle AFO$; $\sphericalangle BDO = \sphericalangle BFO$. Из выписанных равенств имеем:

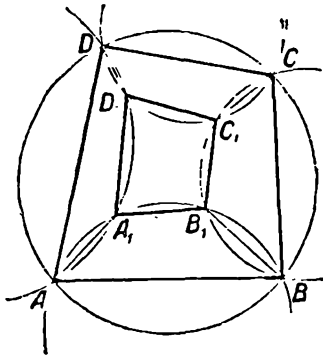
$$\sphericalangle CDO = \sphericalangle BDO = \sphericalangle BFO = \sphericalangle AFO = \sphericalangle AEO = \sphericalangle CEO. \quad (1)$$

Так как точки C, D и E не лежат на одной прямой и $\sphericalangle CDO = \sphericalangle CEO$, то точка O лежит на окружности CDE . Наши рассуждения благодаря их полной общности сохраняют силу и в том случае, когда все или часть точек D, E и F лежат не на самых сторонах треугольника, а на их продолжениях. (Без помощи направленных углов пришлось бы рассматривать отдельно несколько частных случаев.)

2°. Так как точки P, a и A лежат на одной прямой, то $\sphericalangle PaO = \sphericalangle AaO$. Из равенства (III) следует. $\sphericalangle AaO = \sphericalangle AOa +$



Черт. 560.



Черт. 561.

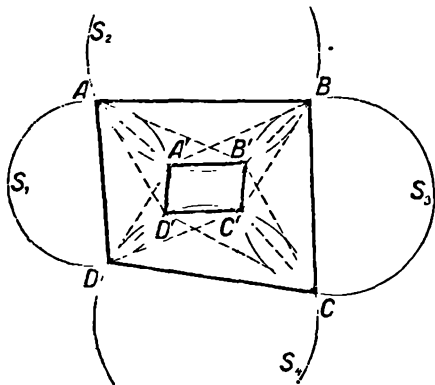
$+$ $\sphericalangle aAO$, так что $\sphericalangle PaO = \sphericalangle AOa + \sphericalangle aAO$. Так как точки A, a, O и F лежат на одной окружности, то $\sphericalangle AOa = \sphericalangle AFa$; $\sphericalangle aAO = \sphericalangle aFO$ и, следовательно, $\sphericalangle PaO = \sphericalangle AFa + \sphericalangle aFO = \sphericalangle AFO$. Итак, $\sphericalangle PaO$ имеет ту же алгебраическую величину, что и каждый из углов (1). Те же рассуждения можно повторить и для углов PbO и PcO . Итак, $\sphericalangle PaO = \sphericalangle PbO = \sphericalangle PcO$ и точки P, O, a, b и c лежат на одной окружности.

345. Чтобы придать решению полную общность, будем пользоваться направленными углами, как указано в решении задачи 344, и в частности выведенными там соотношениями (I) — (IV).

Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник (черт. 561), $A_1B_1C_1D_1$ — четырехугольник, образованный вторыми точками пересечения построенных окружностей. Мы имеем $\sphericalangle D_1A_1B_1 = \sphericalangle D_1A_1A + \sphericalangle AA_1B_1$ в силу (II). Далее на основании (IV) $\sphericalangle D_1A_1A = \sphericalangle D_1DA$; $\sphericalangle AA_1B_1 =$

действительно, обозначая через T_1 и T_2 какие-либо точки на касательных t_1 и t_2 , будем иметь на основании (II) и (IV'): $\angle S_1AS_2 = \angle T_1AA' + \angle A'AT_2 = \angle AM_1A' + \angle A'M_2A$.

Переходя к решению поставленной задачи, имеем (черт. 564) $\angle DAB = \angle DAD' + \angle D'AA' + \angle A'AB' + \angle B'AB$; $\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BB' + \angle B'BC' + \angle C'CB$; $\angle BCD = \angle BCB' + \angle B'CC' + \angle C'CD' + \angle D'CD$; $\angle CDA = \angle CDC' + \angle C'DD' + \angle D'DA' + \angle A'DA$. Условие, при котором точки A, B, C и D лежат на одной окружности, можно на основании (IV)

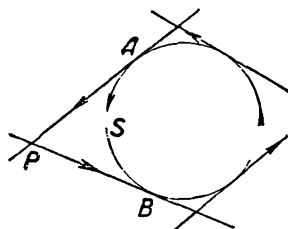


Черт. 564.

представить в виде $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$, или, в силу предыдущих равенств, в виде $\angle DAD' + \angle D'AA' + \angle A'AB' + \angle B'AB + \angle BCB' + \angle B'CC' + \angle C'CD' + \angle D'CD = \angle ABA' + \angle A'BB' + \angle B'BC' + \angle C'CB + \angle CDC' + \angle C'DD' + \angle D'DA' + \angle A'DA$. Но в силу равенства (IV) имеем $\angle A'AB' = \angle A'BB'$; $\angle B'BC' = \angle B'CC'$; $\angle C'CD' = \angle C'DD'$; $\angle D'DA' = \angle D'AA'$, и предыдущее соотношение принимает вид: $\angle DAD' + \angle B'AB + \angle BCB' + \angle D'CD = \angle ABA' + \angle C'CB + \angle CDC' + \angle A'DA$. На основании формулы (1) имеем $\angle S_1AS_2 = \angle ADA' + \angle A'BA$, $\angle S_2BS_3 = \angle BAB' + \angle B'CB$; $\angle S_3CS_4 = \angle CBC' + \angle C'DC$; $\angle S_4DS_1 = \angle DCD' + \angle D'AD$, откуда $\angle S_2BS_3 + \angle S_4DS_1 = \angle S_1AS_2 + \angle S_3CS_4$.

347. Чтобы получить решение, пригодное во всех многочисленных возможных здесь частных случаях, и в то же время указать, каким образом следует выбирать касательные α, β, γ и δ , зададим на каждой из данных окружностей определённое направление обхода.

Если на некоторой окружности S выбрано определённое направление обхода, то тем самым устанавливается определённое положительное направление на каждой касательной к S ; это направление определяется требованием, чтобы вблизи точки касания направление на касательной совпадало с выбранным направлением на окружности (черт. 565). Отрезки, отложенные на касательных, мы будем, как обычно, рассматривать, как имеющие знак $+$ или $-$. В дальнейшем направленную прямую мы будем считать касательной к направленной окруж-



Черт. 565.

ности только в том случае, когда положительное направление на этой прямой совпадает вблизи точки касания с направлением на окружности.

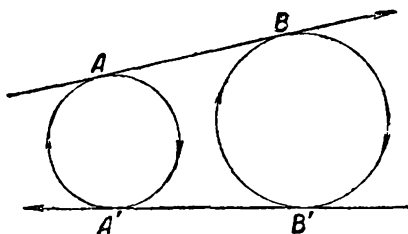
Если из точки P проведены к направленной окружности две касательные, точки прикосновения которых обозначены через A и B , то мы имеем по абсолютной величине и знаку (черт. 565):

$$AP = PB. \quad (1)$$

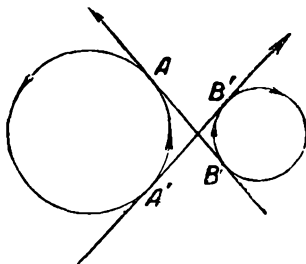
Если стороны четырёхугольника $PQRS$ касаются некоторой направленной окружности в A, B, C и D — точки касания прямых SP, PQ, QR и RS , то мы имеем, в силу (1), по абсолютной величине и по знаку:

$$PQ + RS = (PB + BQ) + (RD + DS) = AP + QC + CR + SA = QR + SP. \quad (2)$$

Равенство (2) имеет место независимо от того, к какому из рассмотренных в решении упражнения 87 пяти типов принадлежит данный описанный четырёхугольник (черт. 332 — 336).



Черт. 566.



Черт. 567.

Если даны две направленные окружности S_1 и S_2 , то они имеют самое большее две направленные общие касательные: эти общие касательные будут внешние или внутренние общие касательные, смотря по тому, приписано ли обоим данным окружностям одно и то же направление (обоим — по часовой стрелке или обоим — против часовой стрелки) или противоположные направления (одной — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки) (черт. 566 и 567).

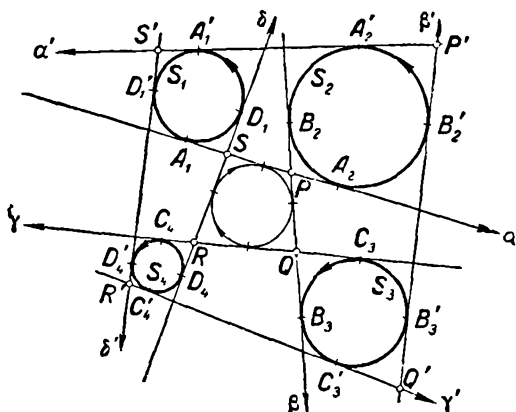
Если одна из двух общих касательных касается первой окружности в точке A , второй окружности — в точке B , а вторая общая касательная — соответственно в точках A' и B' , то мы имеем по абсолютной величине и по знаку:

$$AB = B'A'. \quad (3)$$

Обращаясь к решению предложенной задачи, мы будем предполагать, что на каждой из четырёх данных окружностей выбрано определённое направление и что под α, α', \dots понимаются направленные общие касательные. Отсюда легко вывести, что среди четырёх пар $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$ общих касательных имеется чётное число пар внутренних общих касательных и, следовательно, также чёт-

ное число пар внешних общих касательных. Действительно, выписав направленные окружности в порядке S_1, S_2, S_3, S_4, S_1 , мы видим, что каждой паре внутренних общих касательных к двум последовательным окружностям соответствуют противоположные направления на этих окружностях. Так, как и первой и последней окружностью является S_1 , то направление меняется на противоположное при переходе от одной окружности к следующей чётное число раз, а потому и внутренние касательные будут встречаться чётное число раз.

Далее выберем касательные α, β, γ и δ так, чтобы они, рассматриваемые как *направленные* общие касательные к данным окружностям, касались одной и той же *направленной* окружности (черт. 568).



Черт. 568.

Обозначим через P, Q, R, S соответственно точки пересечения выбранных общих касательных α и β, β и γ, γ и δ, δ и α ; аналогично обозначим через P', Q', R', S' точки пересечения α' и β', β' и γ', γ' и δ', δ' и α' . Далее обозначим через A_1 и A_1' точки прикосновения касательных α и α' к окружности S_1 , через A_2 и A_2' — точки прикосновения

тех же касательных α и α' к окружности S_2 , и т. д. При этих условиях будем иметь, в силу (2) и (1), $PQ + RS = QR + SP$; $A_1S = SD_1$; $PA_2 = B_2P$; $C_3Q = QB_3$; $RC_4 = D_4R$, откуда $(A_1S + SP + PA_2) + (C_3Q + QR + RC_4) = (B_2P + PQ + QB_3) + (D_4R + RS + SD_1)$, или $A_1A_2 + C_3C_4 = B_2B_3 + D_4D_1$, так что сумма длин двух из общих касательных равняется сумме длин двух других общих касательных.

Из последнего равенства с помощью (3) получаем: $A_1'A_2' + C_3'C_4' = B_2'B_3' + D_4'D_1'$. Отсюда с помощью соотношений $S'A_1' = D_1'S'$ и т. д. находим $P'Q' + R'S' = Q'R' + S'P'$, так что и стороны четырёхугольника $P'Q'R'S'$ касаются одной окружности (в силу обратной теоремы упр. 87).

Итак, при выборе общих касательных α, β, γ и δ мы соблюдали следующие два условия:

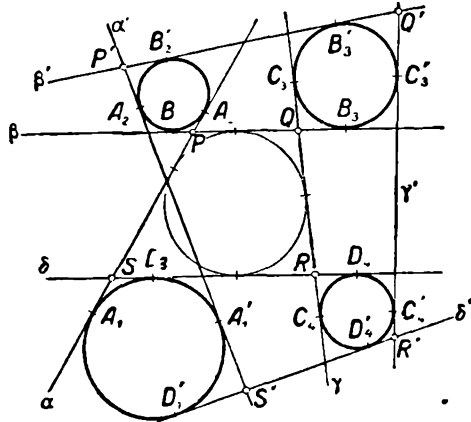
а) среди четырёх общих касательных имеется чётное число (0, 2 или 4) внешних общих касательных;

б) общие касательные α, β, γ и δ , рассматриваемые как *направленные* касательные к *направленным* окружностям S_1, S_2, S_3 и S_4 , касаются одной и той же *направленной* окружности.

Примечание. Покажем, что оба эти предположения существенны.

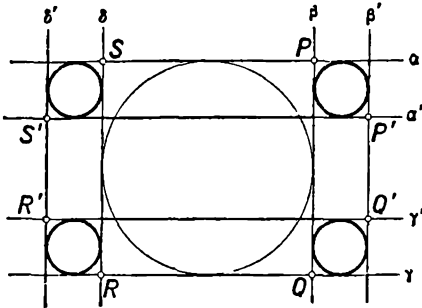
а) Пусть среди четырёх пар общих касательных имеется нечётное число, например три пары внешних общих касательных (черт. 569). В таком случае мы имеем по абсолютной величине (выбор направлений и введение знаков здесь невозможны): $PQ + RS = QR + SP$; $(B_2P + PQ + QB_3) + (D_4R + RS - SD_1) = (C_3Q + QR + RC_4) + (A_1S + SP + SA_2) - 2A_1S$; $B_2B_3 + D_4D_1 = C_3C_4 + A_1A_2 - 2SA_1$. Если и четырёхугольник $P'Q'R'S'$ обладает тем свойством, что в него можно вписать окружность, то мы найдём аналогично $B'_2B'_3 + D'_4D'_1 = C'_3C'_4 + A'_1A'_2 - 2S'A_1$, и мы получаем ещё добавочное условие $SA_1 = S'A_1$.

б) Пусть теперь все четыре пары касательных — внешние, но касательные α, β, γ и δ выбраны, например, как изображено на чертеже 570. При этом касательные α, β, γ и δ касаются одной окружности, а касательные α', β', γ' и δ' этим свойством не обладают. Это произошло потому, что никаким выбором направлений в данном случае нельзя соблюсти условие б).



Черт. 569.

348. Обозначим вершины данного пятиугольника через A, B, C и E (черт. 571); точки пересечения прямых EA и BC через K , прямых AB и CD через L , прямых BC и DE через M , прямых CD и EA через N , прямых DE и AB через P ; вторые точки пересечения окружностей EAP и ABK через A' , окружностей ABK и BCL через B' , окружностей BCL и CDM через C' , окружностей CDM и DEN через D' , окружностей DEN и EAP через E' .



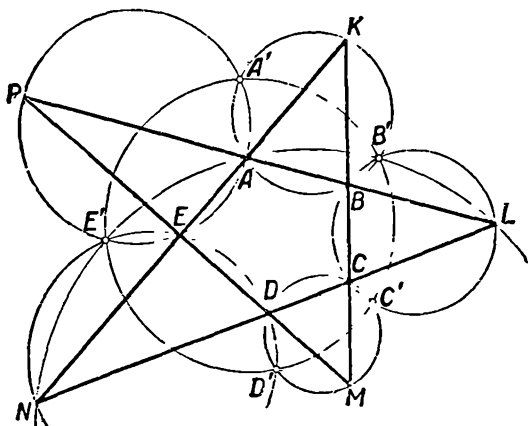
Черт. 570.

Чтобы доказать, что пять точек A', B', C', D' и E' лежат на одной окружности, достаточно доказать это для четырех точек, например B', C', D', E' . Так как то же рассуждение применимо и к четырем точкам A', B', C' и D' , то отсюда будет следовать, что все пять точек лежат на одной окружности.

Чтобы придать доказательству полную общность, будем опять пользоваться направленными углами и соотношениями (I) — (IV) (решение задачи 344).

Отбросим мысленно одну из пяти данных прямых, именно прямую DE , и к четырем остальным применим задачу 106. Четыре окружно-

сти ABK , BCL , LNA и KCN проходят через одну точку, откуда в частности следует, что четыре точки L , N , A и B' лежат на одной окружности. Точно так же (отбрасывая прямую BC) докажем, что на одной окружности лежат точки L , N , A и E' . Итак, все пять точек L , N , A , B' , E' лежат на одной окружности.



Черт. 571.

Мы имеем в силу (IV) и (I) $\sphericalangle C'D'D = \sphericalangle C'CD$ и $\sphericalangle C'CD = \sphericalangle C'CL = \sphericalangle C'B'L$, откуда $\sphericalangle C'D'D = \sphericalangle C'B'L$. (1)

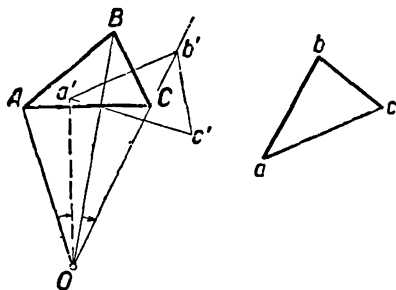
Далее опять в силу (IV) и (I) $\sphericalangle DD'E' = \sphericalangle DNE'$ и $\sphericalangle DNE' = \sphericalangle LNE' = \sphericalangle LB'E'$, откуда

$$\sphericalangle DD'E' = \sphericalangle LB'E'. \quad (2)$$

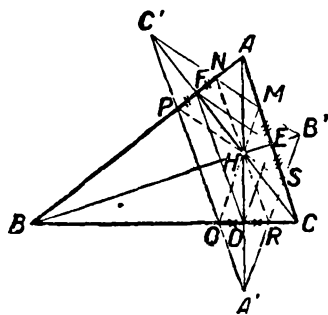
Складывая почленно равенства (1) и (2), имеем, на основании (II), $\sphericalangle C'D'E' = \sphericalangle C'B'E'$, от-

куда и следует, что точки B' , C' , D' и E' лежат на одной окружности.

349. Если повернуть треугольник ABC (черт. 572) так, чтобы сторона AB в её новом положении $a'b'$ была параллельна ac , то угол поворота будет равен $\sphericalangle (AB, a'b') = \sphericalangle BOb'$; так как прямая Ob' проходит, по условию задачи, через точку C , то мы имеем $\sphericalangle BOb' =$



Черт. 572.



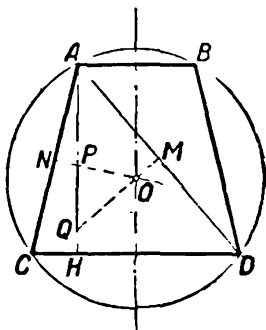
Черт. 573.

$= \sphericalangle BOC$. Отсюда следует, что $\sphericalangle BOC = \sphericalangle (AB, a'b') = \sphericalangle (AB, ac) = \text{const}$, и, следовательно, точка O лежит на окружности, проходящей через точки B и C (сравнить решение задачи 344, предложение С).

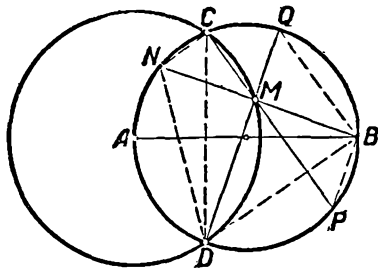
При перемещении точки O по этой окружности угол при вершине A в равнобедренном треугольнике AOa' , а следовательно, и отношение $AO: Aa'$ остаётся постоянным в силу постоянства угла $\sphericalangle AOa' = \sphericalangle BOC$. Поэтому геометрическое место точек a' получается из гео-

метрического места точек O путём гомотетии с центром A и поворота на угол OAA' , а потому есть окружность. Аналогичное имеет место и для точек b' и c' .

350. Обозначим через D, E и F основания высот треугольника ABC (черт. 573), через H — точку пересечения этих высот. Так как по условию задачи $HD=DA'$, $HE=EB'$ и $HF=FC'$, то прямые $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ будут соответственно параллельны EF, FD и DE . В силу упражнения 71 прямые DH, EH и FH будут биссектрисами углов треугольника DEF ; следовательно, те же прямые будут и биссектрисами углов треугольника $A'B'C'$. Треугольники $A'QR, B'SM$ и $C'NP$ будут равнобедренными (в каждом из них высота совпадает с биссектрисой), и потому $QD=DR$; $SE=EM$; $NF=FP$. Четырёхугольники $A'QHR, B'SHM$ и $C'NHP$ будут ромбами, так как в каждом из них



Черт. 574.



Черт. 575.

диагонали перпендикулярны и делятся пополам. Отсюда следует, что прямые QH и MH параллельны $A'B'$, и потому точки M, N и Q лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что точки N, H и R , а также точки P, H и S лежат на одной прямой.

351. Пусть $ABDC$ — искомая трапеция (черт. 574). Проведём высоту AH . Так как трапеция равнобедренная, то отрезок HD будет равен полусумме (отрезок HC — полуразности) оснований.

Для построения искомой трапеции, если известна сумма (разность) оснований, строим прямоугольный треугольник AHD (или AHC) по двум катетам, восстанавливаем перпендикуляр к гипотенузе в её середине M (или соответственно N) и из точки A , как из центра, радиусом данной окружности делаем на этом перпендикуляре засечку, определяя тем самым положение точки O и оси симметрии трапеции.

Для возможности задачи, когда дана сумма (или разность) оснований, необходимо и достаточно, чтобы радиус окружности был больше AM и меньше AQ , где Q — точка пересечения перпендикуляра MO с прямой AH (или соответственно больше AP , где P — точка пересечения перпендикуляра NO с AH). Отрезки AM, AQ и AP легко выразить через данные.

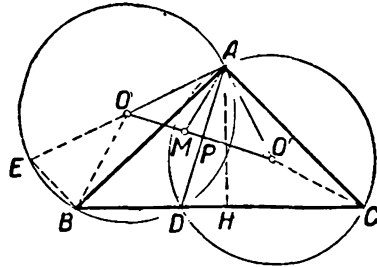
$$= \angle AMB + \angle MAK = \angle AMB + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AMB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AMB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AOB.$$

Следовательно, геометрическое место точек I и геометрическое место точек K представляют собой дуги окружностей, имеющие своими концами точки A и B и вмещающие углы, соответственно равные $\frac{1}{2} \angle AOB$ и $90^\circ + \frac{1}{2} \angle AOB$.

Если точка M займёт положение M' на дуге ACB , то аналогично найдём, что $\angle AI'B = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AM'B = 90^\circ + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AMB) = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AMB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$ и $\angle AK'B = \frac{1}{2} \angle AM'B = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AMB) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AMB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$.

Следовательно, геометрическое место точек I' и геометрическое место точек K' представляют собой дуги окружностей, имеющие своими концами точки A и B и вмещающие углы, соответственно равные $180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$ и $90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$.

Так как $\angle AIB + \angle AI'B = \frac{1}{2} \angle AOB + (180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB) = 180^\circ$, то дуги,



Черт. 577.

являющиеся геометрическими местами точек I и I' , образуют одну окружность. Так как $\angle AKB + \angle AK'B = (90^\circ + \frac{1}{2} \angle AOB) + (90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB) = 180^\circ$, то то же имеет место для геометрических мест точек K и K' (эти две окружности не показаны на чертеже).

354. 1°. Радиусы AO и AO' окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD (черт. 577), соответственно равны (п. 130а): $AO = \frac{AB \cdot AD}{2 \cdot AH}$ и $AO' = \frac{AC \cdot AD}{2 \cdot AH}$, где AH — высота треугольника ABC . Отсюда $AO:AO' = AB:AC$.

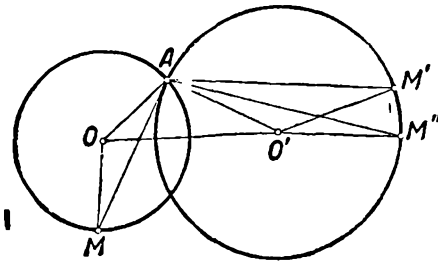
2°. Радиусы AO и AO' будут иметь наименьшую длину при наименьшем возможном значении AD , т. е. при $AD = AH$. Точка D совпадает при этом с основанием высоты H .

3°. Имеем (по 1°) $AO:AO' = AB:AC$, так что равнобедренные треугольники ABO и ACO' подобны. Отсюда $\angle OAB = \angle O'AC$ и, следовательно, $\angle OAO' = \angle BAC$. Так как $\angle OAO' = \angle BAC$ и $AO:AO' = AB:AC$, то треугольник OAO' подобен треугольнику BAC .

4°. Если точка M делит отрезок OO' в данном отношении, то наряду с треугольником AOO' сохраняет постоянную форму и треугольник AOM , так как угол AOM и отношение $AO:OM$ сохраняют постоянные значения. Следовательно, отрезок AM образует постоянный угол с AO , и отношение $AM:AO$ постоянно. Поэтому точка M описывает фигуру, подобную той, которую описывает точка O (сравнить п. 150 и решение упр. 160).

Так как точка O описывает прямую линию — перпендикуляр, составленный в середине стороны AB , то и геометрическое место точек M есть прямая линия.

Так как основание P высоты AP треугольника AOO' есть (в силу равенств $AO = OD$, $AO' = O'D$) середина отрезка AD , то точка P описывает прямую, параллельную BC и проходящую через середины сторон AB и AC .



Черт. 578.

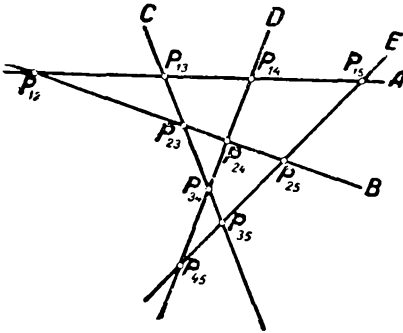
355. Пусть A — одна из точек пересечения данных окружностей O и O' (черт. 578), MAM' — данный угол. Строим угол MAM'' , равный углу OAO' и имеющий то же направление. Точка M'' получается из точки M преобразованием подобия, состоящим из поворота на угол

$MAM'' = \text{const}$ и гомотетии, так как $AM'':AM = AO':AO$. Точка M'' получается из M' поворотом на $\angle M''O'M' = 2\angle M''AM' = \text{const}$. Итак, точки M и M'' а также M' и M'' можно рассматривать как соответственные в двух парах подобных фигур, имеющих одинаковое направление вращения. Следовательно, и точки M и M' можно рассматривать как соответственные в двух подобных фигурах, имеющих одинаковое направление вращения. В силу упражнения 162 геометрическое место точек, делящих отрезок MM' в данном отношении, или геометрическое место вершин треугольников, построенных на MM' как на основании и подобных данному треугольнику, есть фигура, подобная геометрическому месту точек M , т. е. окружность.

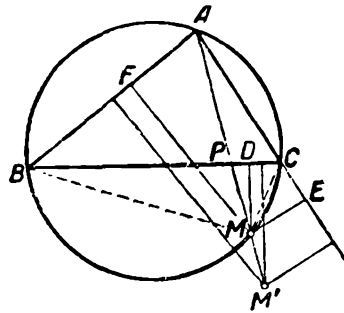
356. Пусть P_{12} — точка пересечения прямых A и B , P_{13} — точка пересечения прямых A и C , и т. д. (черт. 579). Применяя теорему п. 192 к треугольнику, образованному прямыми A , C и D , и к секущей E , получим $\frac{P_{15}P_{13}}{P_{15}P_{14}} \cdot \frac{P_{45}P_{14}}{P_{45}P_{34}} \cdot \frac{P_{35}P_{34}}{P_{35}P_{13}} = 1$. Применяя ту же теорему к треугольнику, образованному прямыми B , C и D и к секущей E , получим $\frac{P_{25}P_{23}}{P_{25}P_{24}} \cdot \frac{P_{45}P_{24}}{P_{45}P_{34}} \cdot \frac{P_{35}P_{34}}{P_{35}P_{23}} = 1$. Приравнявая левые части двух на-

писанных равенств и производя очевидные сокращения, получим $\frac{P_{15}P_{13}}{P_{16}P_{14}} \cdot \frac{P_{45}P_{14}}{P_{35}P_{13}} = \frac{P_{25}P_{23}}{P_{52}P_{24}} \cdot \frac{P_{45}P_{24}}{P_{35}P_{23}}$. Если прямые C , D и E отсекают на прямых A и B пропорциональные отрезки, то $\frac{P_{15}P_{13}}{P_{15}P_{14}} = \frac{P_{25}P_{23}}{P_{25}P_{24}}$. Из двух последних равенств следует $\frac{P_{35}P_{14}}{P_{35}P_{13}} = \frac{P_{45}P_{24}}{P_{35}P_{23}}$, или $\frac{P_{35}P_{23}}{P_{35}P_{13}} = \frac{P_{45}P_{24}}{P_{45}P_{14}}$, т. е. прямые A , B и E отсекают на прямых C и D пропорциональные отрезки.

Итак, мы доказали, что если на паре прямых (A, B) три другие прямые отсекают пропорциональные отрезки, то то же имеет место и для пары прямых (C, D) , в которую не входит ни A , ни B . Следовательно, в этом случае и пары прямых (C, E) и (D, E) обладают тем же свойством.



Черт. 579.



Черт. 580.

Чтобы доказать далее, что и пара прямых (A, C) , в которую входит прямая A , принадлежащая к нашей первоначальной паре (A, B) , обладает тем же свойством, мы должны *дважды* применить проведённое рассуждение: если рассматриваемое свойство верно для пары (A, B) , то оно верно и для (D, E) , а если оно верно для (D, E) , то оно верно и для (A, C) .

357. Пусть точка M лежит, для определённости, на не содержащей точки A дуге BC окружности ABC (черт. 580), $MD = x$, $ME = y$, $MF = z$ — расстояния этой точки от сторон треугольника $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. В силу п. 237 имеем:

$$MA \cdot a = MB \cdot b + MC \cdot c. \quad (1)$$

Если D , E и F — основания перпендикуляров из точки M на стороны треугольника, то треугольники MBF и MCE подобны (так как $\angle ABM = 180^\circ - \angle ACM = \angle ECM$), откуда $MB:MC = z:y$. Аналогично из подобия треугольников MBD и MAE имеем $MA:MB = y:x$.

Следовательно, $MA:MB:MC = \frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$. Заменяя теперь в равенстве (1) отрезки MA , MB и MC пропорциональными им величинами, мы получим $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$. Аналогично для точек M , лежащих на дуге AC , мы найдём $\frac{b}{y} = \frac{a}{x} + \frac{c}{z}$, а для точек, лежащих на дуге AB , найдём $\frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$. Теорема доказана.

Если расстояниям точки M от сторон треугольника ABC приписать соответствующие знаки (сравнить решение упр. 301, примечание), то для любой точки M , лежащей на описанной окружности, будем иметь по абсолютной величине и по знаку

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \quad (2)$$

Обратная теорема может быть сформулирована так: *Если для некоторой точки M плоскости имеет место по величине и по знаку равенство (2), то точка M лежит на описанной окружности.*

Для доказательства рассмотрим точку M' , не лежащую на описанной окружности, и обозначим через x' , y' и z' её расстояния от сторон треугольника (взяты с надлежащими знаками). Далее, обозначим через M точку пересечения прямой AM' с описанной окружностью, через x , y и z — её расстояния от сторон треугольника и через P — точку пересечения прямой AM' со стороной BC . Так как точки A , M' , M и P лежат на одной прямой, то мы имеем по величине и по знаку $y:y' = z:z' = AM:AM'$; $x:x' = PM:PM'$ и $x:x' = PM:PM' = (PA + AM):(PA + AM') \neq AM:AM'$ (известно, что при $a \neq b$ и $c \neq 0$ имеем $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$). Отсюда, так как точка M лежит на опи-

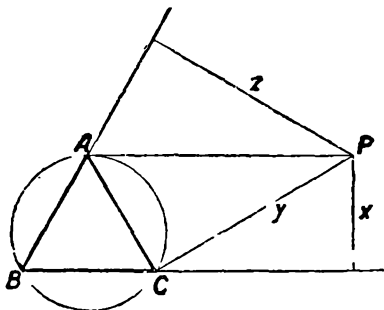
санной окружности, то $\frac{a}{x'} + \frac{b}{y'} + \frac{c}{z'} = \frac{a}{x'} + \left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot \frac{AM}{AM'} = \frac{a}{x'} - \frac{a}{x} \cdot \frac{AM}{AM'} = \frac{a}{x} \left(\frac{x}{x'} - \frac{AM}{AM'}\right) \neq 0$, откуда и следует обратная теорема.

Доказательство нуждается в видоизменениях (которые представляем читателю), если прямая AM' касается описанной окружности или если она параллельна прямой BC .

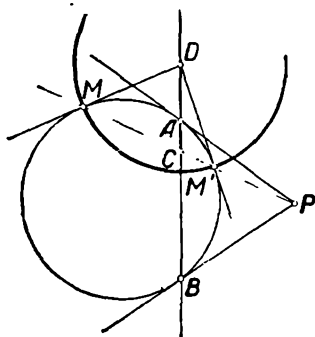
Примечание. По поводу обратной теоремы заметим, что утверждение: «если одно из отношений $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$, $\frac{c}{z}$ равно сумме двух других, то точка лежит на описанной окружности», неверно, если не учитывать знаков расстояний, как показывает следующий пример. На внешней биссектрисе угла при вершине A равностороннего треугольника ABC возьмём точку P , для которой прямая PC перпендикулярна к AC (черт. 581). Для точки P имеем (по абсолютной величине) $2x = y = z$, и, следовательно,

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$, в то время как точка P заведомо не лежит на описанной окружности.

358. Пусть P — точка пересечения касательных к одной из рассматриваемых окружностей в точках A и B (черт. 582); M и M' — точки пересечения прямой PC с этой окружностью.

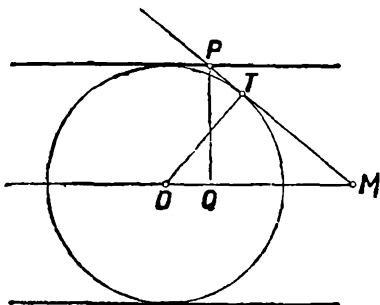


Черт. 581.

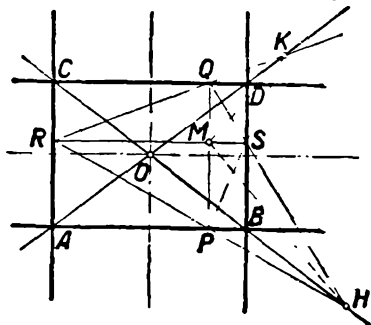


Черт. 582.

Так как точка P есть полюс прямой AB относительно окружности и прямая MM' проходит через точку P , то полюс прямой MM' лежит на прямой AB . Иначе говоря, касательные к окружности в точках M и M' пересекаются в точке D прямой AB , гармонически сопряжённой с точкой C относительно точек A и B . Длина касательной будет



Черт. 583.



Черт. 584.

равна $DM = \sqrt{DA \cdot DB}$. Итак, геометрическое место точек M (или M') есть окружность с центром D и радиусом, равным $\sqrt{DA \cdot DB}$.

359. Проведя радиус OT (черт. 583), перпендикулярный к касательной, и опустив из точки P перпендикуляр PQ на прямую OM , получим два равных треугольника MOT и MPQ , откуда $PQ = OT$. Следовательно, геометрическое место точек P есть пара касательных к данной окружности, параллельных прямой OM .

360. Пусть $ABDC$ — данный прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей (черт. 584).

1°. Применяя к треугольнику ABC и секущей PR теорему п. 192, получим для точки пересечения H прямых BC и PR следующее

$$\text{равенство: } \frac{HB}{HC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1. \text{ Точно так же, обозначая через } H'$$

точку пересечения прямых BC и QS , получим из треугольника BCD ,

$$\text{что } \frac{H'B}{H'C} \cdot \frac{QC}{QD} \cdot \frac{SD}{SB} = 1. \text{ Так как } RC:RA = SD:SB, \quad PA:PB =$$

$= QC:QD$ (по абсолютной величине и по знаку), то $HB:HC = H'B:H'C$ (также по величине и по знаку), так что точки H и H' совпадают. Итак, прямые PR и QS пересекаются на прямой BC .

Точно так же доказывается, что прямые PS и QR пересекаются на прямой AD .

2°. В полном четырёхстороннике, образованном прямыми RQ , QS , PS и PR , диагональ HK делится гармонически диагоналями PQ и RS (п. 202); следовательно, прямые MQ , MS , MH , MK образуют гармонический пучок. Так как прямая MQ перпендикулярна к MS , то прямые MQ и MS делят пополам углы между прямыми MH и MK п. 201, следствие II).

3°. Применяя теорему п. 192 к треугольнику ABC и секущей PR , мы нашли, что $\frac{HB}{HC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. Применяя ту же теорему к

треугольнику ADC и секущей QR , найдём, что $\frac{KA}{KD} \cdot \frac{QD}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$. Так

как $QD:QC = PB:PA$, то из двух последних равенств получим почленным перемножением и почленным делением $\frac{HB}{HC} \cdot \frac{KA}{KD} \cdot \left(\frac{RC}{RA}\right)^2 = 1$;

$$\frac{HB}{HC} \cdot \frac{KD}{KA} \cdot \left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = 1. \text{ Отсюда } \frac{PA}{PB} = \pm \sqrt{\frac{HC \cdot KA}{HB \cdot KD}} \quad \text{и} \quad \frac{RC}{RA} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{HC \cdot KD}{HB \cdot KA}}. \text{ Знаки надо выбирать так, чтобы произведение}$$

$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{RC}{RA}$ имело одинаковый знак с $HB:HC$. Эти равенства определяют положение точек P и R соответственно на прямых AB и AC и тем самым положение точки M на плоскости.

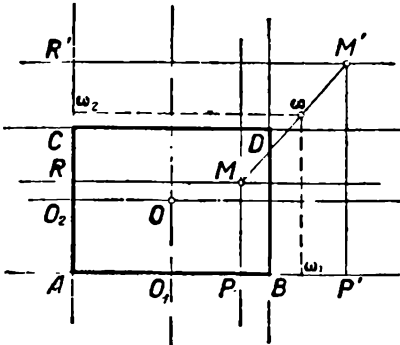
Для возможности построения точки M необходимо, чтобы отношения $\frac{HC}{HB}$ и $\frac{KA}{KD}$ имели одинаковый знак (так как иначе подкоренное выражение отрицательно).

4°. Из предыдущего следует, что данным точкам H и K соответствуют два положения точки P , а именно точки P и P' (черт. 585),

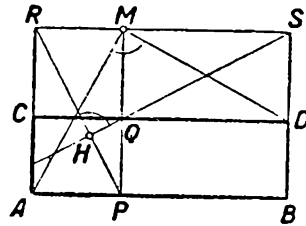
делящие гармонически отрезок AB , и два положения точки R , а именно точки R и R' , делящие гармонически отрезок AC . Точки P и R определяют точку M , а точки P' и R' — точку M' . Обозначим через O центр прямоугольника $ABDC$, через ω — середину отрезка MM' , через O_1 , O_2 и ω_1 , ω_2 — проекции точек O и ω на AB и AC .

В силу п. 189 имеем $O_1B^2 = O_1P \cdot O_1P' = (O_1\omega_1 - \omega_1P) \cdot (O_1\omega_1 + \omega_1P') = O_1\omega_1^2 - \omega_1P^2$, так как $\omega_1P' = \omega_1P$. Точно так же $O_2C^2 = O_2R \cdot O_2R' = O_2\omega_2^2 - \omega_2R^2$. Отсюда путём сложения находим

$O_1B^2 + O_2C^2 = (O_1\omega_1^2 + O_2\omega_2^2) - (\omega_1P^2 + \omega_2R^2)$, или $OD^2 + \omega M^2 = O\omega^2$. Но OD и ωM — радиусы обеих окружностей, о которых



Черт. 585.

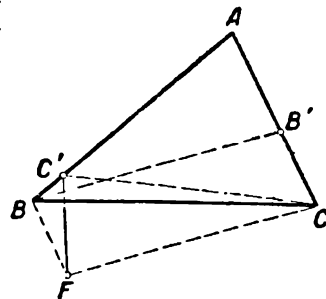


Черт. 586.

говорится в задаче, $O\omega$ — расстояние между их центрами; таким образом, последнее равенство есть условие ортогональности.

5°. Пусть прямая PR перпендикулярна к QS (черт. 586); так как прямые PR и AM одинаково наклонены к AB , и то же имеет место для QS и MD , то прямая AM перпендикулярна к MD . Следовательно, точка M лежит на окружности, имеющей AD своим диаметром, т. е. описанной около $ABDC$. Обратно, если точка M лежит на этой окружности, то прямая AM перпендикулярна к MD , и, следовательно, прямая PR перпендикулярна к QS .

361. Предположим, что $\angle CBB' > \angle BCC'$ (черт. 587). Сравнивая треугольники CBB' и BCC' , получаем $CB' > BC'$. Так как $CB' = FB$, то $FB > BC'$, и из треугольника $BC'F$ имеем $\angle BC'F > \angle BFC'$.



Черт. 587.

Отсюда, прибавляя по равному (в силу $CF = BB' = CC'$) углу $\angle FC'C = \angle C'FC$, получим $\angle BC'C > \angle BFC$, или $\angle BC'C > \angle BB'C$. Следовательно, $\angle AC'C < \angle BB'A$. Наконец, $\angle ABB' = 180^\circ - \angle A - \angle BB'A < 180^\circ - \angle A - \angle AC'C = \angle ACC'$. Итак, из предположения, что $\angle CBB' > \angle BCC'$ следует, что $\angle ABB' < \angle ACC'$.

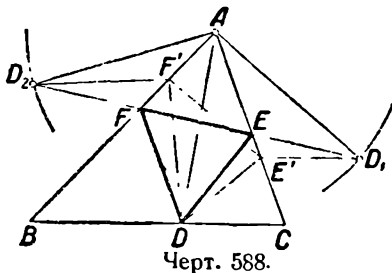
Поменяв ролями точки B и C , мы видим, что из предположения $\angle BCC' > \angle CBB'$ следует, что $\angle ACC' < \angle ABB'$.

Если равные отрезки $BB' = CC'$ служат биссектрисами углов B и C , то предположение $\angle ABC > \angle ACB$ приводит, очевидно, к противоречию, так как при этом мы имеем одновременно и $\angle CBB' > \angle BCC'$ и $\angle ABB' > \angle ACC'$. К такому же противоречию приводит и допущение $\angle ACB > \angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB$, и треугольник ABC — равнобедренный.

361а. В силу формул п. 129 имеем для биссектрис l_a и l_b углов A и B треугольника ABC выражения: $l_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$, $l_b^2 = ac - \frac{b^2 ac}{(a+c)^2}$, откуда $l_a^2 - l_b^2 = (b-a)c + abc \left(\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2} \right)$.

Если $b > a$, то очевидно и $\frac{b}{(a+c)^2} > \frac{a}{(b+c)^2}$, так что $l_a > l_b$.

362. Треугольник DEF будем называть вписанным в треугольник ABC , если точки D , E и F лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника или их продолжениях.



Черт. 588.

Найдём сначала треугольник, имеющий наименьший периметр среди всех треугольников, вписанных в данный треугольник и имеющих своей вершиной заданную точку D прямой BC . Построим точки D_1 и D_2 (черт. 588), симметричные с точкой D относительно прямых AB и AC . Периметр

произвольного треугольника $DE'F'$, вписанного в данный треугольник, будет равен ломаной $D_1E'F'D_2$. Треугольник наименьшего периметра DEF получится в том случае, когда линия D_1EFD_2 окажется прямой. Таким образом, для построения треугольника DEF наименьшего периметра с заданной вершиной D достаточно провести прямую D_1D_2 .

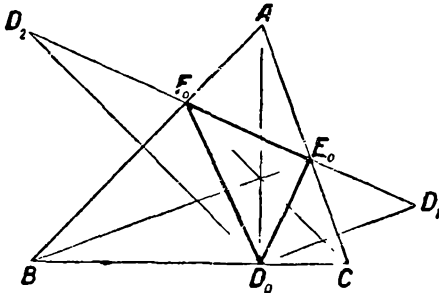
Чтобы решить теперь предложенную задачу, надо выбрать точку D так, чтобы отрезок D_1D_2 был наименьшим. С этой целью заметим, что $AD_1 = AD_2 = AD$, так как точки D_1 и D_2 симметричны с D соответственно относительно AC и AB , и $\angle D_1AD_2 = 2\angle A$ по той же причине. Следовательно, угол при вершине A равнобедренного треугольника AD_1D_2 не зависит от выбора точки D на прямой BC , а потому сторона D_1D_2 этого треугольника будет наименьшей, если длина равных отрезков $AD_1 = AD_2 = AD$ будет наименьшей, т. е. если AD есть высота AD_0 треугольника ABC (черт. 589).

Докажем, что если D_0 есть основание высоты AD_0 треугольника ABC , то точки D_1 и D_2 лежат на прямой E_0F_0 , соединяющей основания E_0 и F_0 высот BE_0 и CF_0 треугольника. В самом деле, если D_0 , E_0 и F_0 — основания высот, то $\angle AE_0F_0 = \angle CE_0D_0$ (сравнить упр. 71).

С другой стороны, $\angle CE_0D_0 = \angle CE_0D_1$, так как точки D_0 и D_1 симметричны относительно AC . Следовательно, $\angle AE_0F_0 = \angle CE_0D_1$, и потому точка D_1 лежит на прямой E_0F_0 . Аналогично докажем, что и точка D_2 лежит на прямой E_0F_0 .

Итак, искомый треугольник имеет своими вершинами основания высот данного треугольника.

362 а. 1°. Пусть в данный четырёхугольник $ABCD$ вписан четырёхугольник (в собственном смысле) $MNPQ$ с наименьшим периметром (черт. 590). Если бы угол AMQ не равнялся углу BMN ,



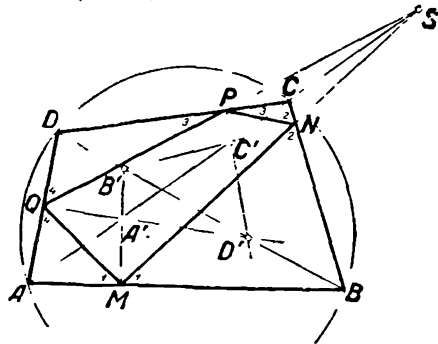
Черт. 589.

то мы могли бы уменьшить длину ломаной QMN , а следовательно, и периметр четырёхугольника $MNPQ$, оставляя на месте точки N , P и Q и перемещая точку M по стороне AB (сравнить решение упр. 13, примечание). Итак, для четырёхугольника с наименьшим периметром имеем:

$$\begin{aligned} \angle AMQ = \angle BMN = \angle 1; \quad \angle BNM = \angle CNP = \angle 2; \\ \angle CPN = \angle DPQ = \angle 3; \quad \angle DQP = \angle AQM = \angle 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда $\angle A + \angle 4 + \angle 1 = \angle B + \angle 1 + \angle 2 = \angle C + \angle 2 + \angle 3 = \angle D + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ и $\angle A + \angle C + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle B + \angle D + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$, т. е. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, так что четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.

2°. Пусть теперь $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, и $MNPQ$ — четырёхугольник, удовлетворяющий условиям (1). Построим последовательно четырёхугольник ABC_1D_1 (черт. 591), симметричный с $ABCD$ относительно стороны AB , затем четырёхугольник $A_1BC_1D_2$, симметричный с ABC_1D_1 относительно BC_1 , четырёхугольник

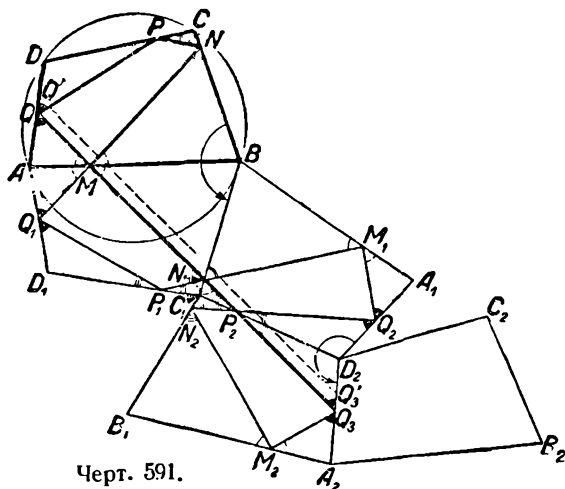


Черт. 590.

$A_2B_1C_1D_2$, симметричный с $A_1BC_1D_2$ относительно C_1D_2 , и, наконец, четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$, симметричный с $A_2B_1C_1D_2$ относительно D_2A_2 . В силу п. 102а четырёхугольник $A_1BC_1D_2$ получается из $ABCD$ поворотом около точки B на угол, равный $2\angle B$, а четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$ из $A_1BC_1D_2$ поворотом около точки D_2 в том же направлении на угол $2\angle D$. Так как $2\angle B + 2\angle D = 360^\circ$, то соответ-

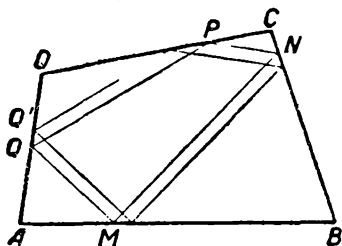
ственные стороны четырёхугольников $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ параллельны и направлены в одну и ту же сторону.

Точка Q стороны AD переходит при этих построениях в точку Q_3 стороны A_2D_2 , удовлетворяющую условию $AQ = A_2Q_3$, а периметр четырёхугольника $MNPQ$ даёт *прямолинейный* отрезок QQ_3 в силу



Черт. 591.

условия (1). Отсюда следует существование бесчисленного множества четырёхугольников $MNPQ$ (черт. 592) с одинаковым периметром: чтобы получить один из них, достаточно провести на чертеже 591 отрезок QQ_3 параллельно прямой AA_2 ; при этом отрезок QQ_3 можно заменить произвольным параллельным ему отрезком $Q'Q'_3$. Периметр



Черт. 592.

этих четырёхугольников будет меньше периметров всех других вписанных четырёхугольников, так как периметр четырёхугольника, вписанного в $ABCD$, отличного от $MNPQ$ и имеющего своей вершиной точку Q , изобразится на чертеже 591 *ломаной* линией, имеющей своими концами точки Q и Q_3 .

Для вычисления периметра четырёхугольника $MNPQ$ восставим в точках M , N , P и Q перпендикуляры к сторонам четырёхугольника $ABCD$ и обозначим через A' , B' , C' , D' точки их пересечения, как показано на чертеже 590. Так как прямые MA' и QA' — биссектрисы углов NMQ и MQP , то точка A' равноудалена от всех трёх прямых NM , MQ и QP ; следовательно, точка A' лежит на биссектрисе угла MSQ , имеющего своими сторонами прямые MN и PQ . По той же причине на биссектрисе угла MSQ лежит и каждая из точек A , C и C' . Следовательно, точки A , C , A' и C' лежат на одной прямой

Совершенно таким же образом докажем, что и точки B , D , B' и D' лежат на одной прямой.

Применяя к четырёхугольнику $BMB'N$ теорему Птоломея (п. 237), находим:

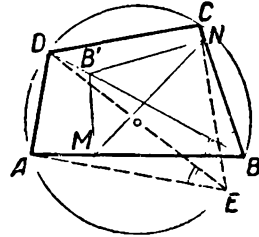
$$BB' \cdot MN = BM \cdot B'N + BN \cdot B'M. \quad (2)$$

Если R — радиус окружности ABC и E — точка этой окружности, диаметрально противоположная точке D (черт. 593), то из подобия двух пар треугольников, а именно $BB'N$ и EDC , а также $BB'M$ и EDA , имеем: $BB':B'N:B'M = 2R:CD:DA$. Заменяя теперь в равенстве (2) отрезки BB' , $B'N$, $B'M$ пропорциональными им отрезками $2R$, DC , AD , получаем:

$$2R \cdot MN = BM \cdot CD + BN \cdot DA. \quad (3)$$

Аналогично имеем $2R \cdot NP = CN \cdot DA + CP \cdot AB$; $2R \cdot PQ = DP \cdot AB + DQ \cdot BC$; $2R \cdot QM = AQ \cdot BC + AM \cdot CD$. Складывая четыре последних равенства почленно, получим: $2R \cdot (MN + NP + PQ + QM) = AB \cdot (CP + PD) + BC \cdot (DQ + QA) + CD \cdot (AM + MB) + DA \cdot (BN + NC) = 2(AB \cdot CD + BC \cdot DA) = 2AC \cdot BD$. Итак,

$$MN + NP + PQ + QM = \frac{AC \cdot BD}{R}. \quad (4)$$



Черт. 593.

3°. Чтобы четырёхугольник $MNPQ$ был вписанным, надо, чтобы $\angle NPQ + \angle QMN = 180^\circ$, т. е. чтобы $\angle BMN + \angle CPN = 90^\circ$ (черт. 590). Но $\angle BMN = \angle BB'N$; $\angle CPN = \angle CC'N$. Следовательно, мы должны иметь $\angle BB'N + \angle CC'N = \angle BB'C' + \angle B'C'A = 90^\circ$, откуда вытекает, что прямая AC должна быть перпендикулярной к прямой BD .

4°. Если четырёхугольник $MNPQ$ может быть вписан в окружность, то центр ω последней лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных в серединах K и L сторон MN и NP . При перемещении точки M по прямой AB стороны четырёхугольника $KNL\omega$ сохраняют своё направление. Точка K перемещается при этом по медиане треугольника BM_0N_0 (где $M_0N_0P_0Q_0$ — какой-либо один из четырёхугольников $MNPQ$), точка L — по медиане треугольника CN_0P_0 , точка N — по прямой BC . В силу решения задачи 193 четвёртая вершина ω четырёхугольника $KNL\omega$ перемещается при этом по прямой.

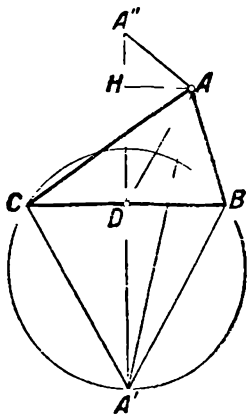
363. Пусть точка O , найденная в задаче 105, лежит внутри данного треугольника ABC (черт. 358) и M — произвольная точка плоскости. В таком случае $AA' \leq MA + MA'$, причём равенство имеет место только для точек отрезка AA' . Далее в силу упражнения 269 мы имеем $MA' \leq MB + MC$, причём равенство имеет место только для точек дуги BOC . Отсюда следует, что $AA' \leq MA + MB + MC$, причём равенство имеет место только в том случае, когда точка M совпадает с точкой пересечения O отрезка AA' и дуги BOC .

Таким образом, для любой точки M , отличной от O , имеем $AA' = OA + OB + OC < MA + MB + MC$.

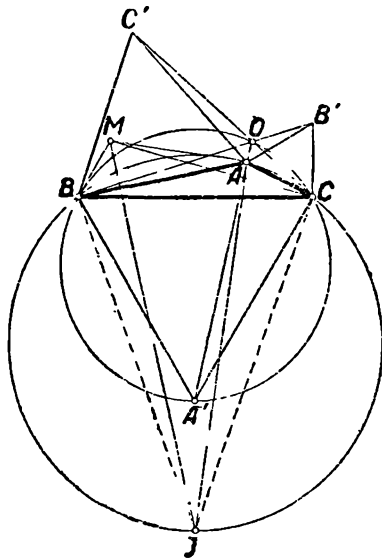
Для вычисления наименьшей суммы расстояний $OA + OB + OC = AA'$ обозначим через A'' точку, симметричную с A' относительно прямой BC , и через D — точку пересечения прямых BC и $A'A''$ (черт. 594). Так как AD есть медиана каждого из треугольников $AA'A''$ и ABC , то мы имеем (п. 128) $A'A^2 + A''A^2 = 2AD^2 + 2A'D^2$ и

$AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$. Так как из равностороннего треугольника $A'BC$ имеем $A'D = \frac{1}{2}BC \cdot \sqrt{3}$, то из предыдущих равенств

следует, что $A'A^2 + A''A^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2$. Далее, если H — основание перпендикуляра из точки A на прямую $A'A''$, то на основании п. 128а имеем равенства $A'A^2 - A''A^2 = 2A'H \cdot DH =$



Черт. 594.



Черт. 595.

$= 2\sqrt{3} BC \cdot DH = 4\sqrt{3} \cdot \text{пл. } ABC$. Из двух последних уравнений получаем $A'A^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2) + 2\sqrt{3} \cdot \text{пл. } ABC$.

Пусть теперь точка O лежит вне треугольника, например на продолжении отрезка $A'A$ за точку A (черт. 595); в таком случае $\angle BAC > \angle BOC$, т. е. $\angle BAC > 120^\circ$. Пусть биссектриса угла A пересекает окружность ABC в точке I . При этом $IB = IC$ и (в силу неравенства $\angle BAC > 120^\circ$) $IB > BC$. Применяя теорему Птолемея (п. 237) к четырёхугольнику $ABIC$, найдём

$$(AB + AC) \cdot BI = BC \cdot AI. \quad (1)$$

Пусть теперь M — произвольная точка плоскости, отличная от точки A . По теореме п. 237а, применённой к четырёхугольнику BMC , имеем $BC \cdot MI \leq (MB + MC) \cdot BI$ (причём равенство имеет место только для точек M , лежащих на дуге BAC окружности ABC), откуда

$$\text{Далее} \quad BC \cdot MI + BC \cdot MA \leq (MA + MB + MC) \cdot BI. \quad (2)$$

$$IA \leq MI + MA, \quad (3)$$

причём равенство имеет место только для точек M , принадлежащих отрезку AI . Из (2) и (3) находим, что

$$BC \cdot IA \leq (MA + MB + MC) \cdot BI, \quad (4)$$

причём равенство имеет место только в том случае, когда точка M совпадает с A . Сравнение (1) и (4) показывает, что для любой точки M , отличной от A , имеем $AB + AC < MA + MB + MC$.

Следовательно, сумма $MA + MB + MC$ будет наименьшей, когда точка M совпадает с A .

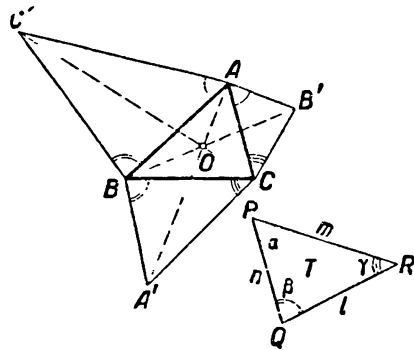
364. Пусть точки A' , B' и C' построены как указано в тексте, и O — точка пересечения окружностей $BA'C$ и $CB'A$ (черт. 596). Будем иметь по величине и по знаку (сравнить решение задачи 344) $\angle BOC =$

$= \angle BA'C, \angle COA = \angle CB'A$, откуда $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = \angle CA'B + \angle AB'C = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma = -\gamma = \angle AC'B$. Следовательно, точка O лежит и на окружности $AC'B$. Так как точки A' , B , C и O лежат на одной окружности, то $\angle A'OC = \angle A'BC$, и аналогично $\angle COB' = \angle CAB'$ и $\angle B'OA = \angle B'CA$. Отсюда $\angle A'OC + \angle COB' + \angle B'OA = \angle A'BC + \angle CAB' + \angle B'CA = \alpha + \beta + \gamma$, и потому $\angle AOA'$ — прямая линия. Так же докажем, что BOB' и COC' — прямые линии.

Пусть теперь точка O лежит внутри треугольника ABC . На основании пп. 237 и 237а мы имеем для произвольной точки M плоскости $MA' \cdot BC \leq MB \cdot A'C + MC \cdot A'B$, причём равенство имеет место только для точек дуги BOC . Но по построению треугольника $A'BC$ имеют место равенства

$$BC : CA' : A'B = l : m : n, \quad (1)$$

и предыдущее соотношение принимает вид: $l \cdot MA' \leq m \cdot MB + n \cdot MC$. Далее $l \cdot AA' \leq l \cdot (MA + MA')$, причём равенство имеет место только для точек M , лежащих на отрезке AA' . Следовательно, $l \cdot AA' \leq l \cdot MA + m \cdot MB + n \cdot MC$, причём знак равенства имеет место только в том случае, когда точка M совпадает с точкой пересечения O отрезка

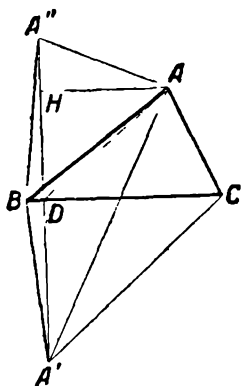


Черт. 596.

AA' и дуги BOC . Таким образом, для любой точки M , отличной от O , имеем $l \cdot OA + m \cdot OB + n \cdot OC = l \cdot AA' < l \cdot MA + m \cdot MB + n \cdot MC$.

Для вычисления минимума $l \cdot AA' = l \cdot OA + m \cdot OB + n \cdot OC$ выражения $l \cdot MA + m \cdot MB + n \cdot MC$ обозначим через A'' точку, симметричную с A' относительно прямой BC , и через D — точку пересечения прямых BC и $A'A''$ (черт. 597). Так как AD есть медиана треугольника $AA'A''$, то мы имеем (п. 128) $A'A^2 + A''A^2 = 2AD^2 + 2A'D^2$.

Применяя теперь к треугольнику ABC и отрезку AD теорему Стоурта (п. 127), получим $AD^2 = \frac{BD}{BC} \cdot AC^2 + \frac{DC}{BC} \cdot AB^2 - BD \cdot DC$. Подставляя это выражение для AD^2 в предыдущее равенство и заменяя в последнем $A'D^2$ равным ему выражением $A'B^2 - BD^2$, найдём:



$$\begin{aligned} A'A^2 + A''A^2 &= 2 \left(\frac{BD}{BC} \cdot AC^2 + \frac{DC}{BC} \cdot AB^2 - \right. \\ &\quad \left. - BD \cdot DC \right) + 2(A'B^2 - BD^2) = 2 \frac{BD}{BC} \cdot AC^2 + \\ &\quad + 2 \frac{DC}{BC} \cdot AB^2 + 2 \left(\frac{A'B^2}{BC^2} - \frac{BD^2}{BC^2} \right) \cdot BC^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Черт. 597.

Далее, так как $A'D$ есть высота треугольника $A'BC$, будем иметь (п. 126)

$$BD = \frac{A'B^2 + BC^2 - A'C^2}{2BC}; \quad DC = \frac{A'C^2 + BC^2 - A'B^2}{2BC}. \quad (3)$$

Из равенств (1) и (3) получаем: $\frac{BD}{BC} = \frac{n^2 + l^2 - m^2}{2l^2}$; $\frac{DC}{BC} = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{2l^2}$; $\frac{A'B}{BC} = \frac{n}{l}$. Подставляя эти значения в равенство (2) и умножая на l^2 , получим:

$$\begin{aligned} l^2 \cdot (A'A^2 + A''A^2) &= (m^2 + n^2 - l^2) \cdot BC^2 + (n^2 + l^2 - m^2) \cdot AC^2 + \\ &\quad + (l^2 + m^2 - n^2) \cdot AB^2. \quad (4) \end{aligned}$$

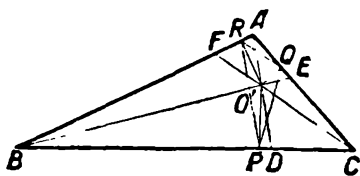
С другой стороны, разность квадратов двух сторон треугольника $AA'A''$ равна (согласно п. 128а) произведению третьей стороны и проекции на неё соответствующей медианы. Иначе говоря, обозначая через H проекцию точки A на прямую $A'A'$, будем иметь $A'A^2 - A''A^2 = 2A'A \cdot DH = 4A'D \cdot DH = \frac{16 \cdot \text{пл.} ABC \cdot \text{пл.} A'BC}{BC^2}$, откуда в

силу равенства $\text{пл.} A'BC : \text{пл.} T = BC^2 : l^2$ (сравнивь п. 257) находим $l^2 \cdot (A'A^2 - A''A^2) = 16 \cdot \text{пл.} ABC \cdot \text{пл.} T$.

положим для определённости, что l есть наибольшее из чисел l , m и n . В таком случае $l \geq m+n$, и для любой точки M , отличной от A , имеем: $l \cdot MA + m \cdot MB + n \cdot MC \geq (m+n) \cdot MA + m \cdot MB + n \cdot MC = m \cdot (MA+MB) + n \cdot (MA+MC) > m \cdot AB + n \cdot AC$, так что наименьшее значение будет опять получаться, когда точка M совпадает с A .

Примечание. Формулу (5) можно получить несколько более коротким путём, если воспользоваться основными формулами тригонометрии. А именно из треугольника CAA' (черт. 596) имеем $l^2 \cdot A'A^2 = l^2 \cdot AC^2 + l^2 \cdot A'C^2 - 2l^2 \cdot AC \cdot A'C \cdot \cos(C+\gamma)$. Заменяем, пользуясь подобием треугольников $A'BC$ и T , величину $l \cdot A'C$ через $m \cdot BC$ и раскроем косинус суммы: $l^2 \cdot A'A^2 = l^2 \cdot AC^2 + m \cdot BC^2 - 2lm \cdot BC \cdot AC (\cos C \cos \gamma - \sin C \sin \gamma)$. Подставляя сюда $2lm \cos \gamma = l^2 + m^2 - n^2$; $2BC \cdot AC \cos C = BC^2 + AC^2 - AB^2$; $lm \sin \gamma = 2 \text{ пл. } T$; $BC \cdot AC \cdot \sin C = 2 \text{ пл. } ABC$, мы и получим формулу (5).

365. 1°. Если точки D , E и F делят стороны треугольника ABC (черт. 599) на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон,



Черт. 599.

то мы имеем $DB:DC = -c^2:b^2$; $EC:EA = -a^2:c^2$; $FA:FB = -b^2:a^2$, и прямые AD , BE и CF проходят через одну точку в силу теоремы Чебы (п. 198).

2°. Для точки пересечения медиан O' расстояния до сторон треугольника обратно пропорциональны длинам этих сторон в силу равенности площадей OBC , OCA и OAB (см. решение упр. 295). Для любой точки O' прямой AD имеем $\text{пл.} BDA : \text{пл.} O'AB = AD : AO' = -\text{пл.} CDA : \text{пл.} O'AC$, или $\text{пл.} BDA : \text{пл.} CDA = \text{пл.} O'AB : \text{пл.} O'AC$. Но, с другой стороны, $\text{пл.} BDA : \text{пл.} CDA = BD : DC = c^2 : b^2$, откуда $\text{пл.} O'AB : \text{пл.} O'AC = c^2 : b^2$. Обозначая через $O'P$, $O'Q$ и $O'R$ расстояния точки O' от сторон треугольника ABC , будем иметь $\text{пл.} O'AB : \text{пл.} O'AC = (O'R \cdot c) : (O'Q \cdot b)$. Из двух последних равенств находим $O'Q : O'R = b : c$.

Для точки O' пересечения прямых AD , BE и CF находим поэтому:

$$O'P : O'Q : O'R = a : b : c. \quad (1)$$

В силу сказанного в решении задачи 197 точка O' получается из точки пересечения O медиан треугольника указанным там построением, так как расстояния точки O' от сторон треугольника обратно пропорциональны расстояниям точки O от тех же сторон.

3°. Если P , Q и R , как и выше, основания перпендикуляров, опущенных из точки O' на стороны треугольника, то $\angle RO'Q + \angle RAQ = 180^\circ$, и, следовательно (п. 256), $\text{пл.} QO'R : \text{пл.} ABC = (O'Q \cdot O'R) : bc$. Точно так же $\text{пл.} RO'P : \text{пл.} ABC = (O'R \cdot O'P) : ac$; $\text{пл.} PO'Q : \text{пл.} ABC = (O'P \cdot O'Q) : ab$. В силу равенств (1) отсюда следует, что $\text{пл.} QO'R = \text{пл.} RO'P = \text{пл.} PO'Q$, так что (сравнить решение упр. 295) точка O' есть центр тяжести треугольника PQR .

366. Первое решение. Предположим, что среди всех треугольников, вписанных в данный треугольник, есть треугольник DEF

(черт. 600), для которого величина $s = EF^2 + FD^2 + DE^2$ имеет наименьшее значение. Если D_1 — середина стороны EF , то в силу п. 128

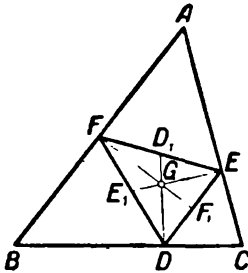
имеем $FD^2 + DE^2 = \frac{1}{2} EF^2 + 2D_1D^2$, и $s = \frac{3}{2} EF^2 + 2D_1D^2$. Из

этой формулы видно, что если бы медиана DD_1 не была перпендикулярной к стороне BC , то мы могли бы уменьшить s , оставив на месте точки E и F и заменив точку D основанием перпендикуляра из точки D_1 на сторону BC . Следовательно, медиана DD_1 перпендикулярна к стороне BC . Таким же образом докажем, что *все медианы треугольника DEF перпендикулярны к соответствующим сторонам треугольника ABC* .

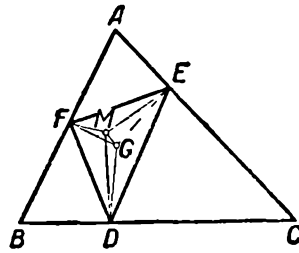
Пусть теперь G — точка пересечения медиан треугольника DEF . В силу упражнения 295 имеем

$$\text{пл. } GEF = \text{пл. } GFD = \text{пл. } GDE. \quad (1)$$

С другой стороны, $\angle EGF + \angle BAC = 180^\circ$, и, следовательно (п. 256), $\text{пл. } GEF : \text{пл. } ABC = (GE \cdot GF) : (AB \cdot AC)$; аналогично $\text{пл. } GFD : \text{пл. } ABC =$



Черт. 600.



Черт. 601.

$$= (GF \cdot GD) : (BC \cdot AB); \quad \text{пл. } GDE : \text{пл. } ABC = (GD \cdot GE) : (AC \cdot BC).$$

Отсюда, в силу (1), $\frac{GE \cdot GF}{AB \cdot AC} = \frac{GF \cdot GD}{BC \cdot AB} = \frac{GD \cdot GE}{AC \cdot BC}$, и следовательно,

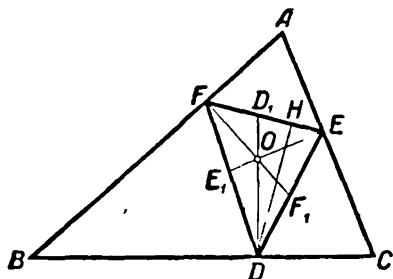
$GD : GE : GF = BC : CA : AB$. Итак, расстояния точки G — центра тяжести искомого треугольника DEF — от сторон данного треугольника пропорциональны длинам этих сторон, и *точка G совпадает с точкой O' , рассмотренной в задаче 365 (сравнить п. 157, построение 10), а искомым треугольником DEF — с треугольником PQR из той же задачи.*

Пусть теперь M — произвольная точка плоскости (черт. 601), D , E и F — основания перпендикуляров из точки M на стороны треугольника ABC и G — точка пересечения медиан треугольника DEF . В силу упражнения 140 имеем $MD^2 + ME^2 + MF^2 = GD^2 + GE^2 + GF^2 + 3MG^2$. Так как точка пересечения медиан треугольника отсекает от каждой из них одну треть, считая от соответствующего основания (п. 56), то из решения упражнения 137 следует:

$$GD^2 + GE^2 + GF^2 = \frac{1}{3} (EF^2 + FD^2 + DE^2). \quad (2)$$

$$\text{Отсюда } MD^2 + ME^2 + MF^2 = \frac{1}{3}(EF^2 + FD^2 + DE^2) + 3MG^2.$$

Из этого равенства видно, что сумма квадратов расстояний точки M от сторон треугольника, т. е. $MD^2 + ME^2 + MF^2$, будет наименьшей, когда точка M будет совпадать с точкой O' из задачи 365, так как при этом, как только что было доказано, сумма $EF^2 + FD^2 + DE^2$ будет наименьшей, а MG обращается в нуль.



Черт. 602.

Переходим теперь к отысканию треугольника DEF , для которого величина $s = l \cdot EF^2 + m \cdot FD^2 + n \cdot DE^2$, где l, m и n — данные числа, имеет наименьшее значение, опять в предположении, что такой треугольник существует. При этом мы рассмотрим случай, когда числа l, m и n положительные.

Если точка D_1 (черт. 602) делит сторону EF искомого треугольника в отношении $ED_1 : D_1F = m : n$, то в силу п. 127 (сравнить, например, решение упр. 141) имеем:

$$m \cdot DF^2 + n \cdot DE^2 = (m + n) \cdot D_1D^2 + \frac{mn}{m + n} \cdot EF^2 \quad (3)$$

и

$$s = \left(l + \frac{mn}{m + n} \right) \cdot EF^2 + (m + n) \cdot D_1D^2. \quad (3')$$

Если бы прямая DD_1 не была перпендикулярна к стороне BC , то мы могли бы уменьшить s , оставив на месте точки E и F и заменив точку D основанием перпендикуляра из точки D_1 на сторону BC . Следовательно, прямая DD_1 , делящая сторону EF в отношении $ED_1 : D_1F = m : n$, должна быть перпендикулярна к стороне BC . Точно так же докажем, что прямая EE_1 , делящая сторону FD в отношении $FE_1 : E_1D = n : l$, должна быть перпендикулярна к стороне AC , а прямая FF_1 , делящая сторону DE в отношении $DF_1 : F_1E = l : m$, — перпендикулярна к стороне AB . Так как при этом $\frac{D_1E}{D_1F} \cdot \frac{E_1F}{E_1D} \cdot \frac{F_1D}{F_1E} = -1$, то перпендикуляры к сторонам треугольника ABC в вершинах D, E и F искомого треугольника проходят (в силу п. 198) через одну точку O и делят стороны EF, FD и DE треугольника DEF соответственно в отношениях $m : n, n : l$ и $l : m$.

Так как прямые DD_1, EE_1 и FF_1 , проходящие через одну точку O , делят стороны треугольника DEF в отношениях $ED_1 : D_1F = m : n; FE_1 : E_1D = n : l; DF_1 : F_1E = l : m$, то мы имеем (см. решение упр. 295)

пл. OFD : пл. $ODE = FD_1 : D_1E = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$, и аналогично пл. ODE : пл. $OEF = \frac{1}{n} : \frac{1}{l}$; пл. OEF : пл. $OFD = \frac{1}{l} : \frac{1}{m}$, откуда $l \cdot \text{пл. } OEF = m \cdot \text{пл. } OFD = n \cdot \text{пл. } ODE$. С другой стороны, найдём, как и выше, пл. OEF : пл. $ABC = (OE \cdot OF) : (AB \cdot AC)$; пл. OFD : пл. $ABC = (OF \cdot OD) : (AB \cdot BC)$; пл. ODE : пл. $ABC = (OD \cdot OE) : (BC \cdot AC)$. Отсюда

$$l \cdot \frac{OE}{AC} \cdot \frac{OF}{AB} = m \cdot \frac{OF}{AB} \cdot \frac{OD}{BC} = n \cdot \frac{OD}{BC} \cdot \frac{OE}{AC},$$

т. е.

$$\frac{OD}{l \cdot BC} = \frac{OE}{m \cdot AC} = \frac{OF}{n \cdot AB}. \quad (4)$$

Итак, расстояния точки O от сторон данного треугольника пропорциональны произведениям $l \cdot BC$, $m \cdot AC$ и $n \cdot AB$. Тем самым определяется (п. 157, построение 10) положение точки O , а следовательно, и положение точек D , E и F — оснований перпендикуляров из точки O на стороны треугольника.

Рассмотрим теперь вкратце случай, когда коэффициенты l , m и n имеют произвольные знаки, причём разберём отдельно следующие предположения: 1) $m+n > 0$, $n+l > 0$, $l+m > 0$; 2) $m+n < 0$, $n+l < 0$, $l+m < 0$; 3) среди сумм $m+n$, $n+l$, $l+m$ имеются как положительные, так и отрицательные, но ни одна из них не равна нулю; 4) одна из сумм $m+n$, $n+l$ и $l+m$ равна нулю.

1°. Пусть коэффициенты l , m и n имеют произвольные знаки, но $m+n > 0$, $n+l > 0$, $l+m > 0$. Разделим стороны искомого треугольника DEF (черт. 602) так, чтобы имели место по величине и по знаку равенства $ED_1 : D_1F = m : n$; $FE_1 : E_1D = n : l$; $DF_1 : F_1E = l : m$. В силу упражнения 218 будем иметь, как и выше, пользуясь равенством (3'):

$$s = l \cdot EF^2 + m \cdot DF^2 + n \cdot DE^2 = \left(l + \frac{mn}{m+n} \right) \cdot EF^2 + (m+n) \cdot D_1D^2 = \left(m + \frac{nl}{n+l} \right) \cdot FD^2 + (n+l) \cdot E_1E^2 = \left(n + \frac{lm}{l+m} \right) \cdot DE^2 + (l+m) \cdot F_1F^2. \quad (5)$$

Так как $m+n > 0$, $n+l > 0$ и $l+m > 0$, то сохраняют силу предыдущие рассуждения, если только площадям треугольников и расстояниям точки от сторон треугольника приписывать определённые знаки, как указано в решениях упражнения 301 и задачи 324. Наименьшее значение s получается для точки O , определяемой опять равенствами (4).

2°. Если $m+n < 0$, $n+l < 0$ и $l+m < 0$, то рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, показывают, что для точки O , определяемой равенствами (4), величина s достигает не наименьшего, а наибольшего значения, так как из равенств (5) следует, что в этом случае величина s возрастает, если при неизменных точках E и F величина D_1D уменьшается (в силу $m+n < 0$), и т. д.

3°. Если среди величин $m+n$, $n+l$ и $l+m$ имеются как положительные, так и отрицательные, то величина s не имеет ни для какого треугольника DEF ни наибольшего, ни наименьшего значения. В самом деле, пусть для определённости $m+n > 0$ и $n+l < 0$. В таком случае из фор-

мул (5) следует, что можно увеличить s , оставляя на месте точки E и F , удаляя точку D от основания перпендикуляра, опущенного из точки D_1 на сторону BC . С другой стороны, можно и уменьшить s , оставляя на месте точки D и F и перемещая точку E .

4° Остаётся ещё рассмотреть случай, когда среди сумм $m+n$, $n+l$ и $l+m$ есть равные нулю. Пусть для определённости $m+n=0$. Обозначив через DH высоту треугольника DEF (черт. 602), будем иметь $s = l \cdot EF^2 + m \cdot (DF^2 - DE^2) = l \cdot EF^2 + m \cdot (EF^2 \pm 2 EF \cdot EH)$. Отсюда видно, что, не изменяя положения точек E и F , можно придать величине s любые значения, выбирая соответствующим образом точку H , т. е. точку D . Итак, в этом последнем случае величина s не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значения ни для какого треугольника DEF .

Резюмируя всё сказанное, приходим к следующему окончательному выводу:

Если все три суммы $m+n$, $n+l$ и $l+m$ положительны (отрицательны), то вершины треугольника DEF , для которого величина $s = l \cdot BC^2 + m \cdot AC^2 + n \cdot AB^2$ имеет наименьшее (наибольшее) значение, получают следующим построением: определяем точку O , расстояния которой от сторон треугольника пропорциональны произведениям $l \cdot BC$, $m \cdot AC$ и $n \cdot AB$, и из точки O опускаем перпендикуляры на стороны треугольника. Если среди сумм $m+n$, $n+l$ и $l+m$ есть суммы, равные нулю или имеющие противоположные знаки, то величина s не достигает ни для какого вписанного треугольника ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Примечание. Приведённое только что решение в случае, когда $m+n$, $n+l$ и $l+m$ имеют одинаковые знаки, существенно основано на предположении, что среди всех вписанных треугольников имеется треугольник, для которого величина s имеет наименьшее (или наибольшее) значение. Если даже считать очевидным, что для вписанного треугольника величина s не может принимать сколь угодно малых значений, а остаётся большей некоторого числа, то и тогда мы ещё не можем быть уверены в существовании вписанного треугольника, для которого s имеет наименьшее значение. В самом деле, логически мыслимо такое положение вещей, что среди вписанных треугольников имеются треугольники, для которых величина s имеет значения, большие некоторого числа s_0 и сколь угодно близкие к s_0 , но не существует треугольников, для которых s равно или меньше s_0 .

Приводим поэтому второе решение, в котором существование треугольника с наименьшим значением s не предполагается. При этом мы ограничимся случаем положительных коэффициентов l , m и n .

Второе решение. Будем исходить из тождества

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2, \quad (6)$$

имеющего место для любых шести чисел a , b , c , x , y и z . Если под a , b и c понимать длины сторон данного треугольника, под x , y и z — расстояния произвольной точки O плоскости от его сторон, то мы будем иметь (сравнить решение упр. 301) $ax + by + cz = 2S$, где S — площадь данного треугольника. Предыдущее равенство принимает вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

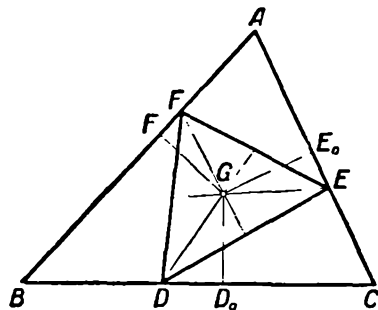
Отсюда непосредственно следует, что сумма квадратов расстояний некоторой точки O от сторон данного треугольника имеет наимень-

шее значение при условии, что каждая из скобок в правой части равна нулю, т. е. при $x:y:z=a:b:c$; следовательно, точка O совпадает с определённой в задаче 365 точкой O' .

Пусть теперь DEF (черт. 603) — произвольный треугольник, вписанный в данный треугольник, и G — центр его тяжести. Мы имеем, как и выше в равенстве (2),

$$EF^2 + FD^2 + DE^2 = 3(GD^2 + GE^2 + GF^2). \quad (7)$$

Если обозначить через D_0 , E_0 и F_0 основания перпендикуляров из точки G на стороны данного треугольника, то $GD^2 = GD_0^2 + D_0D^2$, и т. д. Следовательно, $s = EF^2 + FD^2 + DE^2 = 3(GD_0^2 + GE_0^2 + GF_0^2) + 3(D_0D^2 + E_0E^2 + F_0F^2)$. Отсюда непосредственно видно, что s имеет наименьшее значение, когда точка G совпадает с точкой O' , а треугольник DEF — с треугольником PQR из задачи 365, так как в этом случае сумма $GD_0^2 + GE_0^2 + GF_0^2$ имеет, по доказанному, наименьшее возможное значение, а $D_0D = E_0E = F_0F = 0$ (в силу упр. 365, 3°).



Черт. 603.

Переходя к отысканию наименьшего значения выражения $s = l \cdot EF^2 + m \cdot FD^2 + n \cdot DE^2$, где l , m и n — данные положительные числа, мы рассмотрим следующее обобщение тождества (6):

$$(la^2 + mb^2 + nc^2) \left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} \right) = (ax + by + cz)^2 + \frac{l(mbz - ncy)^2 + m(ncx - laz)^2 + n(lay - mbx)^2}{lmn}. \quad (8)$$

Это тождество можно получить из (6) путём замены a , b , c , x , y и z соответственно через $a\sqrt{l}$, $b\sqrt{m}$, $c\sqrt{n}$, $\frac{x}{\sqrt{l}}$, $\frac{y}{\sqrt{m}}$ и $\frac{z}{\sqrt{n}}$.

С помощью тождества (8), подобно тому, как и выше, убеждаемся, что величина $\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}$ достигает наименьшего значения при условии, что каждая из скобок во втором слагаемом правой части равенства (8) равна нулю, т. е. при условии:

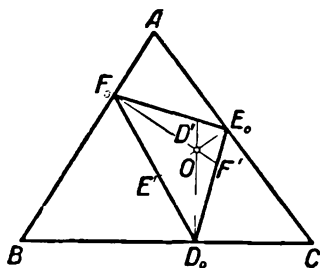
$$x:y:z = la:mb:nc. \quad (9)$$

Опуская теперь из найденной точки O , удовлетворяющей условиям (9), перпендикуляры OD_0 , OE_0 и OF_0 на стороны треугольника ABC (черт. 604), мы и получим, как будет видно из дальнейшего, искомый треугольник $D_0E_0F_0$. Обозначим через D' , E' и F' точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами E_0F_0 , F_0D_0 и D_0E_0 треугольника

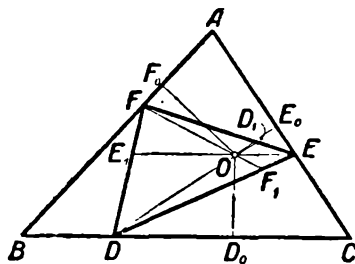
$D_0E_0F_0$. В силу п. 256 имеем пл. OE_0F_0 :пл. $ABC = (OE_0 \cdot OF_0):(AB \cdot AC) = = uz:bc$; пл. OF_0D_0 :пл. $ABC = zx:ca$; пл. OD_0E_0 :пл. $ABC = xy:ab$.

Отсюда пл. OE_0F_0 :пл. OF_0D_0 :пл. $OD_0E_0 = \frac{a}{x}:\frac{b}{y}:\frac{c}{z} = \frac{1}{l}:\frac{1}{m}:\frac{1}{n}$. Следовательно, $E_0D':D'F_0$ =пл. OD_0E_0 :пл. $OF_0D_0 = m:n$, где D' — точка пересечения прямых E_0F_0 и OD_0 (см. решение упр. 295). Аналогично $F_0E':E'D_0 = n:l$; $D_0F':F'E_0 = l:m$. Итак, если из точки O , удовлетворяющей условиям (9), опустить перпендикуляры OD_0 , OE_0 и OF_0 на стороны треугольника ABC , то эти перпендикуляры разделяют стороны треугольника $D_0E_0F_0$ соответственно в отношениях $m:n$, $n:l$ и $l:m$.

Впишем теперь в данный треугольник ABC произвольный треугольник DEF (черт. 605) и разделим стороны последнего прямыми DD_1 ,



Черт. 604.



Черт. 605.

EE_1 и FF_1 в отношениях $ED_1:D_1F = m:n$; $FE_1:E_1D = n:l$; $DF_1:F_1E = l:m$. Прямые DD_1 , EE_1 и FF_1 пройдут через одну точку O (п. 198). При этом мы будем иметь $\frac{D_1E}{D_1F} \cdot \frac{E_1F}{E_1D} \cdot \frac{F_1D}{F_1E} = -1$,

или $\frac{DE_1}{E_1F} = \frac{D_1E}{D_1F} \cdot \frac{F_1D}{F_1E}$. Так как стороны треугольника EDD_1 (или их продолжения) пересекаются с прямой FF_1 в точках O , F и F_1 ,

то мы будем иметь (согласно п. 192) $\frac{OD}{OD_1} \cdot \frac{FD_1}{FE} \cdot \frac{F_1E}{F_1D} = 1$, откуда

$$\frac{DO}{OD_1} = \frac{DF_1}{F_1E} \cdot \frac{FE}{FD_1} = \frac{DF_1}{F_1E} \cdot \frac{FD_1 + D_1E}{FD_1} = \frac{DF_1}{F_1E} + \frac{D_1E}{D_1F} \cdot \frac{F_1D}{F_1E}.$$

Заменяя здесь последний член равной ему величиной $\frac{DE_1}{E_1F}$, получим:

$$\frac{DO}{OD_1} = \frac{DF_1}{F_1E} + \frac{DE_1}{E_1F} = \frac{l}{m} + \frac{l}{n} = \frac{l(m+n)}{mn}. \quad (10)$$

Отсюда

$$OD_1 = \frac{mn}{l(m+n)} \cdot DO; \quad DD_1 = DO + OD_1 = \frac{mn + nl + lm}{l(m+n)} \cdot DO. \quad (11)$$

Применим теперь, как и при первом способе решения настоящей задачи (сравнить равенство (3)), теорему Стюарта (п. 127) к треугольнику DEF и отрезку DD_1 . Мы получим:

$$(m+n) \cdot D_1 D^2 = m \cdot DF^2 + n \cdot DE^2 - \frac{mn}{m+n} EF^2. \quad (12)$$

Применяя ту же теорему к треугольнику OEF и отрезку OD_1 , найдём аналогично:

$$(m+n) \cdot OD_1^2 = m \cdot OF^2 + n \cdot OE^2 - \frac{mn}{m+n} EF^2. \quad (13)$$

Заменяя в равенствах (12) и (13) DD_1 и OD_1 их значениями (11), будем иметь:

$$\frac{(mn + nl + lm)^2}{l^2(m+n)} \cdot OD^2 = m \cdot DF^2 + n \cdot DE^2 - \frac{mn}{m+n} EF^2; \quad (14)$$

$$\frac{m^2 n^2}{l^2(m+n)} \cdot OD^2 = m \cdot OF^2 + n \cdot OE^2 - \frac{mn}{m+n} EF^2. \quad (15)$$

Наконец, умножая все члены равенства (15) на $\frac{mn + nl + lm}{mn}$ и вычитая из полученного равенства почленно равенство (14), получим после алгебраических преобразований равенство

$$l \cdot EF^2 + m \cdot FD^2 + n \cdot DE^2 = (mn + nl + lm) \cdot \left(\frac{OD^2}{l} + \frac{OE^2}{m} + \frac{OF^2}{n} \right). \quad (16)$$

Равенство (16) является обобщением равенства (7); последнее получается из равенства (16) при $l = m = n = 1$.

Опустим из точки O перпендикуляры OD_0 , OE_0 и OF_0 на стороны треугольника ABC и заменим в равенстве (16) OD^2 через $OD_0^2 + D_0 D^2$, и т. д. Окончательно будем иметь $s = l \cdot EF^2 + m \cdot FD^2 + n \cdot DE^2 = (mn + nl + lm) \left[\left(\frac{OD_0^2}{l} + \frac{OE_0^2}{m} + \frac{OF_0^2}{n} \right) + \left(\frac{D_0 D^2}{l} + \frac{E_0 E^2}{m} + \frac{F_0 F^2}{n} \right) \right]$. Из этого равенства непосредственно видно, что

величина s имеет наименьшее значение, если точка O удовлетворяет условиям (9), так как при этом, по доказанному, величина $\frac{OD_0^2}{l} + \frac{OE_0^2}{m} + \frac{OF_0^2}{n}$ имеет наименьшее значение и $D_0 D = E_0 E = F_0 F = 0$ в силу того, что прямые OD , OE и OF совпадают с перпендикулярами к сторонам треугольника ABC .

367. Первое решение. Предположим, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, есть треугольник ABC (черт. 606), для которого сумма $s = l \cdot BC^2 + m \cdot AC^2 + n \cdot AB^2$, где l , m и n — данные положительные числа, имеет наибольшее значение.

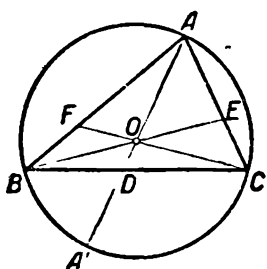
Будем для определённости предполагать, что

$$l \leq m \leq n. \quad (1)$$

Если точка D делит сторону BC (внутренним образом) в отношении $BD:DC=m:n$, то мы имеем (п. 127) в силу теоремы Стюарта (как и в решении задачи 366, формула (3)): $m \cdot AC^2 + n \cdot AB^2 = (m+n) \cdot AD^2 + \frac{mn}{m+n} \cdot BC^2$. Отсюда

$$s = \left(l + \frac{mn}{m+n} \right) \cdot BC^2 + (m+n) \cdot AD^2. \quad (2)$$

Величина s имеет при данных точках B и C (и, следовательно, при определённом положении точки D) наибольшее значение, если



Черт. 606.

расстояние AD будет наибольшим из возможных. Но наибольшим расстоянием от данной точки D до точки окружности служит (п. 64) больший отрезок диаметра, проходящего через точку D . Итак, диаметр окружности, проходящий через точку A , делит сторону BC в отношении $m:n$. Аналогичным свойством должны обладать и диаметры, проходящие через точки B и C : диаметр, проходящий через B , делит сторону CA в отношении $CE:EA=n:l$; диаметр, проходящий через C , делит AB в отношении $AF:FB=l:m$.

Повторяя теперь для треугольника ABC и прямых AD , BE и CF , проходящих через одну точку, в точности те же выкладки, которые привели нас в решении задачи 366 к формуле (10), получим вполне аналогичное соотношение

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{l}{m} + \frac{l}{n} = \frac{l(m+n)}{mn}. \quad (3)$$

Отсюда

$$AD = AO + OD = \frac{mn + nl + lm}{l(m+n)} \cdot AO = \frac{mn + nl + lm}{l(m+n)} R, \quad (4)$$

где R — радиус данной окружности. Равенства (3) или (4) определяют положение точки D на прямой AO .

Далее через точку D требуется провести хорду BC , которая делилась бы в точке D в отношении $BD:DC=m:n$. Это последнее построение можно выполнить аналогично решению упражнения 165; надо только предположить, что обе данные там окружности совпадают между собой. Таким образом строится искомый треугольник ABC .

Чтобы построение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы определяемая условием (3) точка D лежала внутри окружности и чтобы через эту точку можно было провести хорду BC , которая делилась бы в точке D в отношении $m:n$. Точка D будет, как это

видно из равенства (3), лежать внутри окружности, если $\frac{l}{m} + \frac{l}{n} > 1$, т. е. если

$$\frac{1}{l} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Через точку D можно провести хорду, которая делится в этой точке в отношении $m:n$, если $\frac{DA'}{AD} < \frac{m}{n} < \frac{AD}{DA'}$ (так как отрезки AD и $A'D$ представляют собой наибольшее и наименьшее расстояния от точки D до точек окружности), где A' — точка, диаметрально противоположная точке A , т. е. если $\frac{2R-AD}{AD} < \frac{m}{n} < \frac{AD}{2R-AD}$. Заменяя здесь AD его выражением (4), получим $\frac{-mn + nl + lm}{mn + nl + lm} < \frac{m}{n} < \frac{mn + nl + lm}{-mn + nl + lm}$. Преобразуя эти неравенства, будем иметь $\frac{1}{m} < \frac{1}{l} + \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n} < \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$. Эти неравенства будут выполняться сами собой, если обозначения коэффициентов l , m и n выбрать так, чтобы выполнялись условия (1).

Итак, если обозначения коэффициентов l , m и n выбрать так, чтобы выполнялись условия (1), то единственное необходимое и достаточное условие возможности построения треугольника ABC выражается неравенством (5).

Истолковывая неравенство (5) геометрически, приходим к следующему окончательному результату: *треугольник ABC , для которого величина s имеет наибольшее значение, существует только при условии, что можно построить треугольник, стороны которого пропорциональны $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, т.е. высоты которого пропорциональны l , m и n .*

Примечание. В приведённом решении мы предполагали, что треугольник, для которого s имеет наибольшее значение, существует. По поводу этого допущения можно было бы повторить сказанное в примечании к первому решению задачи 366.

И действительно, в процессе решения выяснилось, что искомый треугольник существует не при всех значениях l , m и n . Проводим поэтому второе решение, в котором существование искомого треугольника уже не предполагается.

Второе решение. Предположим опять, что l , m и n — положительные числа и

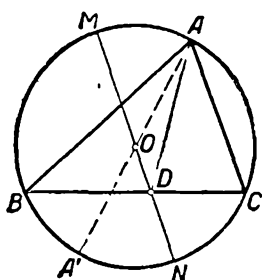
$$l \leq m \leq n. \quad (1)$$

Пусть ABC — произвольный треугольник, вписанный в данную окружность (черт. 607). Разделим его сторону BC точкой D в отношении $BD:DC = m:n$. Как и в первом решении, будем иметь формулу (2). Проведя через точку D диаметр MN (пусть при этом для опре-

делённости $MD \geq DN$), будем иметь $BD \cdot DC = MD \cdot (2R - MD)$. С другой стороны, $BD = \frac{m}{m+n} \cdot BC$ и $DC = \frac{n}{m+n} \cdot BC$, откуда $BD \cdot DC = \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot BC^2$ и $BC^2 = \frac{(m+n)^2}{mn} \cdot MD \cdot (2R - MD)$. Подставляя это значение в формулу (2), будем иметь

$$s = \left[\frac{l(m+n)^2}{mn} + (m+n) \right] \cdot MD \cdot (2R - MD) + (m+n) \cdot AD^2.$$

Это выражение для s можно представить в виде $s = \left[\frac{l(m+n)^2}{mn} + \right.$



Черт. 607.

$\left. + (m+n) \right] \cdot 2R \cdot MD - \frac{l(m+n)^2}{mn} \cdot MD^2 + (m+n) \cdot AD^2 - (m+n) \cdot MD^2$ или, после замены $\frac{l(m+n)^2}{mn} + (m+n)$ равным ему выражением $\frac{(m+n)(mn + nl + lm)}{mn}$ и группиров-

ки членов, в виде $s = \frac{m+n}{mn} \cdot [2(mn + nl + lm)R \cdot MD - l(m+n) \cdot MD^2] + (m+n) \cdot (AD^2 - MD^2)$.

Из этого выражения видно, что s достигает наибольшего значения, если выполнены следующие условия:

1) точка A совпадает с M (так как в противном случае $AD < MD$);

2) функция

$$y = 2(mn + nl + lm) \cdot R \cdot MD - l(m+n) \cdot MD^2 \quad (6)$$

достигает наибольшего значения.

Но функция y , определяемая равенством (6), достигает (как это следует из свойств функции $y = Ax^2 + Bx + C$ при $A < 0$) наибольшего значения при

$$MD = \frac{mn + nl + lm}{l(m+n)} R, \quad (7)$$

возрастает при значениях MD , меньших этого значения, и убывает при значениях MD , больших того же значения. Получили то же положение точки D , что и в первом решении [см. формулу (4)].

Если точка D , определяемая условием (7), окажется внутри данной окружности, а это будет иметь место при

$$\frac{mn + nl + lm}{l(m+n)} R < 2R,$$

т. е. при

$$\frac{1}{l} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad (5)$$

то s достигает в этой точке своего наибольшего значения. Возможность провести через эту точку D хорду BC , которая делилась бы точкой D в отношении $m:n$, требует, чтобы имели место неравенства $\frac{DN}{MD} < \frac{m}{n} < \frac{MD}{DN}$. Как и при первом решении задачи, эти неравенства будут выполнены в силу предположения (1). Мы получим при этом тот треугольник ABC , о котором шла речь в первом решении.

Если же точка D , соответствующая максимуму функции u и определяемая равенством (7), будет лежать на окружности или вне её, то наибольшее значение s будет получаться при наибольшем допустимом значении MD , т. е. при $MD = 2R$. Итак, величина s принимает наибольшее значение при условии, что треугольник вырождается в дважды взятый диаметр окружности.

До сих пор мы рассматривали случай, когда l, m и n — положительные числа. Случай, когда некоторые из коэффициентов l, m и n отрицательны, сводится к случаю положительных коэффициентов.

В самом деле, пусть два из коэффициентов, скажем m и n , отрицательны. В таком случае, обозначая через A' точку, диаметрально противоположную точке A (черт. 607), будем иметь $s = l \cdot BC^2 + m \cdot AC^2 + n \cdot AB^2 = l \cdot BC^2 + + m(4R^2 - A'C^2) + n(4R^2 - A'B^2) = l \cdot BC^2 - m \cdot A'C^2 - n \cdot A'B^2 + 4(m+n)R^2$, и дело сводится к отысканию треугольника $A'BC$, которому соответствуют положительные коэффициенты $l, -m, -n$, так как постоянный член $4(m+n)R^2$ роли не играет.

Если среди коэффициентов l, m и n отрицательных окажется один или три, то мы рассмотрим вместо s величину $s' = -s = -l \cdot BC^2 - m \cdot AC^2 - - n \cdot AB^2$. При этом *наибольшему* значению s' будет соответствовать уже *наименьшее* значение s . Наибольшее же значение величины s' найдётся, как указано выше, так как среди коэффициентов $-l, -m$ и $-n$ отрицательных будет либо два, либо ни одного.

368. Пусть существует точка D , расстояния которой от вершин данного треугольника пропорциональны трём данным числам. Примем точку D за полюс инверсии и выберем произвольно степень последней. Точки A, B и C преобразуются при этом в точки A', B' и C' , причём $B'C':C'A':A'B' = (DA \cdot BC):(DB \cdot CA):(DC \cdot AB)$ (п. 218, сравнить решение упр. 270, 1°), т. е. $B'C':C'A':A'B' = (m \cdot BC):(n \cdot CA):(p \cdot AB)$. Таким образом, указанное в тексте условие необходимо.

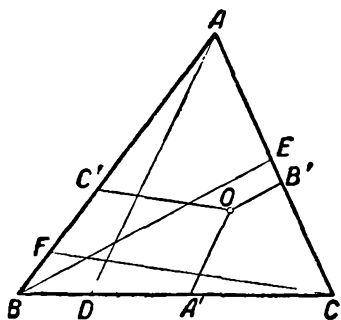
Обратно, пусть существует треугольник $A'B'C'$, стороны которого пропорциональны $m \cdot BC, n \cdot CA, p \cdot AB$. Пусть D — полюс инверсии, преобразующей точки A', B' и C' в вершины данного (по своей форме и величине) треугольника ABC (существование такой инверсии следует из упражнения 270а). Расстояния DA, DB и DC удовлетворяют условиям $B'C':C'A':A'B' = (DA \cdot BC):(DB \cdot CA):(DC \cdot AB)$. Так как по предположению имеем $B'C':C'A':A'B' = (m \cdot BC):(n \cdot CA):(p \cdot AB)$, то $DA:DB:DC = m:n:p$. Приведённое условие является и достаточным.

369. Пусть $AD = BE = CF$, прямая OA' параллельна AD , OB' параллельна BE и OC' параллельна CF (черт. 608). Если x, y и z — расстояния точки O от сторон BC, CA и AB треугольника, h, k

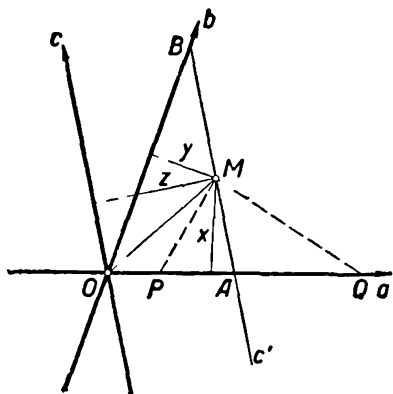
и l — высоты, опущенные из вершин A, B, C треугольника, то в силу упражнения 301 будем иметь $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1$.

С другой стороны, очевидно, $x:h = OA':AD$; $y:k = OB':BE$; $z:l = OC':CF$. Отсюда $\frac{OA'}{AD} + \frac{OB'}{BE} + \frac{OC'}{CF} = 1$. В силу равенств $AD = BE = CF$ отсюда следует, что $OA' + OB' + OC' = AD$.

370. Пусть a, b и c — три прямые, проходящие через одну точку O (черт. 609), и x, y, z — расстояния произвольной точки M от этих прямых. Проведём через M прямую c' , параллельную c , и



Черт. 608.



Черт. 609.

обозначим через A и B точки её пересечения с прямыми a и b .

Имеем $\text{пл.} OAB = \frac{1}{2} AB \cdot z = \frac{1}{2} (\pm AM \pm MB) \cdot z = \pm \frac{1}{2} AM \cdot z \pm \pm \frac{1}{2} BM \cdot z = \pm \text{пл.} OAM \pm \text{пл.} OMB = \pm \frac{1}{2} OA \cdot x \pm \frac{1}{2} OB \cdot y$. От-

сюда $z = \pm \frac{OA}{AB} \cdot x \pm \frac{OB}{AB} \cdot y$. Коэффициенты $OA:AB$ и $OB:AB$ в этом равенстве не зависят, очевидно, от положения точки M на плоскости.

Чтобы сформулировать результат так, чтобы он совершенно не зависел от положения точки M , будем считать площадь произвольного треугольника положительной или отрицательной в зависимости от направления вращения (как указано в решении задачи 324). Далее выберем на каждой из прямых a, b и c положительное направление и будем приписывать отрезкам, лежащим на этих прямых, определённые знаки. На прямой AB , параллельной c , выбираем то же положительное направление, что и на c . Чтобы площадь треугольника MPQ с вершиной в произвольной точке M плоскости и основанием PQ на прямой a выражалась по величине и по знаку равенством $\text{пл.} MPQ =$

$= \frac{1}{2} x \cdot PQ$, мы должны приписать определённый знак не только отрезку PQ , но и расстоянию x точки M от прямой a . А именно, расстояние x мы должны считать положительным, если для наблюдателя, находящегося в точке M , положительное направление прямой a кажется идущим справа налево, и отрицательным — в противном случае. Аналогично определим знаки расстояний y и z (например, на черт. 609 имеем $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$).

При этом будем иметь по абсолютной величине и по знаку: $\text{пл.}OAB = \frac{1}{2} AB \cdot z = \frac{1}{2} (AM + MB) \cdot z = \frac{1}{2} AM \cdot z + \frac{1}{2} MB \cdot z =$
 $= \text{пл.}OAM + \text{пл.}OMB = \frac{1}{2} OA \cdot x - \frac{1}{2} OB \cdot y$. При перемещении точки M по плоскости отношения $AB:OA:OB$ будут сохранять постоянные абсолютные величины и постоянные знаки.

Обратно, если мы имеем выражение $mx + ny$, где m и n — данные положительные или отрицательные коэффициенты, а x и y — расстояния от некоторой точки до данных прямых, то отложим отрезки OA и OB так, чтобы имело место по величине и по знаку равенство $OA:(-OB) = m:n$, и проведём через точку O прямую c параллельно AB . В силу прямой теоремы будем иметь $AB \cdot z = OA \cdot x - OB \cdot y$, так что выражение $mx + ny$ будет пропорционально расстоянию точки M от прямой c .

371. Пусть a_1, a_2, \dots — данные прямые, на каждой из которых выбрано определённое направление; x_1, x_2, \dots — расстояния произвольной точки от этих прямых, взятые с надлежащими знаками, как указано в решении задачи 370; a_0, a_1, a_2, \dots — данные положительные или отрицательные числа.

Пусть требуется найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных пересекающихся прямых удовлетворяют условию

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0. \quad (1)$$

На основании обратной теоремы задачи 370 имеем $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \beta y$, где β — некоторый коэффициент, y — расстояние точки от некоторой прямой. В силу этого равенства условие (1) принимает вид $y = \frac{a_0}{\beta} = \text{const}$, и искомое геометрическое место есть прямая линия.

Найдём теперь геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных *параллельных* и одинаково направленных прямых a_1 и a_2 удовлетворяют тому же условию $a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0$. Если через x обозначить расстояние от произвольной точки первой прямой до второй прямой, то мы будем иметь для любой точки плоскости (черт. 610) $x_2 = x_1 + x$, откуда для точек, удовлетворяющих условию (1), имеем $(a_1 + a_2) x_1 = a_0 - a_2 x$, т. е. $x_1 = \frac{a_0 - a_2 x}{a_1 + a_2} = \text{const}$

M и N (сравнить п. 194). Так как L — середина отрезка AB , то мы имеем (по абсолютной величине и знаку) пл. $CAL + \text{пл. } CBL = 0$. Точно так же пл. $DAL + \text{пл. } DBL = 0$. Отсюда

$$\text{пл. } ACL + \text{пл. } BCL + \text{пл. } ADL + \text{пл. } BDL = 0. \quad (3)$$

Таким же путём найдём, что пл. $ACM + \text{пл. } ADM = 0$; пл. $BCM + \text{пл. } BDM = 0$ и

$$\text{пл. } ACM + \text{пл. } BCM + \text{пл. } ADM + \text{пл. } BDM = 0. \quad (4)$$

Далее имеем пл. $AEN + \text{пл. } AFN = 0$; пл. $BEN + \text{пл. } BFN = 0$; пл. $CEN + \text{пл. } CFN = 0$; пл. $DEN + \text{пл. } DFN = 0$. Отсюда, складывая по-членно первые два из этих равенств и вычитая два последних, получим (пл. $AFN - \text{пл. } CFN) + (\text{пл. } BEN - \text{пл. } CEN) + (\text{пл. } AEN - \text{пл. } DEN) + (\text{пл. } BFN - \text{пл. } DFN) = 0$. Но пл. $AFN - \text{пл. } CFN = \text{пл. } AFN + \text{пл. } FCN = \text{пл. } ACN$ и т. д., и предыдущее равенство принимает вид:

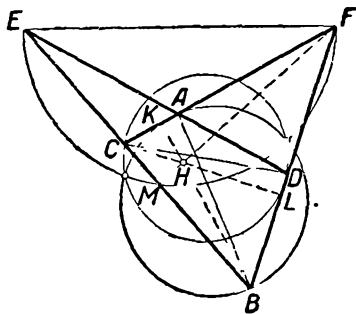
$$\text{пл. } ACN + \text{пл. } BCN + \text{пл. } ADN + \text{пл. } BDN = 0. \quad (5)$$

Равенства (3), (4) и (5) показывают, что точки L , M и N принадлежат геометрическому месту точек X , для которых имеет место равенство

$$\text{пл. } ACX + \text{пл. } BCX + \text{пл. } ADX + \text{пл. } BDX = 0. \quad (6)$$

Но это геометрическое место есть по предыдущему прямая линия [сравнить равенство (2')].

Примечание. Чтобы последнее заключение было вполне обосновано, надо ещё показать, что равенство (6) не выполняется для всех точек плоскости. Но если это равенство выполняется для точек A и C , то мы имеем пл. $BCA + \text{пл. } BDA = 0$; пл. $ADC + \text{пл. } BDC = 0$. Отсюда легко вывести, что четырёхугольник $ACBD$ есть параллелограм, и вопрос теряет смысл. Итак, равенство (6) определяет прямую линию.



Черт. 612.

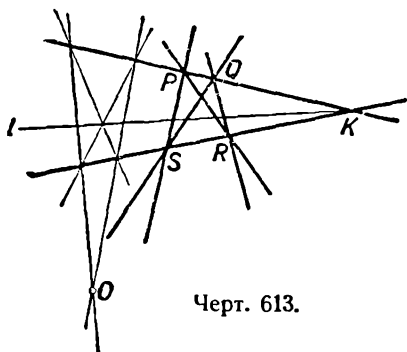
371а. Пусть AB , CD и EF (черт. 612) — диагонали полного четырёхсторонника, H — точка пересечения высот BK , CL и FM треугольника BCF , образованного тремя из четырёх сторон данного полного четырёхсторонника. Так как прямая BK перпендикулярна к FC , а CL — к BF , то точки B , C , K и L лежат на одной окружности, откуда $HB \cdot HK = HC \cdot HL$. Так как по той же причине точка K лежит на окружности, имеющей AB своим диаметром, а точка L — на окружности, имеющей CD своим диаметром, то равенство $HB \cdot HK = HC \cdot HL$ показывает, что точка H имеет относительно обеих окружностей одну и ту же степень. Таким же образом получим $HB \cdot HK = HF \cdot HM$, откуда будет следовать, что точ-

ка H имеет ту же самую степень и относительно окружности, имеющей своим диаметром EF .

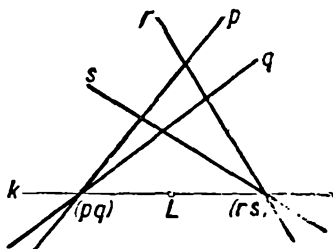
Итак, точка H имеет относительно всех трёх окружностей одну и ту же степень. По той же причине и точка пересечения высот любого из треугольников BDE , ACE и ADF будет иметь относительно всех трёх окружностей одну и ту же степень. Отсюда следует, что все эти четыре точки лежат на одной прямой — общей радикальной оси трёх окружностей.

372. Пусть $PQRS$ — данный четырёхугольник (черт. 613), K — точка пересечения прямых PQ и RS , l — поляра точки O относительно угла PKS (п. 203).

Преобразуя четырёхугольник $PQRS$ вместе с его диагоналями взаимными полярами относительно какой-либо окружности с центром O ,



Черт. 613.



Черт. 614.

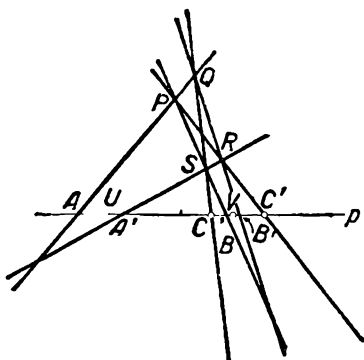
получим полный четырёхсторонник $pqrs$ (черт. 614). Четырём прямым PQ , RS , OK и l , проходящим через точку K , соответствуют четыре точки (pq) , (rs) , (ok) и L , лежащие на диагонали k полного четырёхсторонника. Так как прямая OK проходит через центр направляющей окружности, то её полюс — точка (ok) — лежит в бесконечности (п. 204). Прямые PQ , RS , OK и l образуют гармоническую четвёрку; следовательно, и точки (pq) , (rs) , (ok) и L образуют гармоническую четвёрку. Но точка (ok) лежит в бесконечности, и потому точка L есть середина диагонали $(pq)(rs)$ полного четырёхсторонника.

Аналогично доказывается, что и поляры точки O относительно двух других углов преобразуются в середины двух других диагоналей полного четырёхсторонника $pqrs$. Так как середины трёх диагоналей полного четырёхсторонника лежат на одной прямой (п. 194 или задача 371), то их поляры относительно направляющей окружности, т. е. поляры точки O относительно трёх углов, о которых идёт речь, проходят через одну точку.

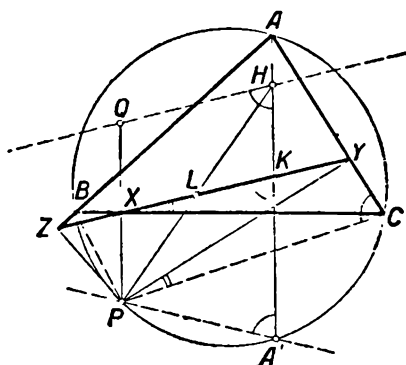
Пусть теперь в пересечении сторон и диагоналей полного четырёхугольника $PQRS$ (черт. 615) с некоторой прямой p образуются три таких

отрезка AA' , BB' и CC' , что существует (сравнить решение упр. 219а) отрезок UV , делящий гармонически как AA' , так и BB' . При этом в силу определения полярной точки относительно угла (п. 203) полярная точка U относительно пары прямых PQ и RS проходит через точку V , и то же имеет место для полярной точки U относительно пары прямых PS и QR ; в силу предыдущего и полярная точка U относительно третьей пары прямых PR и QS проходит через V . Поэтому отрезок UV делит гармонически и отрезок CC' .

373. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 616), H — точка пересечения его высот, X , Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности на его стороны. Точки X ,



Черт. 615.



Черт. 616.

Y и Z лежат на одной прямой в силу упражнения 72. Обозначим через A' точку, симметричную с точкой H относительно BC ; точка A' будет лежать в силу упражнения 70 на описанной окружности. Далее обозначим через Q точку, симметричную с точкой P относительно BC , через K и L — точки пересечения прямой XU с прямыми AA' и PH . Так как точки H и Q симметричны с A' и P относительно BC , то

$$\angle PA'H = \angle QHA'. \quad (1)$$

Точки P , C , X и Y лежат на одной окружности (потому что прямая PX перпендикулярна к XC , а PY — к YC), и потому $\angle CPY = \angle CXU$. Следовательно,

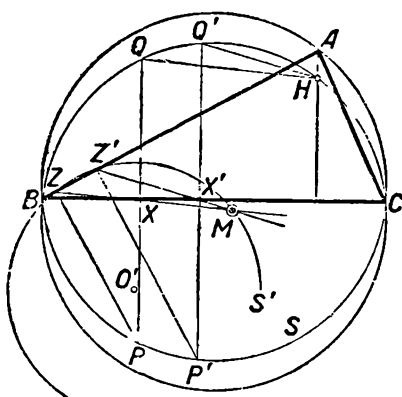
$$\angle PA'H = \angle PCA = 90^\circ - \angle CPY = 90^\circ - \angle CXU = \angle A'KH. \quad (2)$$

В силу равенств (1) и (2) углы $A'HQ$ и $A'KH$ равны, так что прямая HQ параллельна XU . Итак, точка Q , симметричная с точкой P относительно стороны BC данного треугольника, лежит на прямой, параллельной XU и проходящей через точку H ; очевидно, что то же имеет место и для точек, симметричных с P относительно прямых CA и AB .

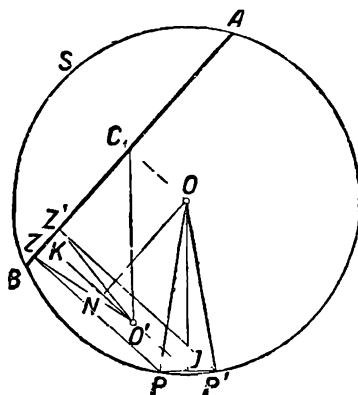
Так как в треугольнике PQH точка X есть середина стороны PQ и прямая XL параллельна HQ , то $PL = LH$.

Пусть теперь a, b, c, d — четыре произвольные прямые; P — точка пересечения четырёх окружностей, описанных около треугольников bcd , acd , abd и abc (задача 106). Основания перпендикуляров, опущенных из точки P на четыре данные прямые, лежат на одной прямой l (сравнить решение задачи 106, второе доказательство) — общей прямой Симсона четырёх треугольников. Следовательно, в силу только что доказанного, точки пересечения высот четырёх треугольников лежат на одной прямой, параллельной l и отстоящей от точки P на расстоянии вдвое большем, чем l .

374. Пусть Q и Q' — точки, симметричные с P и P' относительно стороны BC (черт. 617). Точки Q и Q' и точка пересечения H высот треугольника лежат на окружности, симметричной с описанной окружностью S относительно BC (упр. 70).



Черт. 617.



Черт. 618.

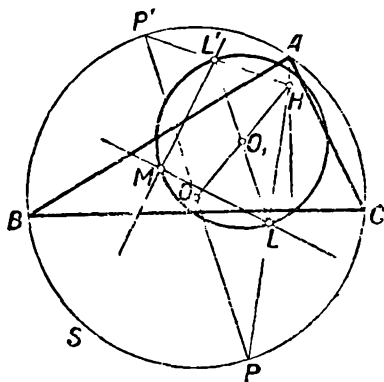
Прямая Симсона XZ , соответствующая точке P , параллельна прямой QH как средняя линия треугольника PQH (задача 373). Точно так же прямая $X'Z'$, соответствующая точке P' , параллельна $Q'H$. Отсюда следует, что угол $\angle ZMZ' = \angle QHQ'$ измеряется половиной дуги QQ' или, что то же, половиной дуги PP' .

Если точка C описывает окружность S , а точки A, B, P и P' неподвижны, то точки Z и Z' остаются на месте, и угол $\angle ZMZ'$ сохраняет постоянное значение. Следовательно, точка M описывает некоторую окружность S' , проходящую через точки Z и Z' .

Пусть теперь O и O' — центры окружностей S и S' (черт. 617 и 618). Так как угол $\angle ZMZ'$ измеряется половиной дуги PP' , то $\angle ZO'Z' = \angle POP'$. Если I и K — середины отрезков PP' и ZZ' , то $OI:O'K = PP':ZZ'$ в силу подобия треугольников OPP' и $O'ZZ'$. С другой стороны, если N — основание перпендикуляра из точки O на прямую IK , то, как легко показать, $OI:IN = PP':ZZ'$ (прямая OI перпендикулярна к PP' , а IN к ZZ'). Итак, имеем $IN = O'K$, так что $IO' = KN = C_1O$, где C_1 — середина AB , и, следовательно, $OI = C_1O'$.

Так как при перемещении точек P и P' , остающихся на постоянном расстоянии друг от друга, по окружности S (и неподвижных точках A и B) отрезок OI сохраняет постоянное значение, то и $O'C_1$ сохраняет постоянное значение. Геометрическое место центров O' окружностей S' есть окружность с центром C_1 и радиусом, равным OI .

Пусть, наконец, P и P' — две диаметрально противоположные точки окружности S , описанной около треугольника ABC (черт. 619). Обозначим через L и L' середины отрезков HP и HP' . Так как отрезок LL' равен половине диаметра описанной окружности и делится пополам в точке O_1 — середине отрезка OH , то LL' представляет собой (на основании задачи 101) один из диаметров окружности девяти точек треугольника ABC . Прямые Симсона, соответствующие точкам P и P' , проходят (в силу задачи 373) через точки L и L' и перпендикулярны между собой, так как угол между ними измеряется, по доказанному, половиной дуги PP' . Следовательно, геометрическое место точек их пересечения есть окружность девяти точек треугольника ABC .



Черт. 619.

375. Пусть O — центр данной окружности. H — данная точка пересечения высот вписанного треугольника ABC . Точка пересечения медиан G любого треугольника делит отрезок OH , имеющий своими концами центр описанной окружности и точку пересечения высот, в отношении $OG:GH=1:2$ (упр. 158). Следовательно, все треугольники, о которых идёт речь, имеют общую точку пересечения медиан G .

Так как медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 проходят через точку G и делятся в ней в отношении $AG:GA_1=BG:GB_1=CG:GC_1=2:1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на окружности, гомотетичной данной относительно точки G (коэффициент подобия равен $GA_1:GA=-1:2$).

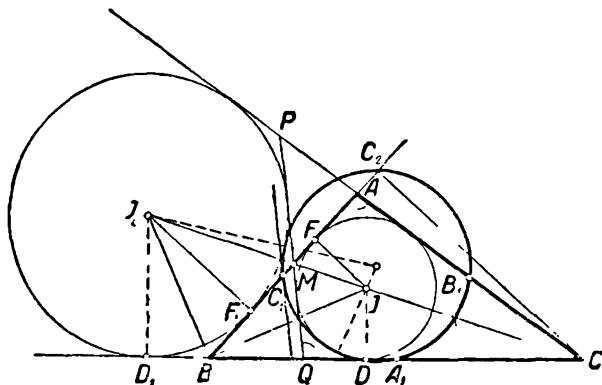
376. Пусть ABC — данный треугольник; A_1 , B_1 и C_1 — середины его сторон; I и I_c — центры вписанной и невписанной окружностей, лежащие на биссектрисе угла C ; F и F_1 — точки касания этих окружностей со стороной AB ; D и D_1 — точки их касания со стороной BC ; CC_2 — высота треугольника; M — точка пересечения внутренних общих касательных к окружностям I и I_c (черт. 620).

Так как в силу упражнения 90а $C_1F=C_1F_1$, то точка C_1 имеет одну и ту же степень относительно окружностей I и I_c . Её мы и примем за степень инверсии с полюсом C_1 .

Так как прямые BI и BI_c служат биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника BCM , то точки I и I_c делят гармонически отрезок CM (п. 115), а следовательно, и точки F и F_1 делят гармонически отрезок MC_2 . Поэтому на основании п. 189

имеем $C_1 F^2 = C_1 F_1^2 = C_1 M \cdot C_1 C_2$. Это равенство показывает, что точка C_2 преобразуется рассматриваемой инверсией в точку M , а окружность девяти точек — в прямую PQ , проходящую через точку M и параллельную касательной к окружности девяти точек в точке C_1 .

Покажем теперь, что касательная к окружности девяти точек в точке C_1 параллельна касательной к описанной окружности в точке C . В самом деле, так как отрезок $O_1 C_3$ (черт. 353) есть средняя линия треугольника $НОС$, то диаметр $C_1 C_3$ окружности девяти точек параллелен $ОС$, а касательная к окружности девяти точек в точке C_1 параллельна касательной к окружности ABC в точке C .



Черт. 620.

Отсюда следует, что касательная к окружности девяти точек в точке C_1 образует со стороной BC угол, равный углу A треугольника.

Итак, окружность девяти точек преобразуется рассматриваемой инверсией в прямую линию PQ (черт. 620), проходящую через точку M и образующую со стороной BC угол MQC , равный углу A данного треугольника. Иначе говоря, прямые AB и PQ образуют с биссектрисой угла C , т. е. с линией центров окружностей I и I_c , равные углы. Так как прямая AB есть внутренняя общая касательная этих окружностей, то PQ есть их вторая внутренняя общая касательная.

Как указано в тексте задачи, отсюда непосредственно вытекает, что окружность девяти точек, в которую рассматриваемая инверсия преобразует прямую PQ , касается вписанной окружности и внеписанной окружности I_c ; по той же причине она касается и остальных внеписанных окружностей.

377. Пусть O и I — центры окружностей, описанной около треугольника ABC и вписанной в него (черт. 621), K — точка пересечения перпендикуляра, восстановленного к стороне BC в её середине A_1 , с биссектрисой угла A (эта точка лежит на описанной окружности в силу задачи 103), L — основание перпендикуляра из точки I на прямую OK .

Из треугольника OIK на основании п. 126 имеем $d^2 = OI^2 = OK^2 + IK^2 - 2OK \cdot KL$. Но в силу задачи 103 $IK = BK$, а в силу п. 123, следствие, $IK^2 = BK^2 = 2R \cdot A_1K$. Следовательно, $d^2 = R^2 + 2R \cdot (A_1K - LK) = R^2 - 2R \cdot LA_1 = R^2 - 2Rr$.

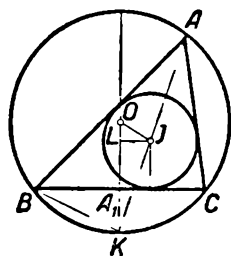
Переходим к доказательству обратной теоремы. Пусть даны две окружности O и I , удовлетворяющие условию $d^2 = R^2 - 2Rr$ (черт. 621). Отсюда следует, что $R > r$ и $d^2 < (R - r)^2$, т. е. $d < R - r$. Окружности O и I расположены одна внутри другой.

Выберем на окружности O произвольную точку A , проведём прямую AI и обозначим через K вторую точку её пересечения с окружностью O . Строим касательную BC к окружности I , перпендикулярную к OK и проходящую между точками I и K . Пусть A_1 — точка пересечения этой касательной с OK , и L — основание перпендикуляра из точки I на OK . Из треугольника OIK имеем $d^2 = R^2 + IK^2 - 2R \cdot KL$. Но по условию $d^2 = R^2 - 2Rr$. Из этих двух равенств находим $IK^2 = 2R(KL - r) = 2R \cdot KA_1 = KB^2$ (последнее равенство на основании п. 123, следствие), так что $IK = KB$.

Если мы соединим теперь точку A с точками B и C , то в силу равенства дуг BK и KC прямая AK будет биссектрисой треугольника ABC . Так как $BK = IK$, то точка I будет в силу задачи 103 центром вписанной окружности этого треугольника. Так как данная окружность с центром I касается стороны BC , то эта окружность и будет вписанной в треугольник ABC . Итак, любая точка A данной окружности O служит вершиной треугольника, вписанного в окружность O и в то же время описанного около окружности I .

Заменяя вписанную окружность I невписанной окружностью $I_a(r_a)$, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон, мы получим с помощью рассуждений, вполне аналогичных предыдущим, соотношение $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

Примечание. Относительно аналогичного вопроса для четырёхугольника см. задачу 282.

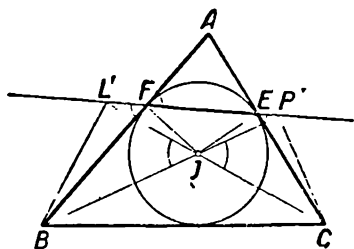


Черт. 621.

378. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC , через I_a , I_b и I_c — центры невписанных окружностей (причём через I_a обозначаем центр окружности, лежащей на внутренней биссектрисе угла A , и т. д.), через G и K (G' и K') — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на биссектрисы внешних (внутренних) углов при точках B и C , через L и M (L' и M') — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на биссектрисы внешних (внутренних) углов при точках C и A , через N и P (N' и P') — основания перпендикуляров, опущенных из точки C на биссектрисы внешних (внутренних) углов, при точках A и B . Остальные обозначения те же, что и в упражнении 90а (черт. 102).

1°. Так как углы $\angle CEI$ и $\angle CP'$ (черт. 622) — прямые, то точки I, C, E, P' лежат на одной окружности, откуда $\angle CIP' = \angle CEP'$; точно так же $\angle L'IB = \angle L'FB$. Но $\angle CIP' = \angle L'.B = \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. Итак, $\angle CEP' = \angle L'FB = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

С другой стороны, $\angle AEF = \angle AFE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$, как это видно из равнобедренного треугольника AEF .



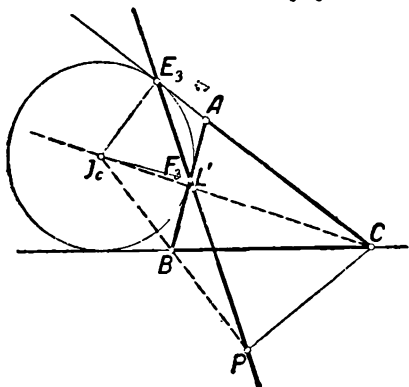
Черт. 622.

Таким образом, $\angle CEP' = \angle AEF = \angle AFE = \angle L'FB$. Эти равенства и показывают, что точки P' и L' лежат на прямой EF .

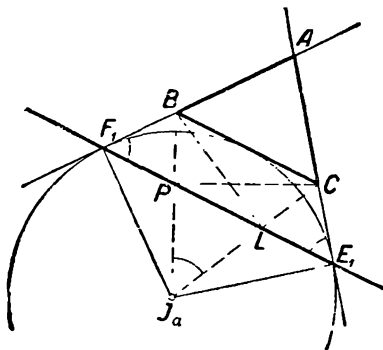
2°. Так как углы $\angle CE_3I_c$ и $\angle CPI_c$ (черт. 623) — прямые, то точки I_c, C, E_3, P лежат на одной окружности, откуда $\angle CE_3P = \angle CI_cP$; точно так же $\angle L'F_3B = \angle L'I_cB$. Но $\angle CI_cP = \angle L'I_cB = \angle CI_cB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle C -$

$$- \left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle B\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle A.$$

С другой стороны, $\angle AE_3F_3 = \angle AF_3E_3 = \frac{1}{2}\angle A$ (из равнобедренного треугольника AE_3F_3).



Черт. 623.



Черт. 624.

Таким образом, $\angle CE_3P = \angle AE_3F_3$, и точки E_3, F_3 и P лежат на одной прямой; $\angle L'F_3B = \angle AF_3E_3$, и точки E_3, F_3 и L' лежат на одной прямой.

3°. Точки I_a, C, P, E_1 (черт. 624) лежат на одной окружности, откуда $\angle CI_aP = \angle CE_1P$; точно так же $\angle LI_aB = \angle LF_1B$. Но

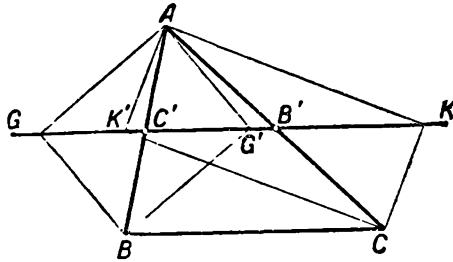
$$\begin{aligned}\angle CI_aP &= \angle LI_aB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \angle B\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \angle C\right) = \\ &= \frac{1}{2} (\angle B + \angle C), \text{ как это видно из треугольника } I_aBC. \text{ Итак, } \angle CE_1P = \\ &= \angle LF_1B = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C).\end{aligned}$$

С другой стороны, $\angle AE_1F_1 = \angle AF_1E_1 = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C)$ (из равнобедренного треугольника AE_1F_1). Таким образом, $\angle CE_1P = \angle AE_1F_1$, и точки E_1 , F_1 и P лежат на одной прямой; точно так же $\angle LF_1B = \angle AF_1E_1$, и точки E_1 , F_1 и L лежат на одной прямой.

4°. Фигура $AGBG'$ (черт. 625) есть прямоугольник; отсюда

$$AC' = BC' = C'G = \frac{1}{2} c \quad \text{и}$$

$\angle AGG' = \angle ABG' = \angle G'BC$, так что прямая GG' параллельна BC . Таким образом, точки G и G' лежат на прямой $B'C'$,



Черт. 625.

соединяющей середины сторон AC и AB треугольника ABC . Точно так же покажем, что точки K и K' лежат на той же прямой.

Расстояние $GK = GC' + C'B' + B'K = \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = p$. Далее $GK' = GK - K'K = GK - AC = p - b$; $G'K = GK - GG' = GK - AB = p - c$; $G'K' = GG' + K'K - GK = c + b - p = (a + b + c) - p - a = p - a$.

5°. Точки A , B и C (черт. 626) служат основаниями высот треугольника $I_a I_b I_c$ (так как прямая AI_a перпендикулярна к $I_b I_c$ и т. д.); поэтому точки G , K , L , M , N , P лежат на одной окружности в силу задачи 102.

Из прямоугольного треугольника $I_a I_b B$ имеем $I_a L \cdot I_a I_b = I_a B^2$. Точно так же из прямоугольного треугольника $I_a I_b A$ имеем $I_a K \cdot I_a I_b = I_a A^2$. Отсюда $I_a K \cdot I_a L = \left(\frac{I_a A \cdot I_a B}{I_a I_b} \right)^2$. Но треугольники $I_a B D_1$ и

$I_a I_b A$ подобны (так как $\angle I_a B D_1 = 90^\circ - \angle C B I = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$, а $\angle I_a I_b A = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$, в силу упр. 24, и потому $\angle I_a B D_1 = \angle I_a I_b A$),

откуда $I_a A : I_a D_1 = I_a I_b : I_a B$; $I_a D_1 = \frac{I_a A \cdot I_a B}{I_a I_b}$. Таким образом находим

$I_a K \cdot I_a L = I_a D_1^2$. Степень точки I_a относительно окружности $GKLMNP$ равна квадрату радиуса $I_a D_1$ вневписанной окружности I_a . Это значит, что обе окружности ортогональны.

Одним из диаметров окружности $GKLMNP$ служит перпендикуляр к отрезку MN в его середине. Этот перпендикуляр проходит через середину отрезка BC (как это видно из трапеции $MNCB$) и параллелен биссектрисе AI_a угла A . Иначе говоря, этот перпендикуляр есть биссектриса угла $B'A'C'$, где A' , B' и C' — середины сторон треугольника ABC . Таким же образом покажем, что центр окружности $GKLMNP$

лежит на биссектрисах углов $C'B'A'$ и $A'C'B'$, т. е. совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$.

Опуская из центра O окружности $GKLMNP$ перпендикуляр OQ на прямую GK , найдём, что квадрат радиуса окружности O равен $OG^2 = OQ^2 + GQ^2$. Но OQ , как радиус окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$, равняется $\frac{1}{2}r$, где r — радиус

окружности, вписанной в треугольник ABC , так как треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны и имеют коэффициент подобия, равный $\frac{1}{2}$. Далее $GQ =$

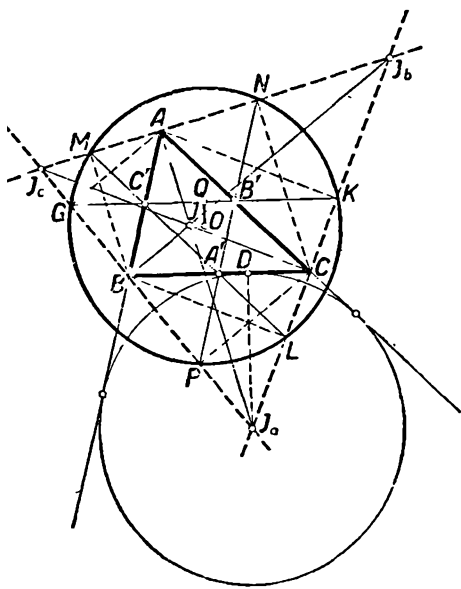
$$= \frac{1}{2} GK = \frac{1}{2} p \text{ (см. 4°). Отсюда } 4OG^2 = r^2 + p^2.$$

Окружности, аналогичные $GKLMNP$, мы получим, замечая, что точки A , B и C служат основаниями высот каждого из треугольников $II_b I_c$, $II_c I_a$, $II_a I_b$ (черт. 102), и опуская из точек A , B и C перпендикуляры на стороны любого из этих треугольников. Беря треугольник $II_b I_c$, получим окружность $G'K'L'MNP'$ и т. д.

379. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 627); a , b , c , p — его стороны и полупериметр. Обозначим через E_1 , F_1 , F_2 , D_2 , D_3 и E_3 (как в упр. 90а, черт. 102) точки касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон, через H и K — точку пересечения высот и основание высоты AH треугольника.

Мы докажем, что прямые $D_2 F_2$ и $D_3 E_3$ пересекаются на высоте AK треугольника, если докажем, что обе прямые делят (внешним образом) отрезок AK в одном и том же отношении.

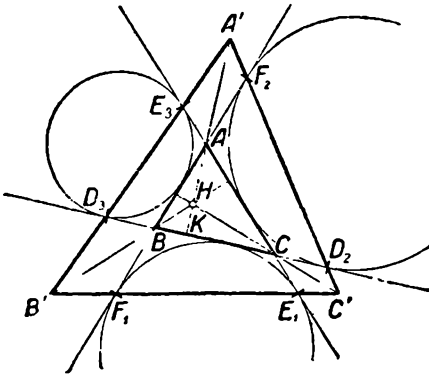
Пусть A' — точка пересечения прямых AK и $D_2 F_2$. Чтобы найти отношение $AA':K'A'$, применим теорему п. 192 к треугольнику ABK



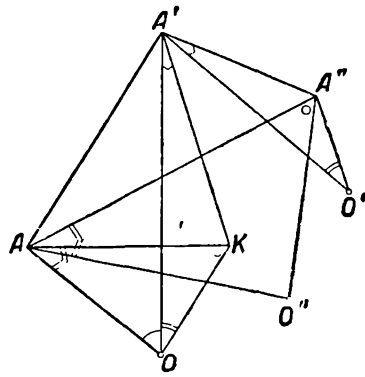
Черт. 626.

и секущей D_2F_2A' . Получим $\frac{F_2A}{F_2B} \cdot \frac{D_2B}{D_2K} \cdot \frac{A'K}{A'A} = 1$. Но $AF_2 = p - c$ и $BF_2 = BD_2 = p$ (упр. 90а); далее $BK = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ (п. 126), откуда $KD_2 = BD_2 - BK = \frac{a + b + c}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{(b + c)(p - c)}{a}$.

Подставляя эти выражения отрезков AF_2 , BF_2 , BD_2 и KD_2 в предыдущее соотношение, получим после преобразований $KA' : AA' = (b + c) : a$. Применяя ту же теорему п. 192 к треугольнику ACK и секущей D_3E_3 , мы найдём, что прямая D_3E_3 делит отрезок AK в том



Черт. 627.



Черт. 628.

же самом отношении и потому пересекает прямую AK в той же самой точке A' (это видно уже из того, что в найденное значение отношения $KA' : AA'$ стороны b и c входят равноправно). Таким образом, прямые D_2F_2 и D_3E_3 пересекаются на высоте AK треугольника ABC .

Точно так же докажем, что и остальные две точки пересечения B' и C' прямых E_1F_1 , F_2D_2 и D_3E_3 лежат на высотах данного треугольника.

Далее имеем $\angle HA'B' = 90^\circ - \angle E_3D_3C = 90^\circ - \angle D_3E_3C = \angle HB'A'$, откуда $HA' = HB'$. Таким же путём докажем, что $HB' = HC'$. Точка H есть центр окружности $A'B'C'$.

380. Пусть A — произвольная точка фигуры F (черт. 628). Строя треугольник OAA' , подобный треугольнику T , получим точку A' фигуры F' , соответствующую точке A фигуры F . Далее, строя треугольник $O'A'A''$, подобный треугольнику T' , найдём точку A'' фигуры F'' , соответствующую точке A фигуры F .

Построим теперь треугольник $OA'K$, подобный треугольнику $O'A'A''$ и имеющий ту же направление вращения. Так как угол AOA' есть угол между фигурами F и F' (п. 150), а угол $A'OK$, равный углу $A'O'A''$, — угол между фигурами F' и F'' , то угол AOK есть угол между фи-

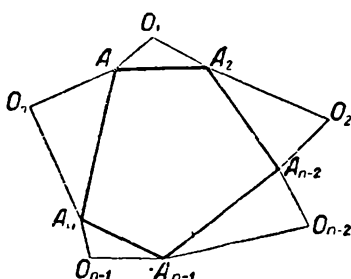
гурами F и F'' . Имеем $\frac{OA}{OK} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OA'}{OK} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{O'A'}{O'A''}$; так как $\frac{OA}{OA'}$ есть отношение соответственных отрезков фигур F и F' , а $\frac{O'A'}{O'A''}$ — такое же отношение для фигур F' и F'' , то $OA:OK$ есть отношение длин соответственных отрезков фигур F и F'' . Отсюда следует, что треугольник OAK подобен треугольнику, образованному искомой точкой O'' и соответственными точками фигур F и F'' .

Построим, наконец, на отрезке AA'' треугольник $O''AA''$, подобный треугольнику OAK . Его третья вершина O'' и будет искомой точкой, т. е. точкой фигуры F , совпадающей с соответственной точкой фигу-

ры F'' . Это следует из того, что угол $AO''A''$ есть угол между фигурами F и F'' , отношение $O''A'':O''A$ — коэффициент подобия тех же фигур, а A и A'' — пара их соответственных точек.

Из сказанного следует, что поставленная задача имеет, вообще говоря, одно решение.

Приведённое построение нуждается в небольшом видоизменении в том случае, если точки O , A и K окажутся на одной прямой. Если при



Черт. 629.

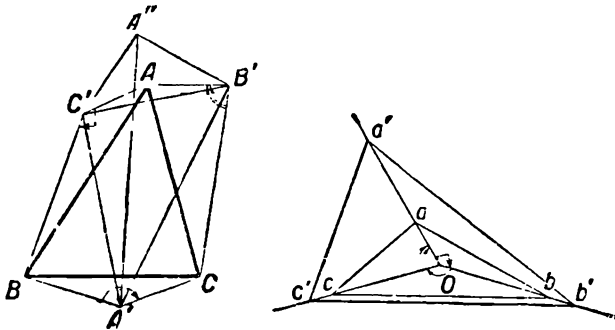
этом точки A и K различны, то фигуры F и F'' будут гомотетическими. Для построения точки O'' придётся отрезок AA'' разделить в отношении $O''A:O''A'' = OA:OK$ (по величине и по знаку). Если же точки A и K будут совпадать, то соответственные отрезки фигур F и F'' будут равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону: фигуры F и F'' получатся одна из другой поступательным перемещением, величина и направление которого определяются отрезком AA'' (точка O'' не существует). В том случае, когда и точки A и A'' совпадают, каждая точка фигуры F совпадает с соответственной точкой фигуры F'' (любая точка плоскости есть точка O'').

381. Пусть $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ — искомым многоугольником (черт. 629); $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n$ — вершины треугольников $O_1A_1A_2, O_2A_2A_3, \dots$, соответственно подобных данным треугольникам T_1, T_2, \dots .

Будем рассматривать O_{n-1} как точку, соответствующую самой себе в двух подобных фигурах F_{n-1} и F_n , имеющих одинаковое направление вращения; точно так же O_n — как точку, соответствующую самой себе в фигурах F_n и F_1 . Точки A_{n-1}, A_n и A_1 будем считать соответственными точками фигур F_{n-1}, F_n и F_1 . Пользуясь задачей 380, можно построить точку O_{n-1}' , соответствующую самой себе в фигурах F_{n-1} и F_1 , а также треугольник T_{n-1}' , подобный треугольнику, образованному этой точкой и любыми двумя соответственными точками фигур F_{n-1} и F_1 .

Мы пришли к задаче построения многоугольника $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ по точкам $O_1, O_2, \dots, O_{n-2}, O_{n-1}$ и треугольникам $T_1, T_2, \dots, T_{n-2}, T_{n-1}$.

Повторяя этот процесс, придём к задаче: построить отрезок A_1A_2 , зная, что две данные точки O_1 и O_2 служат вершинами треугольников $O_1A_1A_2$ и $O_2A_2A_1$, соответственно подобных данным треугольникам T_1 и T_2 . Примем точку O_1 за двойную точку фигур F_1 и F_2 , имеющих соответственными точками A_1 и A_2 ; точку O_2 — за двойную точку фигур F_2 и F_3 , имеющих своими соответственными точками A_2 и A_1 . Точка A_1 может быть построена как двойная точка фигур F_1 и F_3 по данным точкам O_1 и O_2 и треугольникам T_1 и T_2 , опять-таки как указано в задаче 380.



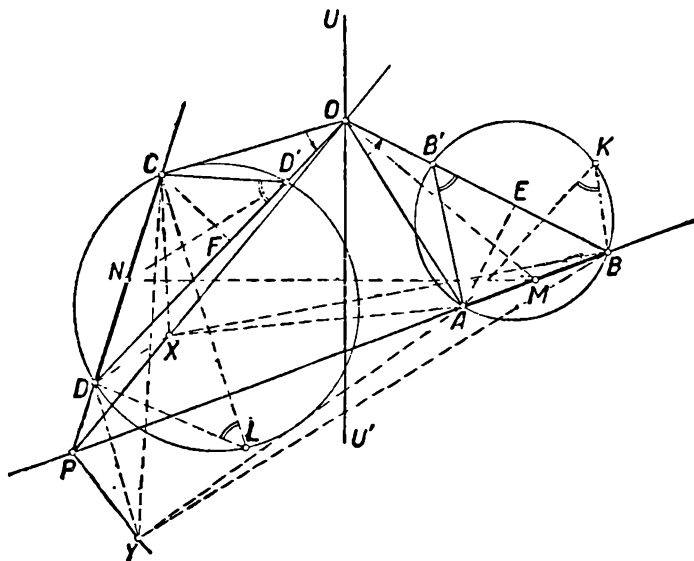
Черт. 630.

После того как точка A_1 построена, точка A_2 найдётся как третья вершина треугольника $O_1A_1A_2$, подобного данному треугольнику T_1 . Далее аналогичным образом строятся точки A_3, A_4, \dots, A_n .

Задача будет невозможной или неопределённой, если в процессе решения мы встретимся с одним из случаев, оговорённых в решении задачи 380.

382. Будем рассматривать точки A, B и C (черт. 630) как соответственные точки трёх попарно подобных фигур F_a, F_b и F_c , имеющих одинаковое направление вращения. Точку A' будем рассматривать как точку, соответствующую самой себе в фигурах F_b и F_c , точку B' — как точку, соответствующую самой себе в фигурах F_c и F_a . При этом угол между соответственными отрезками фигур F_b и F_c будет равен (по величине и направлению) $\angle BA'C = \angle bOc$; угол между соответственными отрезками фигур F_c и F_a — $\angle CB'A = \angle cOa$. Следовательно, угол между соответственными отрезками фигур F_a и F_b будет равен $\angle aOb = \angle AC'B$. Отношение соответственных отрезков для фигур F_b и F_c равно $A'B:A'C = Ob:Oc$, для фигур F_c и F_a соответственно $B'C:B'A = Oc:Oa$. Следовательно, отношение соответственных отрезков для фигур F_a и F_b будет равно $Oa:Ob = C'A:C'B$. Отсюда следует, что C' будет точкой, соответствующей самой себе в фигурах F_a и F_b .

Построим точку A'' , соответствующую точке A в фигуре F_a . При этом треугольник $C'A'A''$ будет подобен треугольнику $C'AB$ и иметь с ним одинаковое направление вращения, так что $\angle C'A'A'' = \angle C'BA = \angle Oba$ (по величине и направлению). Точно так же треугольник $B'A'A''$ будет подобен треугольнику $B'CA$ и иметь с ним одинаковое направление вращения, так что $\angle B'A'A'' = \angle B'CA = \angle Oca$. Отсюда следует, что $\angle B'A'C' = \angle B'A'A'' + \angle A'A'C' = \angle Oca + \angle abO = \angle c'a'O + \angle Oa'b' = \angle c'a'b'$, где a' , b' и c' — точки, обратные точкам a , b и c в инверсии с полюсом O (п. 217).



Черт. 631.

Итак, имеем по величине и направлению $\angle B'A'C' = \angle c'a'b'$, и аналогично для двух других углов треугольника $A'B'C'$. Треугольники $A'B'C'$ и $a'b'c'$ подобны, но имеют противоположные направления вращения.

383. Пусть AB и CD — данные отрезки (черт. 631), P — точка пересечения прямых AB и CD .

Построим точку O , обладающую следующими свойствами: а) треугольники OAB и OCD равновелики; б) углы AOB и COD имеют одинаковое направление; в) углы AOB и COD равны по величине.

Так как пл. $OAB = \text{пл. } OCD$, то точка O принадлежит геометрическому месту точек, отношение расстояний которых от прямых AB и CD обратно отношению отрезков AB и CD . Согласно п. 157, это геометрическое место состоит из двух прямых PX и PY , проходящих через точку пересечения прямых AB и CD . При этом, как видно из чертежа, для любой точки X одной из этих прямых углы AXB и CXD

имеют одинаковое направление, для любой точки Y другой из них углы AYB и CYD имеют противоположные направления.

Так как углы AOB и COD имеют, по предположению, одинаковое направление, то искомая точка O лежит на прямой PX (а не на прямой PY).

Далее

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \pm 2OB \cdot OE, \quad (1)$$

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 \pm 2OD \cdot OF, \quad (2)$$

где E и F — основания перпендикуляров из точек A и C на прямые OB и OD . При этом знаки перед последними членами в правых частях равенств (1) и (2) одинаковы в силу равенства углов AOB и COD . В силу равенства этих углов треугольники OAE и OCF подобны, откуда $OA:OE = OC:OF$. С другой стороны, в силу равенств треугольников OAB и OCD и равенства углов AOB и COD мы имеем (п. 256):

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD. \quad (3)$$

Деля это равенство почленно на предыдущее, получим:

$$OB \cdot OE = OD \cdot OF. \quad (4)$$

Вычитая теперь почленно равенства (1) и (2) и принимая во внимание (4), найдём:

$$AB^2 - CD^2 = OA^2 + OB^2 - OC^2 - OD^2. \quad (5)$$

Обозначив, наконец, через M и N середины отрезков AB и CD , будем иметь (п. 128) $OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ и $OC^2 + OD^2 = 2ON^2 + \frac{1}{2}CD^2$. С помощью этих соотношений равенство (5) приводится к виду

$$OM^2 - ON^2 = \frac{1}{4}(AB^2 - CD^2). \quad (6)$$

Итак, существует единственная точка O , удовлетворяющая условиям а), б) и с), указанным в начале решения; эта точка определяется как точка пересечения прямой PX с прямой линией UU' — геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний которых от точек M и N равна $\frac{1}{4}(AB^2 - CD^2)$ (сравнить п. 128а, следствие).

Построим теперь дуги AKB и CLD , из точек которых отрезки AB и CD видны под равными и одинаково направленными углами $\angle AKB = \angle CLD = V$, и обозначим через B' и D' вторые точки пересечения прямых OB и OD с соответствующими дугами.

Мы имеем $\angle AOB = \angle AB'B + \angle OAB'$ или $\angle AOB = \angle AB'B - \angle OAB'$ в зависимости от того, лежит ли точка O внутри или вне окружности AKB , и аналогично $\angle COD = \angle CD'D \pm \angle OCD'$. Так как $\angle AOB = \angle COD$ и $\angle AB'B = \angle CD'D = V$, то отсюда следует, что $\angle OAB' = \angle OCD'$. Следовательно, треугольники OAB' и OCD' подобны, откуда

$$OA:OB' = OC:OD'. \quad (7)$$

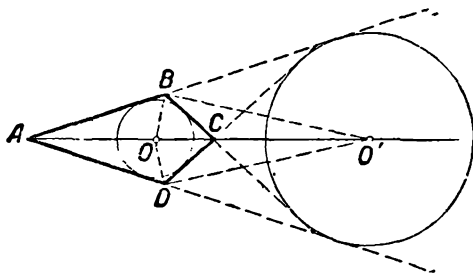
Деля равенство (3) почленно на (7), получим $OB \cdot OB' = OD \cdot OD'$, так что точка O имеет относительно окружностей AKB и CLD одну и ту же степень и потому лежит на их радикальной оси.

Итак, радикальная ось окружностей AKB и CLD , удовлетворяющих условию $\angle AKB = \angle CLD = V$, проходит через точку O , не зависящую по самому её определению от выбора этих окружностей.

Примечание. Мы предполагали, что углы AOB и COD не только равны, но и имеют одинаковое направление вращения, и что то же имеет место для углов AKB и CLD . Случай, когда эти углы имеют противоположные направления, сводится к рассмотренному, если поменять ролями точки C и D .

При этом роль точки O будет играть точка, в которой прямая PY пересекается с прямой UU' — геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию (6).

384. Так как треугольники ABC и ADC (черт. 632) равны (по трём сторонам), то биссектрисы внутренних углов при B и D пересекают



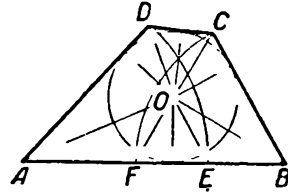
Черт. 632.

прямую AC в одной и той же точке O , удовлетворяющей условию $AO:OC = AB:BC$. То же относится и к внешним углам при вершинах B и D , биссектрисы которых пересекают AC в точке O' , для которой $AO':CO' = AB:BC$. Точки O и O' равноудалены от всех четырёх прямых AB , BC , CD и DA и потому служат центрами тех окружностей, о которых идёт речь в тексте.

Если данный четырёхугольник — шарнирный и сторона AB остаётся неподвижной, то точка C описывает окружность с центром B (или дугу такой окружности), а точки O и O' — фигуры, гомотетичные относительно точки A той фигуре, которую описывает точка C , т. е. также окружности. Действительно, расстояние BC и отношения $AO:OC$ и $AO':CO'$ сохраняют при этом постоянную величину.

385. Если четырёхугольник $ABCD$ (черт. 633) описан около окружности и эта окружность лежит внутри четырёхугольника, то $AB + CD = AD + BC$ (упр. 87). Последнее соотношение сохраняет силу при деформации четырёхугольника, так что он остаётся описанным.

Отложим на прямой AB от точки A в сторону точки B отрезок AE , равный AD , а от точки B в сторону точки A — отрезок BF , равный BC (точки E и F могут обе лежать на самом отрезке AB , как на чертеже 633, или одна из точек E и F может лежать на самом отрезке AB , другая — на его продолжении; наконец, обе точки E и F могут лежать на продолжениях отрезка AB ; однако во всех случаях $AE + BF = AD + BC > AB$, так что отрезки AE и BF налегают один на другой). Треугольники AOE и AOD будут равны, так как $\angle OAD = \angle OAE$, откуда $OD = OE$. Аналогично $OC = OF$. Наконец в силу равенства $AB + CD = AD + BC$ имеем $CD = AD + BC - AB = AE + BF - AB = EF$. Треугольники OCD и OFE равны, и потому $\angle COD = \angle EOF$. Но в силу сказанного в решении упражнения 89 имеем $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, так что



Черт. 633.

$$\angle AOB + \angle EOF = 180^\circ. \quad (1)$$

Обратно, пусть некоторая точка O удовлетворяет условию (1). Построим треугольники AOD и BOC , соответственно равные AOE и BOF . Будем иметь $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOE + \angle BOF = \angle AOB + \angle EOF = 180^\circ$; следовательно, $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\angle AOD + \angle BOC) = 180^\circ$, и потому $\angle COD = \angle EOF$. Кроме того, $OC = OF$, $OD = OE$, и треугольники COD и EOF равны, так что $CD = EF$. Поэтому $AD + BC = AE + BF = AB + EF = AB + CD$, и четырёхугольник $ABCD$ — описанный.

Отсюда следует, что геометрическое место центров O вписанных окружностей совпадает с геометрическим местом точек, из которых отрезки AB и EF видны под дополнительными углами, и потому представляет собой окружность S с центром на прямой AB (упр. 257).

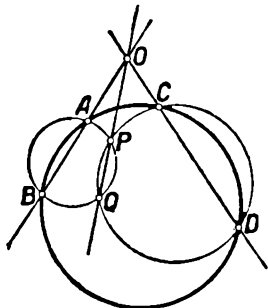
Из сказанного в решении упражнения 257 следует, что концы одного из отрезков AB и EF образны относительно окружности S концам другого. В данном случае точка A обратна точке F , точка B — точке E . Из упражнения 242 следует, что отношение расстояний произвольной точки O окружности S от двух взаимно обратных точек A и F есть постоянная величина, так что в силу $OF = OC$ имеем $OA:OC = \text{const}$. Аналогично $OB:OD = \text{const}$.

386. Прямые AB , CD и PQ проходят через одну точку O — радикальный центр данной окружности и окружностей PAB и PCD (черт. 634). Точка O остаётся неподвижной при перемещении точки P как точка пересечения прямых AB и CD . Произведение $OP \cdot OQ$ равно степени точки O относительно данной окружности. Следовательно,

точки P и Q соответствуют одна другой в инверсии с полюсом O и степенью, равной степени точки O относительно данной окружности.

Если точка P описывает прямую, не проходящую через O , то точка Q описывает окружность, проходящую через точку O , и наоборот. Если точка P описывает окружность, не проходящую через O , то точка Q описывает окружность, ей обратную.

Геометрическое место точки P при условии, что она совпадает с Q , есть окружность инверсии; последняя существует лишь при условии, что точка O лежит вне данной окружности.



Черт. 634.

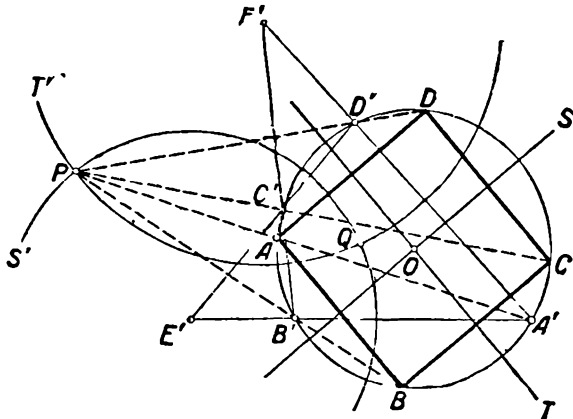
387. Точки A' , B' , C' и D' (черт. 635) соответствуют точкам A , B , C и D в инверсии с полюсом P и степенью, равной степени p точки P относительно окружности, описанной около квадрата. Следовательно (п. 218),

$$A'B' = \frac{p \cdot BA}{PA \cdot PB}, \quad (1)$$

и аналогичные выражения получим для $B'C'$, $C'D'$ и $D'A'$. Отсюда, принимая во внимание, что $AB=BC=CD=DA$, получим $A'B' \cdot C'D' =$

$$= B'C' \cdot D'A' = \frac{p^2 \cdot AB^2}{PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD}.$$

Обратно, пусть (выпуклый) вписанный четырёхугольник $A'B'C'D'$ удовлетворяет условию $A'B' \cdot C'D' = B'C' \cdot D'A'$, и инверсия с полю-

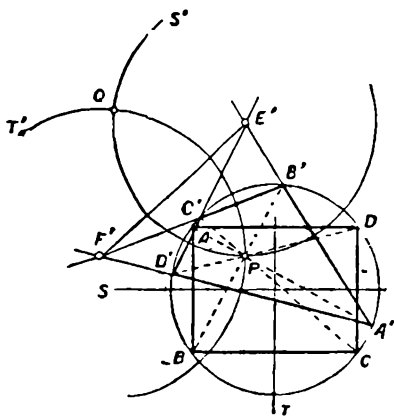


Черт. 635.

сом P преобразует точки A' , B' , C' и D' в вершины A , B , C и D квадрата, вписанного в ту же окружность. Прямой S , проходящей через центр O квадрата и перпендикулярной к его сторонам AB и CD , соответствует в этой инверсии окружность S' , ортогональная ко всем

окружностям, проходящим через точки A' и B' (в том числе и к прямой $A'B'$), и ко всем окружностям, проходящим через точки C' и D' (в том числе и к прямой $C'D'$). Окружность S' имеет своим центром точку пересечения E' прямых $A'B'$ и $C'D'$ и ортогональна к окружности $A'B'C'D'$. Такая окружность S' существует, так как точка E' лежит вне окружности $A'B'C'D'$ в силу выпуклости четырёхугольника $A'B'C'D'$. Точно так же прямая T , проходящая через точку O и перпендикулярная к AD и BC , преобразуется в окружность T' , имеющую своим центром точку пересечения F' прямых $A'D'$ и $B'C'$ и ортогональную к окружности $A'B'C'D'$.

Так как окружности S' и T' преобразуются в прямые линии, то искомым полюсом инверсии может быть только одна из точек их пересечения P или Q (окружности S' и T' наверное пересекутся, так как одна из них пересекает дуги $A'B'$ и $C'D'$, другая — дуги $A'D'$ и $B'C'$ окружности $A'B'C'D'$). Рассмотрим хотя бы точку P . Покажем, что инверсия с полюсом P преобразует вершины данного четырёхугольника действительно в вершины квадрата $ABCD$. Так как все окружности, проходящие через A' и B' , ортогональны к окружности S' , то прямая AB , соответствующая окружности $PA'B'$, перпендикулярна к той прямой S , которая соответствует окружности S' . По той же причине прямая CD перпендикулярна к прямой S , а прямые AD и BC —



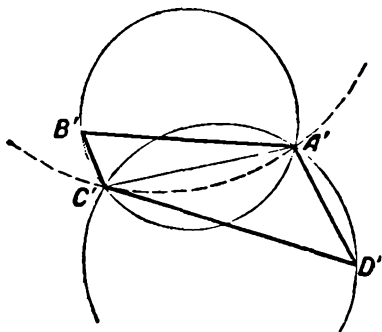
Черт. 636.

к той прямой T , которая соответствует окружности T' . Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограм. Так как точки A' , B' , C' и D' лежат на одной окружности, то и обратные им точки A , B , C и D также лежат на одной окружности, а следовательно, $ABCD$ есть прямоугольник. Наконец, соотношение $A'B' \cdot C'D' = A'D' \cdot B'C'$ преобразуется с помощью формул, аналогичных (1), в соотношение $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Из последнего следует, что прямоугольник $ABCD$ — квадрат. Те же соображения применимы и к инверсии с полюсом Q .

Задача преобразования данного четырёхугольника в квадрат имеет два решения: полюсом инверсии может быть любая из точек пересечения P и Q окружностей S' и T' . Это объясняется тем, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный (сравнить решение упр. 270, 5°, примечание 2°).

388. Пусть инверсия с полюсом P преобразует вершины данного вписанного четырёхугольника $A'B'C'D'$ в вершины прямоугольника $ABCD$ (черт. 636). Не нарушая общности, можно предположить, что прямоугольник $ABCD$ вписан в ту же окружность, что и четырёхугольник $A'B'C'D'$.

Прямая S , соединяющая середины сторон AB и CD , пересекает под прямым углом как все окружности, проходящие через точки A и B , так и все окружности, проходящие через C и D . Следовательно, обратная ей окружность S' пересекает под прямым углом прямые $A'B'$ и $C'D'$ и окружность $A'B'C'D'$. Центр этой окружности S' есть точка пересечения E' прямых $A'B'$ и $C'D'$, её радиус — касательная из точки E' к окружности $A'B'C'D'$. Точно так же получаем вторую окружность T' с центром в точке пересечения F' прямых $A'D'$ и $B'C'$, обратную прямой T , которая соединяет середины сторон AD и BC .



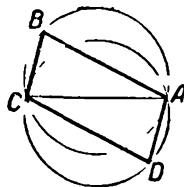
Черт. 637.

Так как окружности S' и T' преобразуются искомой инверсией в прямые линии S и T , то полюс инверсии есть одна из точек пересечения P или Q этих окружностей. Окружности S' и T' обе ортогональны как к прямой $E'F'$, так и к окружности $A'B'C'D'$; следовательно, P и Q — предельные точки этой прямой и этой окружности (упр. 152). Степень инверсии, преобразующей точки A' , B' , C' и D' в вершины прямоуголь-

ника, остаётся, очевидно, произвольной.

389. Пусть точки A' , B' , C' и D' преобразуются с помощью некоторой инверсии в вершины параллелограмма $ABCD$ (черт. 637, 638). Если точки A' , B' , C' и D' лежат на одной окружности, то $ABCD$ — прямоугольник, и мы приходим к задаче 388. Поэтому мы предположим, что точки A' , B' , C' и D' не лежат на одной окружности.

Так как треугольники ABC и ADC равны, то и окружности ABC и ADC должны быть равны между собой, и прямая AC образует с обеими окружностями равные углы. Следовательно, полюс инверсии должен лежать на окружности, проходящей через точки A' и C' и делящей пополам угол между окружностями $A'B'C'$ и $A'D'C'$, точнее угол между дугами $A'B'C'$ и $A'D'C'$ (так как точки B и D лежат по разные стороны от AC , то точки B' и D' лежат по разные стороны от окружности) (сравните задачу 275). Точно так же, полюс инверсии лежит на определённой окружности, делящей пополам угол между окружностями $B'A'D'$ и $B'C'D'$.



Черт. 638.

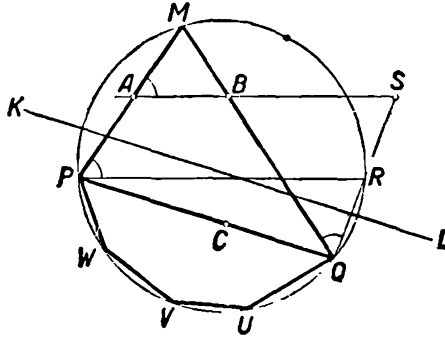
Так как эти окружности, на которых должен лежать полюс инверсии, пересекаются в двух точках, то получаем два возможных положения полюса инверсии; степень инверсии остаётся произвольной.

390. Прямая, пересекающая две данные окружности под равными углами, necessarily проходит через один из их центров подобия (так как радиусы, проведённые в точки пересечения, попарно параллельны

(сравнить п. 227), и обратно. Таким образом, центр подобия можно охарактеризовать как точку, через которую проходит бесчисленное множество прямых, пересекающих обе данные окружности под равными углами.

Если точка A' , соответствующая точке A в искомой инверсии I , есть центр подобия для двух окружностей, в которые преобразуются данные окружности, то бесчисленное множество окружностей, проходящих через точку A и пересекающих обе данные окружности под одним и тем же углом, должны преобразовываться в прямые линии, проходящие через точку A' .

Окружность, проходящая через точку A и пересекающая две данные под одним и тем же углом, преобразуется сама в себя с помощью одной из двух инверсий J' или J'' , преобразующих данные окружности одну в другую (п. 227). Отсюда следует, что всякая окружность, проходящая через точку A и изогональная к двум данным, проходит либо через точку P' , обратную точке A в инверсии J' , либо через точку P'' , обратную точке A в инверсии J'' . Чтобы эти окружности преобразовались в прямые линии, за полюс инверсии I надо принять либо P' , либо P'' .



Черт. 639.

Итак, полюсом искомой инверсии I служит точка, обратная точке A в одной из двух инверсий, преобразующих две данные окружности одну в другую. Степень инверсии остаётся произвольной.

391. Пусть S — точка пересечения прямых QR и AB (черт. 639). Так как $\angle RQM = \angle RPM = \angle BAM$, то треугольнички BQS и BAM подобны, откуда $BS = -\frac{BM \cdot BQ}{AB}$. Произведение $BM \cdot BQ$ (степень точки B относительно окружности) не изменяется при перемещении точки M по окружности, а следовательно, точка S будет при этом неподвижной.

Если окружность и точки A и B даны, то легко построить точку S , выбирая точку M произвольно.

Переходим к решению задач на построение.

1. *Вписать в окружность треугольник (обозначим его через MPQ), две стороны которого проходят через точки A и B , а третья параллельна прямой KL .*

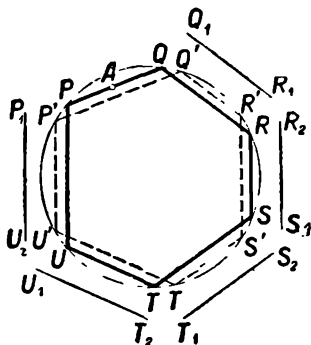
Задача сводится к построению треугольника PQR , две стороны которого соответственно параллельны прямым AB и KL , а третья проходит через S (см. задачу 115). После того как треугольник PQR будет построен, достаточно соединить вершину P с точкой A , чтобы получить на окружности точку M . При этом точка пересечения прямой MB с окружностью будет лежать в силу доказанной теоремы на прямой RS и, следовательно, будет совпадать с Q .

II. Вписать в окружность треугольник (обозначим его через MPQ), стороны которого проходят через точки A , B и C .

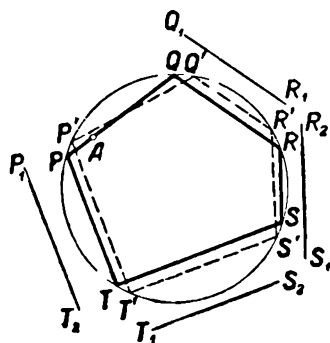
Задача сводится к построению треугольника PQR , две стороны которого проходят через точки C и S , а третья параллельна AB , т. е. к задаче I. После того как треугольник PQR будет построен, положение точки M определяется как и в предыдущей задаче.

III. Вписать в окружность многоугольник с чётным числом сторон, у которого одна из сторон проходит через данную точку, а остальные параллельны соответственно данным прямым.

Пусть требуется построить, например, шестиугольник $PQRSTU$, у которого сторона PQ проходит через данную точку A , а остальные



Черт. 640.



Черт. 641.

стороны параллельны соответственно данным прямым Q_1R_1 , R_2S_1 , ST_1 , T_2U_1 и U_2P_1 (черт. 640). Выбрав на окружности произвольную точку Q' , построим ломаную $Q'R'S'T'U'P'$, звенья которой соответственно параллельны данным прямым и, следовательно, сторонам искомого многоугольника. Дуги QQ' , RR' , SS' , TT' , UU' и PP' будут равны между собой в силу параллельности хорд; кроме того, каждые две последовательные дуги будут иметь противоположные направления. Так как общее число дуг чётное, то дуги QQ' и PP' будут равны и иметь противоположные направления. Следовательно, и хорда $P'Q'$ будет параллельна искомой стороне PQ . Остаётся провести через точку A прямую, параллельную $P'Q'$, чтобы получить сторону PQ искомого многоугольника.

IV. Вписать в окружность многоугольник с нечётным числом сторон, у которого одна из сторон проходит через данную точку, а остальные параллельны соответственно данным прямым.

Пусть требуется построить, например, пятиугольник $PQRST$, у которого сторона PQ проходит через точку A , а остальные стороны параллельны соответственно данным прямым Q_1R_1 , R_2S_1 , S_2T_1 и T_2P_1 (черт. 641). Выбрав на окружности произвольную точку Q' , построим ломаную $Q'R'S'T'P'$, звенья которой соответственно параллельны данным прямым и; следовательно, сторонам искомого многоугольника. Дуги QQ' , RR' , SS' , TT' и PP' будут опять равны; QQ' и PP' бу-

дуг иметь в данном случае (в силу нечётности числа вершин) одинаковое направление.

Следовательно, будут равны и дуги PQ и $P'Q'$, а значит и хорды PQ и $P'Q'$. Остаётся провести через точку A хорду, равную хорде $P'Q'$, чтобы получить сторону PQ искомого многоугольника.

V. Вписать в окружность многоугольник с данным числом сторон, у которого некоторое число последовательных сторон (в частности все стороны) проходят через данные точки, а остальные параллельны соответственно данным прямым.

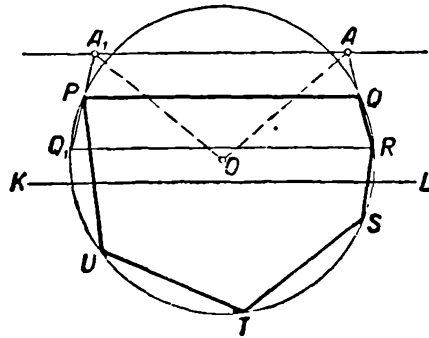
В том случае, когда только одна сторона должна проходить через данную точку, задача уже решена (см. выше III и IV). Пусть требуется построить, например, шестиугольник $PMQUVW$ (черт. 639), у которого стороны PM и MQ проходят соответственно через данные точки A и B , а на каждую из остальных сторон наложено определённое условие — проходить через данную точку или быть параллельной данной прямой. Поступая таким же образом, как при решении задачи I, сводим нашу задачу к следующей: вписать шестиугольник $PRQUVW$, у которого сторона PR параллельна AB , сторона RQ проходит через данную точку S , а остальные стороны подчинены первоначально данным условиям. Таким образом, требование, чтобы две последовательные стороны искомого многоугольника проходили через данные точки, заменяется требованием, чтобы одна из сторон некоторого вспомогательного многоугольника (с тем же числом сторон) была параллельна данной прямой, а другая проходила через данную точку. При этом требования, наложенные на остальные стороны, не изменяются.

Так как условие проходить через данную точку наложено на *последовательные* стороны искомого многоугольника, то, повторяя эту замену несколько раз, сведём задачу V к задаче III или IV.

VI. Переходим, наконец, к наиболее общей задаче рассматриваемого типа:

Вписать в окружность многоугольник с данным числом сторон, на каждую из сторон которого наложено определённое условие — проходить через данную точку или быть параллельной данной прямой. (Обобщение по сравнению с задачей V состоит в том, что стороны, на которые наложены условия проходить через данные точки, не являются обязательно последовательными.)

Пусть требуется построить, например, шестиугольник $PQRSTU$ (черт. 642), у которого сторона PQ должна быть параллельна данной



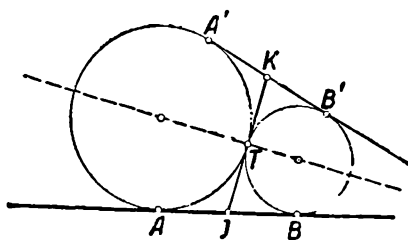
Черт. 642.

прямой KL , а сторона QR — проходить через данную точку A . Проведём через точку R хорду RQ_1 , параллельную KL , и обозначим через A_1 точку пересечения прямой PQ_1 с прямой, проходящей через точку A и параллельной KL . Так как четырёхугольник $PQRQ_1$, а следовательно, и ARQ_1A_1 является равнобедренной трапецией, то точки A и A_1 равноудалены от центра O данной окружности. Это даёт возможность построить точку A_1 , не зная многоугольника $PQRSTU$ (прямая AA_1 параллельна KL и $OA = OA_1$). Для построения многоугольника $PQRSTU$, у которого сторона PQ параллельна KL , а сторона QR проходит через данную точку A , достаточно построить многоугольник PQ_1RSTU , у которого сторона PQ_1 проходит через данную точку A_1 , а сторона Q_1R параллельна KL .

Повторяя это рассуждение несколько раз, свведём задачу VI к задаче V.

Примечание. Как искомый многоугольник так и вспомогательные многоугольники, о которых идёт речь в настоящей задаче, могут оказаться и несобственными, т. е. их стороны могут иметь точки пересечения, отличные от вершин (ср. п. 21). Так, например, вспомогательный многоугольник PQ_1RSTU на чертеже 642 — несобственный (его стороны Q_1R и UP пересекаются).

392. Применим к решению этой задачи метод взаимных поляр (пп. 206 и след.). Если вершины искомого треугольника лежат на данных



Черт. 643.

прямых a , b и c , то полярны этих вершин образуют вписанный треугольник, стороны которого проходят через полюсы A , B и C этих прямых. Таким образом задача сводится к уже решённой задаче 391.

393. Пусть T — точка касания рассматриваемых окружностей между собой (черт. 643), I и K — точки пересечения общей касатель-

ной в точке T с касательными AB и $A'B'$. Очевидно, $IA = IT = IB$ и $KA' = KT = KB'$. Кроме того, $IT = KT$, так как линия центров есть ось симметрии фигуры.

Отсюда следует, что $IK = AB = \text{const.}$ Геометрическое место точек K есть окружность с центром I и радиусом AB . Окружности, построенные на отрезках $A'B'$ как на диаметрах, имеют постоянный

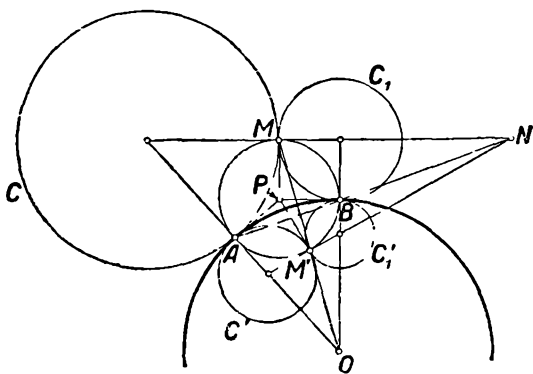
радиус $KA' = KB' = IA = IB = \frac{1}{2} AB$; их центры лежат на окруж-

ности с центром I и радиусом $IK = AB$. Следовательно, все эти окруж-

ности касаются определённой окружности и даже двух окружностей — с центром в точке I и радиусами, соответственно равными $\frac{1}{2} AB$ и $\frac{3}{2} AB$.

394. 1°. Пусть P — точка пересечения касательных в точках A и B к данной окружности O (черт. 644). Так как прямая PA есть радикальная ось данной окружности O и окружности C , а прямая PB — радикальная ось окружностей O и C_1 , то точка P есть радикальный центр окружностей O , C и C_1 . Поэтому прямая PM касается в точке M окружностей C и C_1 и $PA = PB = PM$. Геометрическое место точек M есть окружность с центром P и радиусом PA .

2°. Так как данная окружность O касается в точках A и B окружностей C и C_1 , то центр подобия N окружностей C и C_1 лежит на прямой AB . Кроме того, линия центров окружностей C и C_1 касается в точке M окружности P , и потому точка N лежит вне окружности P , а следовательно, и вне данной окружности O .



Черт. 644.

Таким образом, геометрическое место точек N есть часть прямой AB , внешняя относительно данной окружности (сравнить ещё 3°).

3°. Обратно, каждой точке N прямой AB , которая лежит вне данной окружности, соответствуют две точки M и M' — точки прикосновения касательных, проведённых из точки N к окружности P , и две пары окружностей C, C_1 и C', C'_1 . Центры последних лежат на пересечении прямых MN и $M'N$ с OA и OB .

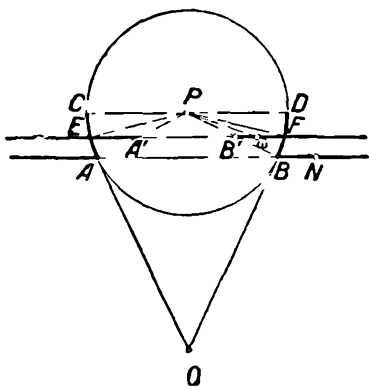
4°. Окружность, описанная около треугольника NMM' , имеет отрезок NP своим диаметром (так как углы NMP и $NM'P$ — прямые); её центром ω служит середина отрезка NP . Но геометрическое место точек N есть часть прямой AB , состоящая из обоих продолжений отрезка AB , а точка P неподвижна. Следовательно, геометрическое место точек ω есть совокупность обоих продолжений отрезка $A'B'$, где A' и B' — середины отрезков PA и PB (черт. 645).

5°. Центр I окружности, вписанной в треугольник NMM' (черт. 646), лежит на биссектрисе NP угла NMM' и на биссектрисе угла NMM' . При этом $\angle PMI = 90^\circ - \angle NMI = 90^\circ - \angle IMM' = \angle PIM$, и, следовательно, $PM = PI$. Таким образом, все точки I лежат на окружности P . Но так как продолжение отрезка PI за точку I проходит

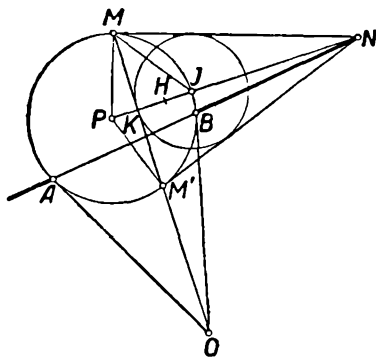
через точку N , а геометрическое место точек N есть часть прямой AB , внешняя относительно окружности P , то геометрическое место точек I есть совокупность двух дуг AC и BD окружности P (черт. 645).

6°. Так как точка N лежит на прямой AB , то поляр MM' точки N относительно окружности P проходит (п. 205) через полюс O прямой AB относительно той же окружности (черт. 646). Так как, кроме того, точки O и P неподвижны, то основание K высоты NK треугольника NMM' лежит на окружности Σ , имеющей отрезок OP своим диаметром. Эта окружность проходит, очевидно, через точки A и B . Геометрическое место точек K есть дуга APB окружности Σ (окружность Σ не показана на чертеже).

Так как точка P лежит на окружности, описанной около треугольника NMM' , и прямая NP есть одна из его высот, то высоты этого треугольника пересекаются в точке H , симметричной с P относительно



Черт. 645.



Черт. 646.

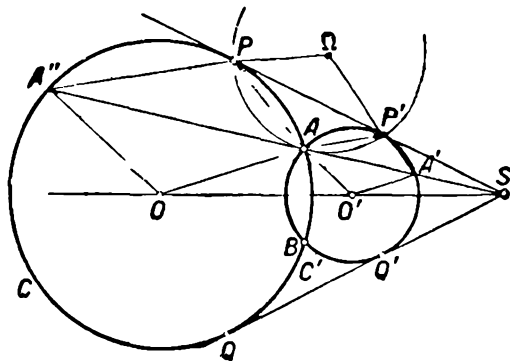
прямой MM' (упр. 70), т. е. относительно точки K . Поэтому $PH = 2PK$, и геометрическое место точек H есть дуга окружности Σ' , гомотетической окружности Σ относительно точки P , причём коэффициент подобия равен 2 (окружность Σ' не показана на чертеже).

7°. Остается ещё показать, что точки пересечения геометрического места точек ω с геометрическим местом точек I , т. е. точки E и F (черт. 645), в которых окружность P пересекает прямую $A'B'$, принадлежат и окружности Σ' .

С этой целью рассмотрим те положения точки N , для которых треугольник NMM' будет равносторонним; таких точек будет две. Для этих положений точки N точка ω совпадает с соответствующей точкой I , а потому точки ω и I совпадают обе либо с E , либо с F ; но при этом и точка пересечения H высот треугольника NMM' совпадает с той же точкой (в равностороннем треугольнике точки ω , I и H совпадают). Следовательно, окружность Σ' проходит через точки E и F .

395. Пусть S — внешний центр подобия окружностей C и C' (черт. 647) и A'', A' — вторые точки пересечения прямой SA с окружностями C и C' . Треугольники $A''PA$ и $AP'A'$ гомотетичны относительно центра подобия S . Далее, $\angle PA''A = \angle APP'$, так как оба эти угла измеряются половиной дуги AP окружности C . Аналогично $\angle P'A'A = \angle AP'R$. Следовательно, треугольники $A''PA$, PAP' и $AP'A'$ подобны. Центры O , O' и Q окружностей C , C' и APP' будут соответственными точками фигур $A''PA$, PAP' и $AP'A'$, и потому четырёхугольники $A''PAO$, $PAP'Q$ и $AP'A'O'$ также будут подобными.

Из подобия этих четырёхугольников имеем: $\angle OAP = \angle QP'A$ и $\angle O'AP' = \angle QPA$, откуда $\angle PQP' = 360^\circ - \angle QPA - \angle PAP' - \angle QP'A = 360^\circ - \angle O'AP' - \angle PAP' - \angle OAP = \angle OAO'$, т. е. угол, под которым отрезок PP' виден из точки Q , равен углу между окружностями C и C' , точнее говоря, между радиусами этих окружностей, проведёнными в точку их пересечения.



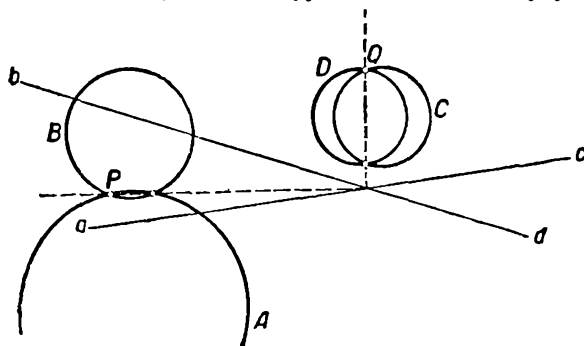
Черт. 647.

Обозначая через r , r' и ρ радиусы окружностей C , C' и PAP' , мы получим из подобия тех же фигур $r:\rho = AP:AP'$ и $\rho:r' = AP:AP'$, откуда $r:\rho = \rho:r'$ и $r:r' = AP^2:AP'^2$. Таким образом, ρ есть среднее пропорциональное между r и r' , и $AP:AP' = \sqrt{r}:\sqrt{r'}$.

Если B — вторая точка пересечения окружностей C и C' , а Q и Q' — точки прикосновения второй общей касательной, то из предыдущего следует, что радиус каждой из окружностей APP' , BPP' , AQQ' и BQQ' есть среднее пропорциональное между r и r' . Таким образом, получается предложение, указанное в упражнении 262, 3°.

396. 1°. Пусть окружности A и B пересекаются в двух точках. Чтобы с помощью инверсии их можно было преобразовать в окружности A' и B' , образующие фигуру, равную той, которую образуют окружности C и D , необходимо, чтобы окружности C и D также пересекались в двух точках и чтобы угол между окружностями A и B равнялся углу между C и D .

Покажем теперь, что эти условия и достаточны. Инверсия S с полюсом в одной из точек пересечения P окружностей A и B и произвольной степенью преобразует их в некоторые две прямые a и b (черт. 648), угол между которыми равен углу между окружностями A и B . Точно так же инверсия T с полюсом в одной из точек пересечения Q окружностей C и D и произвольной степенью преобразует их в некоторые две прямые c и d , угол между которыми равен углу между C и D , т. е. углу между окружностями A и B или между прямыми a и b . Перемещая фигуру, состоящую из окружностей C и D , можно достичь того, что прямые c и d будут совпадать с a и b , как на чертеже 648. При этом окружности C и D будут получаться



Черт. 648.

из A и B с помощью последовательности двух инверсий: первая инверсия S с полюсом P преобразует окружности A и B в прямые a и b , вторая T с полюсом Q преобразует прямые a и b в окружности C и D . На степени инверсий S и T (остававшиеся до сих пор совершенно произвольными) мы наложим теперь только одно ограничение: точки P и Q не должны совпадать между собой.

Так как полюсы P и Q инверсий S и T не совпадают, то последовательность этих двух инверсий можно заменить (упр. 251, 2°) одной инверсией S' и одной симметрией относительно прямой. Следовательно, инверсия S' преобразует пару окружностей A и B в пару окружностей, симметричных с C и D относительно некоторой прямой и потому образующих фигуру, равную фигуре (C, D) . Равенство углов между окружностями A и B и между окружностями C и D оказывается, таким образом, и достаточным.

Итак, можно сказать, что угол между двумя пересекающимися окружностями есть единственный независимый инвариант пары окружностей относительно группы инверсий (ср. пп. 292 и 294).

Так как угол между пересекающимися окружностями C и C' равен (в обозначениях задачи 395 и черт. 647) углу PQP' , то этот угол определяется отношением отрезка PP' общей касательной к отрезку PQ —среднему пропорциональному их радиусов (см. решение задачи 395).

Если бы окружности A и B не пересекались, а касались одна другой, то мы могли бы повторить предыдущие рассуждения. При этом две пары пересекающихся прямых (a, b) и (c, d) заменились бы двумя парами параллельных прямых. Выбрав произвольно степень инверсии S , преобразующей окружности A и B в прямые a и b , мы можем подобрать степень инверсии T , преобразующей окружности C и D в прямые c и d , так, чтобы расстояние между c и d было равно расстоянию между a и b , и затем совместить обе пары прямых. Этот случай можно рассматривать как частный случай предыдущего, когда угол между окружностями равен нулю (или 180°).

2°. Пусть теперь окружности A и B , не имеющие общих точек, можно преобразовать с помощью некоторой инверсии S в две окружности A' и B' (также без общих точек), образующие фигуру, равную той, которую образуют окружности C и D . Перемещая окружности C и D , можно совместить их с окружностями A' и B' . Итак, пусть инверсия S преобразует пару окружностей (A, B) в пару окружностей (C, D) .

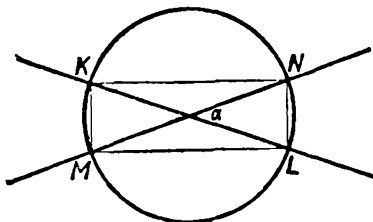
Преобразуем окружности C и D с помощью инверсии T с полюсом в одной из их предельных точек в две concentрические окружности c и d (см. решение упр. 248). Так как окружности C и D имеют две предельные точки, то можно выбрать полюс инверсии T отличным от полюса инверсии S . Последовательность инверсий S и T преобразует окружности A и B в две concentрические окружности c и d . Но эту последовательность инверсий можно заменить одной инверсией S' и симметрией относительно некоторой прямой. Следовательно, инверсия S' преобразует окружности A и B в две concentрические окружности, равные окружностям c и d , а инверсия T — окружности C и D в concentрические окружности c и d . Таким образом, указанное в тексте условие необходимо для возможности преобразования пары окружностей A, B в фигуру, равную той, которую образуют C и D .

Покажем теперь, что то же условие и достаточно. Если это условие выполнено, то окружности A и B преобразуются с помощью некоторой инверсии в concentрические окружности a и b , а окружности C и D в concentрические окружности c и d , причём радиусы окружностей c и d будут пропорциональны радиусам окружностей a и b . Выбрав произвольно степень инверсии, преобразующей окружности A и B в окружности a и b , мы можем (в силу пропорциональности радиусов окружностей a и b , c и d) подобрать степень инверсии, преобразующей окружности C и D в окружности c и d , так, что фигура, состоящая из окружностей c и d , будет равна фигуре, состоящей из окружностей a и b . Перемещая фигуру, состоящую из окружностей C и D , можно достичь того, что пара окружностей (a, b) будет совпадать с парой окружностей (c, d) . Далее можно рассуждать, как и в случае пересекающихся окружностей. Окружности C и D получаются из A и B с помощью последовательности двух инверсий. Путём новорота фигуры (C, D) около общего центра окружностей a и b можно избежать совпадения полюсов обеих инверсий. Эту по-

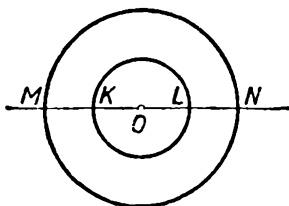
следовательность двух инверсий можно заменить одной инверсией S' и одной симметрией. Инверсия S' преобразует фигуру (A, B) в фигуру, равную (C, D) .

Итак, можно сказать, что единственным независимым инвариантом двух непересекающихся окружностей относительно группы инверсий является отношение радиусов тех концентрических окружностей, в которые данные окружности можно преобразовать одной и той же инверсией.

Переходим далее к рассмотрению сложного отношения λ четырёх точек пересечения двух данных окружностей (или прямых) с ортогональной к ним окружностью (или прямой). В силу задачи 273 это сложное отношение сохраняет свою величину при инверсии.



Черт. 649.



Черт. 650.

Если даны две окружности и выбрана окружность, к ним ортогональная, то значение λ зависит от порядка, в котором рассматриваются точки пересечения. Мы можем для определённости принять за первые две точки точки пересечения ортогональной окружности с одной из данных окружностей, за вторые — две точки её пересечения с другой данной окружностью. Пользуясь результатом задачи 274, легко убедиться, что сложное отношение λ будет иметь при этом (в зависимости от выбранного порядка точек) два значения, произведение которых равно единице. Мы можем поэтому ограничиться тем значением, которое не превосходит единицы по абсолютной величине ($|\lambda| \leq 1$).

Начнём со случая двух пересекающихся прямых KL и MN (черт. 649) и ортогональной к ним окружности $KNLM$. На основании задачи 274 сложное отношение $(KLMN)$, где точки K и L лежат на различных дугах MN , будет равно (по абсолютной величине и знаку) $\lambda = -\frac{KM \cdot KN}{LM \cdot LN} = -\left(\frac{KM}{LM}\right)^2$. Отсюда следует, что λ не зависит от выбора окружности, ортогональной к двум данным прямым, и определяется лишь углом между ними.

Так как любые две пересекающиеся окружности можно с помощью инверсии преобразовать в две пересекающиеся прямые и сложное отношение λ не изменится при инверсии, то и в случае двух пересекающихся окружностей величина λ не зависит от выбора окружности, ортогональной к двум данным, и определяется углом между ними.

В случае двух концентрических окружностей (черт. 650) радиусов R и r ($R > r$) сложное отношение равно (по величине и по знаку) $\lambda =$

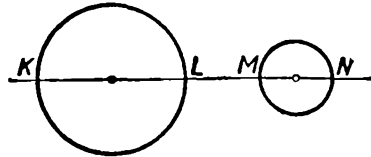
$= \frac{KM}{LM} : \frac{KN}{LN} = \left(\frac{R-r}{R+r} \right)^2$ и потому зависит лишь от отношения радиусов обеих окружностей. Отсюда следует, что в случае двух непересекающихся окружностей величина λ не зависит от выбора окружности, ортогональной к двум данным, и выражается через отношение радиусов тех концентрических окружностей, в которые их можно преобразовать с помощью инверсии.

Из всего сказанного до сих пор вытекает, что *условие возможности преобразования фигуры (A, B) в фигуру, равную (C, D), состоит в равенстве значений λ для обеих пар окружностей.*

Далее в случае двух концентрических окружностей имеем (черт. 650) $KO:MO=r:R$. Так как мы видели выше, что $\left(\frac{R-r}{R+r} \right)^2 = \lambda$, то от-

сюда следует, что $KO:MO = (1 - \sqrt{\lambda}) : (1 + \sqrt{\lambda})$. Но отношение $KO:MO$ можно рассматривать как сложное отношение μ четырёх точек K, M, O и ∞ (п. 199). Точки O и ∞ преобразуются, если подвергнуть концентрические окружности какой-либо инверсии в общие точки всех окружностей, ортогональных к обеим преобразованным окружностям, т. е. в предельные точки преобразованных окружностей.

Итак, если две окружности не имеют общих точек, то сложное отношение μ двух из точек их пересечения с какой-либо окружностью (или прямой), к ним ортогональной, и двух их предельных точек не зависит от выбора ортогональной окружности. Со сложным отношением λ оно связано соотношением $\mu = (1 - \sqrt{\lambda}) : (1 + \sqrt{\lambda})$.



Черт. 651.

Переходим теперь к рассмотрению величин $\nu = \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'}$ и

$\frac{t}{\sqrt{rr'}}$ Рассматривая вместо окружности, ортогональной к двум данным, их линию центров (черт. 651), получим (независимо от того, имеют ли данные окружности общие точки или нет): $\lambda = (KLMN) = \frac{KM}{LM} : \frac{KN}{LN} =$
 $= \frac{d+r-r'}{d-r-r'} : \frac{d+r+r'}{d-r+r'} = \frac{d^2 - (r-r')^2}{d^2 - (r+r')^2} = \frac{d^2 - r^2 - r'^2 + 2rr'}{d^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'} =$
 $= \frac{\nu + 2}{\nu - 2}, \text{ где } \nu = \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'}$

Наконец, если две данные окружности имеют общую касательную, скажем внешнюю, длины t , то $t^2 = d^2 - (r-r')^2 = d^2 - r^2 - r'^2 + 2rr'$, откуда $t : \sqrt{rr'} = \sqrt{\nu + 2}$.

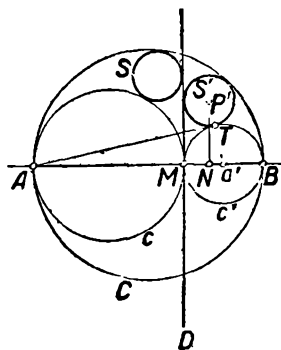
Таким образом, величины μ , ν и $t : \sqrt{rr'}$ выражаются определенным образом через λ , и потому в предыдущем условии возможности

5°. Пусть O и O' — центры окружностей $PA A'$ и $P' A A'$, K и K' — точки пересечения их линии центров с прямыми D и D' . Отложим на линии центров отрезок KO'' , равный $O'K'$. Треугольники AKO'' и $AK'O'$ будут, очевидно, равны, откуда

$$\angle KAO'' = \angle K'AO'. \quad (2)$$

Из подобия треугольников OPK и $O'P'K'$ имеем $OP:O'P' = OK:O'K'$. Заменяя здесь OP равным ему отрезком OA , $O'P'$ — отрезком $O'A$ или $O''A$ и $O'K'$ — отрезком KO'' , получим $OA:O''A = OK:KO''$. Это равенство показывает, что прямая AK есть биссектриса угла A в треугольнике OAO'' . Принимая во внимание равенство (2), находим $\angle OAK = \angle KAJ'' = \angle O'AK'$, откуда $\angle OAO' = \angle KAK'$. Таким образом, угол между двумя окружностями, равный углу OAO' , сохраняет постоянную величину: он равен углу KAK' .

Так как угол OAO' при вершине A треугольника OAO' сохраняет постоянную величину, то не изменяется и сумма двух других углов того же треугольника: $\angle AOU' + \angle AO'O = 180^\circ - \angle OAO' = 180^\circ - \angle KAK'$. Рассмотрим теперь равнобедренные треугольники OAP и $O'AP'$: сумма углов при вершинах O и O' в этих треугольниках постоянна, так как $\angle AOP + \angle AO'P' = (\angle U'OP - \angle O'OA) + (\angle OO'P' - \angle OO'A) = (\angle O'OP + \angle OO'P') - (\angle AOO' + \angle AO'O) = 180^\circ - (180^\circ - \angle KAK') = \angle KAK'$. Сумма углов при вершине A в тех же треугольниках также не изменяется: $\angle OAP +$



Черт. 653.

$\angle O'AP' = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOP) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AO'P') = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle AOP + \angle AO'P') = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle KAK'$. Наконец, в силу постоянства угла OAO' и суммы углов $\angle OAP + \angle O'AP'$ и четвёртый угол при точке A будет постоянным: $\angle PAP' = 360^\circ - \angle OAO' - (\angle OAP + \angle O'AP') = 360^\circ - \angle KAK' - (180^\circ - \frac{1}{2}\angle KAK') = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle KAK'$.

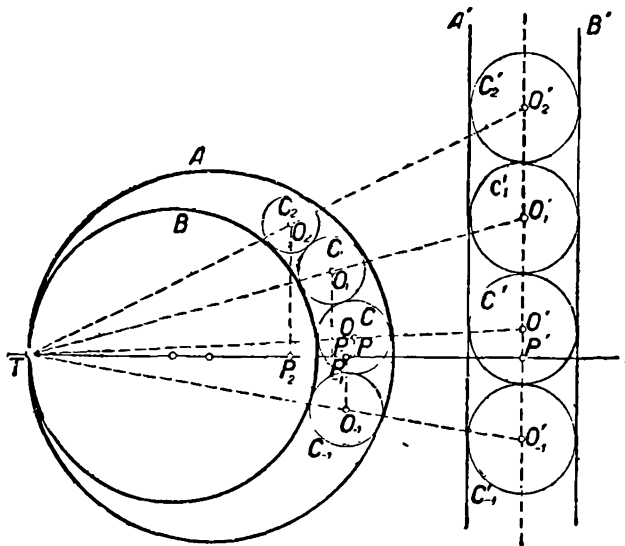
Итак, угол PAP' остаётся постоянным.

398. Пусть M — точка пересечения прямых AB и D (черт. 653); c и c' — окружности, имеющие своими диаметрами отрезки AM и MB ; S — окружность, касательная к C , c и D ; S' — окружность, касательная к C , c' и D .

Инверсия с полюсом A и степенью, равной $AM \cdot AB$, преобразует окружность C и прямую D друг в друга, а окружность c' — в самую себя. Отсюда следует, что та же инверсия преобразует и окружность

S' в самой себя. Поэтому общая касательная к окружностям c' и S' в точке их касания T проходит через полюс инверсии A .

Пусть o' и P' — центры окружностей c' и S' ; N — основание перпендикуляра из точки P' на диаметр AB ; R, r, r' и ρ' — радиусы окружностей C, c, c' и S' . Из подобия треугольников ATo' и $P'No'$ имеем $AO':P'o' = To':No'$, т. е. $\frac{2R-r'}{\rho'+r'} = \frac{r'}{r'-\rho'}$. Упрощая это равенство, находим $\rho'R = (R-r')r'$. Так как $R = r + r'$, то $\rho'R = rr'$. Таким образом, радиус окружности S' есть четвертый пропорциональный к радиусам окружностей C, c и c' .



Черт. 654.

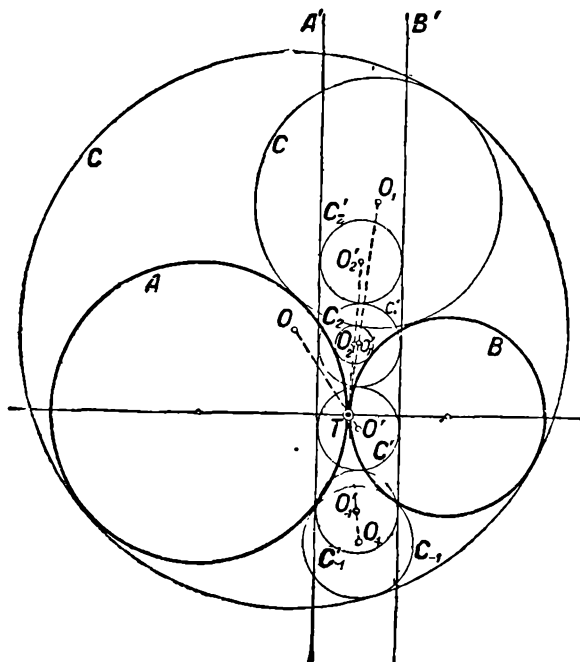
Так как в полученное выражение для ρ' радиусы r и r' входят вполне равноправно, то мы придём к тому же выражению, вычисляя радиус ρ окружности S . Это и показывает, что окружности S и S' равны между собой.

399. Выполним инверсию с полюсом в точке касания T окружностей A и B (черт. 654 и 655) и произвольной степени. Окружности A и B преобразуются в две параллельные прямые A' и B' ; окружности $\dots, C_{-1}, C, C_1, C_2, \dots$ — в равные окружности $\dots, C_{-1}', C', C_1', C_2', \dots$, касающиеся этих прямых.

Пусть $\dots, r_{-1}, r, r_1, r_2, \dots$ — радиусы окружностей $\dots, C_{-1}, C, C_1, C_2, \dots$; r' — радиус каждой из окружностей $\dots, C_{-1}', C', C_1', C_2', \dots$; $\dots, O_{-1}P_{-1}, OP, O_1P_1, O_2P_2, \dots$ и $\dots, O_{-1}'P', O_1'P', O_2'P', \dots$ — расстояния центров тех же окружностей от линии центров окружностей A и B .

Если центры двух последовательных окружностей C_n' и C_{n+1}' , в которые преобразуются окружности C_n и C_{n+1} , лежат по одну сторону от линии центров окружностей A и B , то мы имеем, очевидно, $O_{n+1}'P' - O_n'P' = 2r'$, или

$$\frac{O_{n+1}'P'}{2r'} - \frac{O_n'P'}{2r'} = 1. \quad (1')$$



Черт. 655.

Если же центры окружностей C_n' и C_{n+1}' лежат по разные стороны от линии центров окружностей A и B , то мы будем иметь $O_{n+1}'P' + O_n'P' = 2r'$, или

$$\frac{O_{n+1}'P'}{2r'} + \frac{O_n'P'}{2r'} = 1. \quad (2')$$

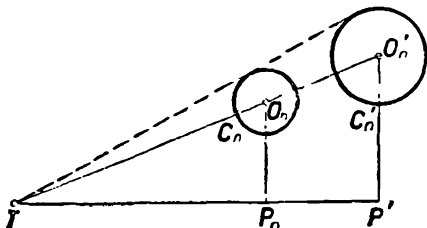
Так как точка T — полюс инверсии — есть центр подобия двух взаимно обратных окружностей C_n и C_n' (черт. 656), то мы имеем $r':r_n = TO_n':TO_n = O_n'P':O_nP_n$, откуда $O_n'P':2r' = O_nP_n:2r_n$. Таким образом, отношение расстояния центра любой из окружностей C_n от линии центров окружностей A и B к диаметру окружности C_n не изменяется при инверсии с полюсом T . В силу этого обстоятельства со-

отношения (1') и (2') переходят соответственно в

$$\frac{O_{n+1}P_{n+1}}{2r_{n+1}} - \frac{O_n P}{2r} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{O_{n+1}P_{n+1}}{2r_{n+1}} + \frac{O_n P}{2r_n} = 1. \quad (2)$$

Если окружности A и B касаются одна другой внутренним образом (черт. 654), то любые две последовательные окружности C_n и C_{n+1}



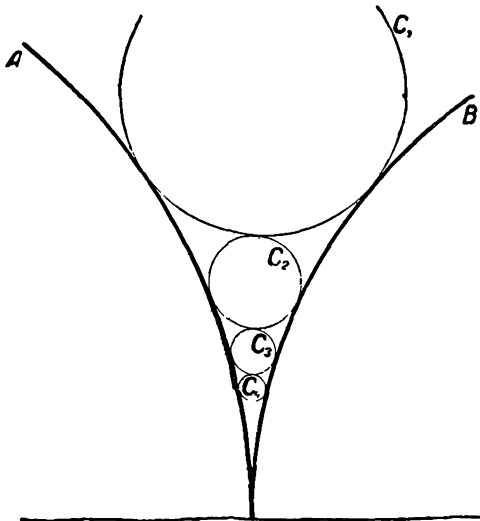
Черт. 656.

касаются одна другой внешним образом. Если окружности A и B касаются одна другой внешним образом, то в ряду окружностей $\dots, C_{-1}, C, C_1, C_2, \dots$ имеются две пары последовательных окружностей (C_{-1}, C и C, C_1 на черт. 655), касающихся одна другой внутренним образом; остальные пары последовательных окружностей

имеют внешнее касание ($C_1, C_2; C_2, C_3; \dots$ на черт. 657).

Если окружности C_n и C_{n+1} касаются одна другой внешним образом, то центры преобразованных окружностей C'_n и C'_{n+1} лежат по одну сторону или по разные стороны от линии центров окружностей A и B , смотря по тому, лежат ли центры окружностей C_n и C_{n+1} по одну сторону или по разные стороны от той же прямой. Отсюда следует, что в случае внешнего касания окружностей C_n и C_{n+1} равенство (1) имеет место, если их центры лежат по одну сторону от линии центров окружностей A и B , а равенство (2) — если их центры лежат по разные стороны от той же прямой.

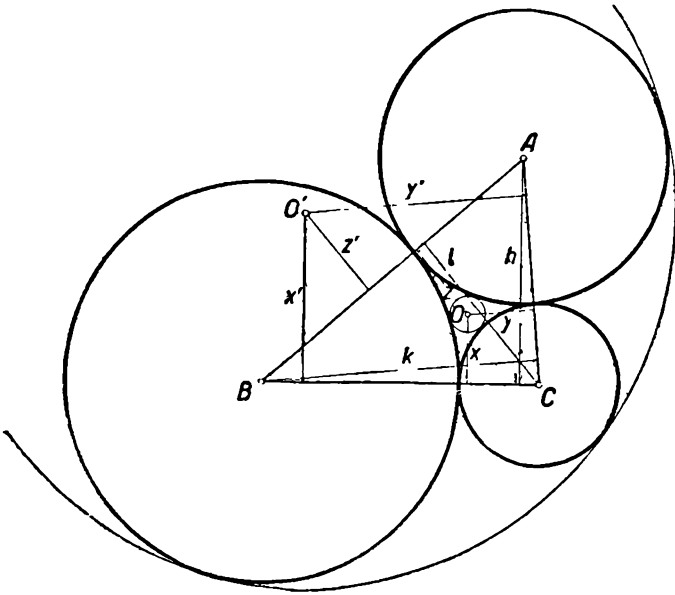
Если окружности C_n и C_{n+1} касаются друг друга внутренним образом, то центры преобразованных окружностей C'_n и C'_{n+1} лежат по одну сторону от линии центров окружностей A и B , если центры данных окружностей C_n и C_{n+1} лежат от нее по разные стороны, и наоборот. Отсюда следует, что в случае внут-



Черт. 657.

ренного касания окружностей C_n и C_{n+1} равенство (1) имеет место, если их центры лежат по разные стороны от линии центров окружностей A и B , а равенство (2) — если их центры лежат по одну сторону от той же прямой.

Чтобы приложить выведенным соотношениям большую общность, заметим, что в случае внешнего касания двух окружностей C_n и C_{n+1} , центры которых лежат по одну сторону от линии центров окружностей A и B , «последующей» окружностью C_{n+1} будет та, которая лежит «ближе» к точке касания T . Для расстояний x и x' центров двух окружностей от прямой PT и их радиусов r и r' будем иметь $\frac{x'}{2r'} - \frac{x}{2r} = 1$, причём x' и r' соответствуют «последующей» окружности. То же равенство имеет место и для окружностей, центры которых лежат по разные стороны от PT , если считать x' положительным, а x — отрицательным.



Черт. 658.

В случае внутреннего касания двух окружностей, центры которых лежат по одну сторону от линии центров окружностей A и B , будем иметь $\frac{x'}{2r'} + \frac{x}{2r} = 1$. То же равенство будет иметь место и для окружностей, центры которых лежат по разные стороны от прямой PT , если считать «последующей» внутреннюю окружность и расстояние x' считать положительным, а x — отрицательным.

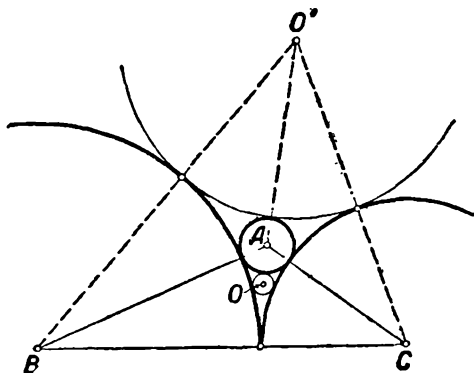
400. Если a , b , c и p — стороны и полупериметр треугольника ABC , то радиусы попарно касающихся окружностей с центрами A , B и C соответственно равны $p - a$, $p - b$ и $p - c$ (упр. 91).

Существуют две окружности, касающиеся этих трёх попарно касающихся друг друга окружностей и притом одинаковым образом (черт. 658

и 659). Пусть O — центр и ρ — радиус окружности, касающейся трёх данных и лежащей внутри криволинейного треугольника, ограниченного дугами данных окружностей. Обозначим через x , y и z расстояния точки O от сторон треугольника, через h , k и l — его высоты.

Применяя формулу (1) решения задачи 399 к двум окружностям A и O , каждая из которых касается окружностей B и C и которые касаются друг друга внешним образом (сравнить черт. 657), будем иметь $\frac{x}{2\rho} - \frac{h}{2(p-a)} = 1$; и аналогично $\frac{y}{2\rho} - \frac{k}{2(p-b)} = 1$; $\frac{z}{2\rho} - \frac{l}{2(p-c)} = 1$. Отсюда $\frac{x}{h} - \frac{\rho}{p-a} = \frac{2\rho}{h}$; $\frac{y}{k} - \frac{\rho}{p-b} = \frac{2\rho}{k}$; $\frac{z}{l} - \frac{\rho}{p-c} = \frac{2\rho}{l}$.

Складывая и применяя результат упражнения 301, находим $\rho \left(\frac{1}{p-a} + \right.$



Черт. 659.

$$+ \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{2}{h} + \frac{2}{k} + \frac{2}{l} = 1.$$

Это выражение для ρ можно преобразовать следующим образом: если Δ — площадь треугольника, r_a , r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей,

$$\text{то } \frac{1}{p-a} = \frac{r_a}{\Delta} \text{ и т. д. (упр. 299); } \frac{2}{h} = \frac{a}{\Delta} \text{ и т. д.}$$

Предыдущее уравнение даёт для

$$\rho \text{ следующее выражение: } \rho = \frac{\Delta}{2p + r_a + r_b + r_c}.$$

Пусть теперь O' и ρ' — центр и радиус второй окружности, касающейся трёх данных. Эта окружность может касаться трёх данных как внутренним (черт. 658), так и внешним (черт. 659) образом; в первом из этих случаев центр её может лежать как внутри, так и вне данного треугольника.

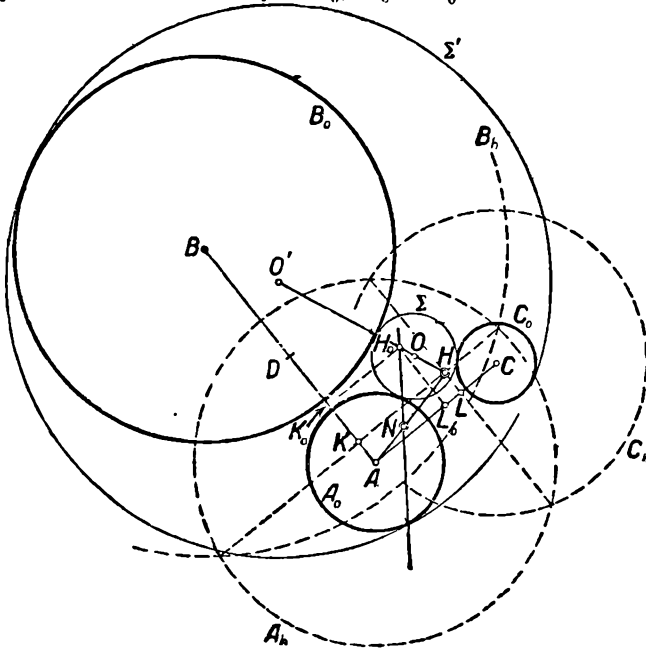
Для радиуса ρ' окружности O' получим аналогично $\rho' = \pm \frac{\Delta}{2p - (r_a + r_b + r_c)}.$

Если x' , y' , z' — расстояния точки O' от сторон треугольника, взятые с определёнными знаками, как указано в решении упражнения 301, то в случае внутреннего касания (черт. 658) мы будем иметь систему уравне-

$$\text{ний } \frac{h}{2r_a} + \frac{x'}{2\rho'} = 1; \quad \frac{k}{2r_b} + \frac{y'}{2\rho'} = 1; \quad \frac{l}{2r_c} + \frac{z'}{2\rho'} = 1, \text{ а в случае внешнего касания (черт. 659) — систему } \frac{h}{2r_a} - \frac{x'}{2\rho'} = 1, \quad \frac{k}{2r_b} - \frac{y'}{2\rho'} = 1, \quad \frac{l}{2r_c} - \frac{z'}{2\rho'} = 1. \text{ Из}$$

этих двух систем получим, как и выше, в первом случае $\rho' = \frac{\Delta}{2p - (r_a + r_b + r_c)}$, во втором случае $\rho' = -\frac{\Delta}{2p - (r_a + r_b + r_c)}$. Если $r_a + r_b + r_c = 2p$, то окружность O' обращается в прямую линию.

401. Для достижения полной общности решения будем рассматривать как положительные, так и отрицательные значения h и обозначим через A_h , B_h и C_h три окружности с центрами A , B и C и радиусами $|a + h|$, $|b + h|$ и $|c + h|$ (черт. 660). В соответствии с этим данные окружности обозначим через A_0 , B_0 и C_0 .



Черт. 660.

Пусть D — середина отрезка AB и K — проекция точки H на прямую AB . Так как прямая HK есть радикальная ось окружностей A_h и B_h , то мы имеем (согласно п. 136) $DK = \frac{(a + h)^2 - (b + h)^2}{2AB}$.

Применим эту формулу к случаю, когда $h = 0$; при этом точка H будет совпадать с радикальным центром H_0 данных окружностей, а точка K — с его проекцией K_0 на прямую AB , и мы найдём $DK_0 = \frac{a^2 - b^2}{2AB}$. Из двух последних равенств имеем:

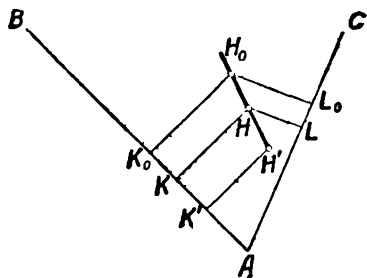
$$K_0K = DK - DK_0 = \frac{(a - b)h}{AB}. \quad (1)$$

Обозначая через L и L_0 проекции точек H и H_0 на прямую AC , найдём совершенно таким же путём, что $L_0L = \frac{(a-c)h}{AC}$, откуда

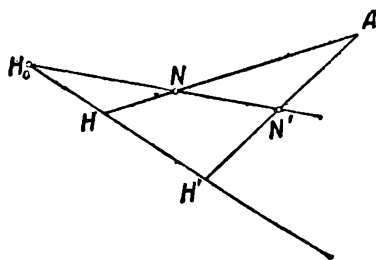
$$\frac{K_0K}{L_0L} = \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Итак, точки H можно получить следующим построением (черт. 661): на прямых AB и AC откладываем от точек K_0 и L_0 отрезки K_0K и L_0L , которые изменяются пропорционально друг другу, и через точки K и L проводим прямые, перпендикулярные соответственно к AB и AC . В силу упражнения 124 *геометрическое место точек H есть прямая линия*.

Рассмотрим теперь наряду с точкой H , соответствующей произвольному значению h , точку H' , соответствующую некоторому фикси-



Черт. 661.



Черт. 662.

рованному значению h' (черт. 661) величины h , и обозначим через K' проекцию точки H' на прямую AB' . Мы будем иметь наряду с соотношением (1) аналогичное соотношение

$$K_0K' = \frac{(a-b)h'}{AB}. \quad (1')$$

Из соотношений (1) и (1') следует:

$$H_0H : H_0H' = K_0K : K_0K' = h : h'. \quad (2)$$

Пусть теперь точки N и N' (черт. 662) делят отрезки AH и AH' соответственно в отношениях $AN : AH = a : (a + h)$ и $AN' : AH' = a : (a + h')$. При этом

$$AN : NH = a : h, \quad (3)$$

и

$$AN' : N'H' = a : h'. \quad (3')$$

Из соотношений (2), (3) и (3') вытекает, что $\frac{H_0H}{H_0H'} \cdot \frac{N'H'}{N'A} \cdot \frac{NA}{NH} = 1$. Таким образом, точки H_0 , N и N' лежат на одной прямой, как это следует из применения теоремы Менелая (п. 193) к этим трём точкам и к треугольнику AHH' .

Другими словами, *геометрическим местом точек N при переменном h является прямая линия*, а именно прямая H_0N' (где точка N' соответствует некоторому определённому значению h).

Выберем теперь h равным радиусу r окружности Σ , касающейся внешним образом трёх данных окружностей A_0 , B_0 и C_0 (черт. 660).

При этом окружности A_r , B_r и C_r пройдут, очевидно, через центр O окружности Σ , и точка O будет радикальным центром этих трёх окружностей. Отсюда следует, что прямая линия, которая служит геометрическим местом точек H , проходит через O . Итак, *прямая линия, являющаяся геометрическим местом точек H , проходит через центр окружности, касающейся внешним образом трёх данных окружностей*. Соответствующая значению $h=r$ точка N делит линию центров AO окружностей A_0 и Σ в отношении $AN:AO=a:(a+r)$ и потому совпадает с их точкой касания. Итак, *прямая линия, являющаяся геометрическим местом точек N , проходит через точку касания окружности A_0 с окружностью, касающейся внешним образом трёх данных окружностей*.

Таким же образом покажем, что те же прямые линии проходят соответственно через центр O' окружности Σ' , касающейся внутренним образом трёх данных окружностей, и через точку касания окружностей Σ' и A_0 .

В случае окружностей, имеющих с данными окружностями разноимённые касания, например в случае окружностей, касающихся внешним образом окружности A_0 и внутренним образом окружностей B_0 и C_0 , или наоборот, можно получить вполне аналогичный результат. Вместо окружностей радиусов $|a+h|$, $|b+h|$, $|c+h|$ надо только рассматривать окружности радиусов $|a-h|$, $|b-h|$, $|c-h|$.

Примечание. Доказанные теоремы дают новое построение окружностей Σ и Σ' , касательных к трём данным (ср. пп. 231—236 и 309—312а). Строим радикальный центр H_0 данных окружностей и радикальный центр H окружностей A_h , B_h и C_h (при произвольном h). Далее строим точку N , как указано в тексте. Точки пересечения прямой H_0N с окружностью A_0 определяют точки касания искомых окружностей с A_0 . Соединяя эти точки касания с центром A окружности A_0 , получим в пересечении с прямой H_0H центры искомых окружностей.

402. Пусть C_1 , C_2 , C_3 и C_4 — данные окружности, σ — искомая окружность, пересекающая их под равными углами.

В пп. 309—310 было показано, что все окружности, пересекающие три данные окружности C_1 , C_2 и C_3 под равными углами, образуют четыре различных семейства: каждой из четырёх осей подобия данных окружностей соответствует одно из этих четырёх семейств в том смысле, что все окружности семейства имеют общей радикальной осью эту ось подобия, а линией центров — перпендикуляр из радикального центра данных окружностей на эту ось подобия. Точки пересечения какой-либо из окружностей одного из этих семейств с двумя из данных окружностей, скажем с C_1 и C_2 , попарно антигомологичны

относительно того из центров подобия окружностей C_1 и C_2 , который лежит на рассматриваемой оси подобия.

Отсюда следует, что центр искомой окружности σ лежит на перпендикуляре, опущенном из радикального центра I_4 окружностей C_1 , C_2 и C_3 на одну из их осей подобия s_4 , и в то же время на перпендикуляре, опущенном из радикального центра I_3 окружностей C_1 , C_2 и C_4 на одну из их осей подобия s_3 . При этом, если точки пересечения окружности σ с окружностями C_1 и C_2 попарно антигомологичны относительно их центра подобия S_{12} , то точка S_{12} лежит как на прямой s_3 , так и на прямой s_4 .

Таким образом, получается следующее *построение центров искомых окружностей*: выбираем произвольно одну из четырёх осей подобия s_4 окружностей C_1 , C_2 и C_3 и одну из тех двух осей подобия s_3 окружностей C_1 , C_2 и C_4 , которые проходят через центр подобия S_{12} окружностей C_1 и C_2 , лежащий на оси s_4 . На прямые s_4 и s_3 опускаем перпендикуляры соответственно из точек I_4 и I_3 ; точка пересечения этих двух перпендикуляров и будет искомой точкой.

Каждой из четырёх осей подобия окружностей C_1 , C_2 и C_3 соответствует два возможных положения центра искомой окружности, а всего получаем 8 искомых точек.

Рассмотрим одну из этих восьми точек — точку O — и построим окружность σ с центром O . Для этого построим какую-либо окружность τ_1 , пересекающую под равными углами окружности C_1 , C_2 и C_3 и соответствующую выбранной оси подобия s_4 . Окружности τ_1 и τ_4 должны иметь своей радикальной осью прямую s_4 . Останется построить окружность σ с центром O так, чтобы прямая s_4 была радикальной осью окружностей τ_1 и σ_4 (прямая, соединяющая точку O с центром окружности σ_4 , заведомо перпендикулярна к s_4). Для этого строим произвольную окружность c с центром на s_4 , ортогональную к σ_4 , а затем окружность σ с центром O , ортогональную к c . Задача будет или не будет иметь решение в зависимости от того, будет ли точка O лежать вне или внутри окружности c .

Построенная таким образом окружность σ будет, по самому способу её определения, пересекать под равными углами окружности C_1 , C_2 и C_3 . Однако мы должны ещё показать, что она пересекает под равными углами все четыре данные окружности. С этой целью рассмотрим какую-либо окружность σ_3 , пересекающую окружности C_1 , C_2 и C_4 под равными углами и соответствующую оси подобия s_3 . Линия центров окружностей σ и σ_3 есть перпендикуляр из точки I_3 на прямую s_3 . Точка пересечения S_{12} осей подобия s_3 и s_4 имеет относительно обеих окружностей σ и σ_3 одну и ту же степень, равную степени той инверсии с полюсом S_{12} , которая преобразует окружности C_1 и C_2 одну в другую; это следует из того, что каждая из окружностей σ и σ_3 пересекает C_1 и C_2 в точках, попарно антигомологичных относительно S_{12} . Из того факта, что линия центров окружностей σ и σ_3 перпендикулярна к s_3 и что точка S_{12} прямой s_3 имеет относительно обеих окружностей одну и ту же степень, следует, что s_3 есть радикальная ось этих двух окружностей. Следовательно, окружность σ пересекает окружности C_1 , C_2 и C_4 , а значит и все четыре данные окружности, под равными углами.

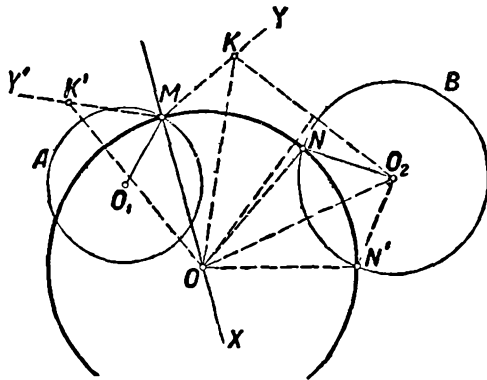
Наибольшее возможное число решений задачи равно восьми.

403. Чтобы не прерывать дальнейшего изложения, решим предварительно следующие две задачи:

А) Построить окружность, пересекающую две данные окружности A и B соответственно под данными углами α и β и притом первую из них, т. е. окружность A , в данной точке M .

Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей A и B , O — центр искомой окружности, N — одна из точек пересечения искомой окружности с окружностью B (черт. 663).

Рассмотрим треугольник OMK , равный треугольнику ONO_2 и имеющий с ним (для определённости) одинаковое направление вращения. Прямая OM образует с радиусом O_1M угол α , прямая MK образует с OM угол β , и отрезок MK равен NO_2 . Наконец, точка O равноудалена от точек K и O_2 , и мы приходим к такому построению.



Черт. 663.

Строим прямую MX , образующую с O_1M угол α ; далее строим прямую MY , образующую с MX угол β , откладываем на ней отрезок MK , равный радиусу окружности B , и восстанавливаем перпендикуляр в середине отрезка KO_2 . Точка пересечения этого перпендикуляра с прямой MX и будет искомой точкой O .

Задача имеет, вообще говоря, четыре решения. В самом деле, за прямую MX можно принять любую из двух прямых, пересекающих O_1M под углом α , и отрезок MK можно отложить от точки M на прямой MY в двух противоположных направлениях.

Замена прямой MY другой прямой MY' , образующей с MX угол β , не приводит к новым решениям. Действительно, точка K заменяется при этом точкой K' , симметричной с K относительно прямой OM . Но $OO_2 = OK = OK'$, и перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка O_2K' , пересекает прямую MX в той же точке O , что и перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка O_2K .

Если, как это сделано в решении упражнения 256, принимать во внимание угол между радиусами двух окружностей, проведёнными в точку их пересечения, то искомые окружности распределятся в два семейства. К первому будут относиться окружности, пересекающие окружности A и B под углами, строго равными α и β или $2d - \alpha$ и $2d - \beta$; ко второму — пересекающие их под углами, строго равными $2d - \alpha$ и β или α и $2d - \beta$.

Если построить полупрямую MX так, чтобы угол O_1MX в точности равнялся α , и отложить отрезок MK так, чтобы угол XMK в точности равнялся β , то мы получим окружность первого семейства. Действительно, если точка O будет лежать на полупрямой MX , то построенная окружность будет, очевидно, пересекать данные под углами, строго равными α и β . Если же точка O будет лежать на продолжении полупрямой MX за точку M , то построенная окружность будет пересекать данные под углами $2d - \alpha$ и $2d - \beta$.

В) Построить окружность, имеющую с двумя данными окружностями A и B общую радикальную ось и ортогональную к третьей данной окружности Γ .

Пользуясь п. 138, легко построить какие-либо две окружности Γ' и Γ'' , ортогональные одновременно к A и к B . В силу п. 139, замечание, каждая из окружностей Γ' и Γ'' должна быть ортогональна и к искомой окружности. Поэтому искомую окружность (если она существует) можно построить, с помощью п. 139, как окружность, ортогональную к окружностям Γ , Γ' и Γ'' ; центром искомой окружности будет радикальный центр этих трёх окружностей, её радиусом — касательная из радикального центра к одной из тех же трёх окружностей.

Переходим теперь к решению самой поставленной задачи.

С) Пусть требуется построить окружность, пересекающую три данные окружности A , B и C под углами, соответственно равными α , β и γ .

Если опять принимать во внимание угол между радиусами двух окружностей, проведёнными в точку их пересечения, то искомые окружности будут естественно распределены в 4 семейства в зависимости от того, пересекает ли искомая окружность три данные под углами, строго равными:

- 1) α , β , γ или $2d - \alpha$, $2d - \beta$, $2d - \gamma$;
- 2) $2d - \alpha$, β , γ или α , $2d - \beta$, $2d - \gamma$;
- 3) α , $2d - \beta$, γ или $2d - \alpha$, β , $2d - \gamma$;
- 4) α , β , $2d - \gamma$ или $2d - \alpha$, $2d - \beta$, γ .

Для определённости начнём с отыскания окружностей, принадлежащих к первому из этих семейств, и даже предположим, что искомая окружность σ пересекает данные под углами, строго равными α , β и γ .

Построим, как было указано выше (задача А), какую-либо окружность σ_1 (черт. 664), пересекающую окружности A и B под углами, строго равными α и β (или же какую-либо окружность σ_1' , пересекающую их под углами, строго равными $2d - \alpha$ и $2d - \beta$). При этом исходная окружность σ и окружность σ_1 (или σ_1') будут принадлежать к одному и тому же семейству (в смысле упр. 256) окружностей, пересекающих A и B под углами α и β . Следовательно, любая окружность, имеющая с A и B общую радикальную ось, пересекает окружности σ и σ_1 , на основании решения упражнения 256, под строго равными (а окружности σ и σ_1' — под строго дополнительными) углами.

Найдём далее среди окружностей, имеющих с A и B общую радикальную ось, две окружности A' и B' , касающиеся окружности σ_1 (или σ_1'), пользуясь способом, указанным в п. 311. Мы предположим пока, что такие окружности существуют. Эти две окружности A' и B' будут касаться в силу только что сказанного и искомой окружности σ (так как касание есть пересечение под углом 0 или $2d$). При этом окружность A' будет касаться окружностей σ и σ_1 одинаковым образом (а окружностей σ и σ_1' — неодинаковым образом), так как она должна пересекать их под строго равными (под строго пополнительными) углами. То же относится и к окружности B' .

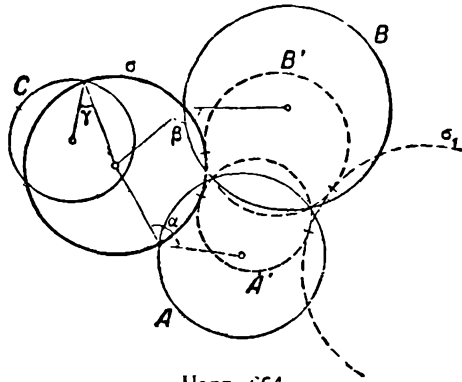
Итак, *искомая окружность σ должна касаться, и притом вполне определённым образом (либо внутренним, либо внешним), каждой из окружностей A' и B' и пересекать окружность C под углом, строго равным γ .*

Построим теперь какую-либо окружность σ_2 , пересекающую окружность C под углом, строго равным γ , касающуюся окружности A' таким же образом, как её касается окружность σ (или же какую-либо окружность σ_2' , пересекающую окружность C под углом, строго равным $2d - \gamma$, и имеющую с окружностью A' касание противоположного характера, чем касание окружности σ с A'). В силу упражнения 256 любая окружность, имеющая с окружностями A' и C общую радикальную ось, пересекает окружности σ и σ_2 под строго равными углами (а окружности σ и σ_2' — под строго пополнительными углами).

Так как среди окружностей, имеющих с A' и C общую радикальную ось, есть окружность (а именно A'), касающаяся окружности σ_2 (или σ_2'), то среди тех же окружностей найдётся (п. 311), вообще говоря, и вторая окружность C' , касающаяся окружности σ_2 (или σ_2'). При этом окружности σ и σ_2 касаются окружности C' одинаковым образом (а окружности σ и σ_2' касаются её различным образом).

Следовательно, *искомая окружность σ должна касаться трёх окружностей A' , B' и C' , которые мы можем построить, и притом каждой из них вполне определённым (либо внешним, либо внутренним) образом.*

Мы отыскивали окружность σ , пересекающую данные окружности под углами, строго равными α , β и γ . Легко видеть, повторяя аналогичные рассуждения, что окружность σ' , пересекающая три данные окружности под углами, строго равными $2d - \alpha$, $2d - \beta$ и $2d - \gamma$, должна касаться тех же окружностей A' , B' и C' , что и окружность σ . Однако с каждой из трёх окружностей A' , B' и C' две окружности σ



Черт. 664.

и σ' имеют разноимённые касания. Это вытекает из того, что при построении окружности σ' можно воспользоваться той же самой вспомогательной окружностью σ_1 или σ_1' , что и выше, и той же самой Вспомогательной окружностью σ_2 или σ_2' , что и выше. Однако окружности σ_1 и σ_1' , а также σ_2 и σ_2' меняются теперь ролями.

Можно показать и обратно, что всякая окружность, касающаяся окружностей A' , B' и C' указанным образом (в смысле внешнего или внутреннего касания), пересекает данные окружности под углами, строго равными α , β и γ или $2d - \alpha$, $2d - \beta$ и $2d - \gamma$.

В самом деле, пусть некоторая окружность σ касается каждой из окружностей A' и B' таким же образом, каким той же самой окружности касается окружность σ_1 , а окружности C' — таким же образом, каким её касается окружность σ_2 .

Окружности σ и σ_1 касаются окружности A' одинаковым образом, т. е. пересекают её под строго равными углами (равными 0 или $2d$). Те же окружности σ и σ_1 пересекают под строго равными углами и окружность B' . Следовательно, любая окружность, имеющая с A' и B' общую радикальную ось, и в частности окружность A , пересекает σ и σ_1 под строго равными углами. Но окружность σ_1 пересекает, по построению, окружность A под углом, строго равным α . Следовательно, и *окружность σ пересекает A под углом, строго равным α* . По той же причине *σ пересекает B под углом, строго равным β* .

Далее окружности σ и σ_2 касаются окружности A' одинаковым образом, так как окружности σ и σ_1 касаются A' одинаковым образом (по определению окружности σ); кроме того, окружности σ_1 и σ_2 также касаются окружности A' одинаковым образом (по определению окружности σ_2). Те же окружности σ и σ_2 касаются (по определению окружности σ) одинаковым образом окружности C' . Следовательно, всякая окружность, имеющая с окружностями A' и C' общую радикальную ось, и в частности окружность C , пересекает окружности σ и σ_2 под строго равными углами. Но окружность σ_2 пересекает, по построению, окружность C под углом, строго равным γ . Следовательно, и *окружность σ пересекает C под углом, строго равным γ* .

Совершенно таким же образом покажем, что всякая окружность σ' , которая касается каждой из окружностей A' и B' иначе, чем её касается окружность σ_1 , а окружности C' — иначе, чем её касается σ_2 , пересекает окружности A , B и C под углами, строго равными $2d - \alpha$, $2d - \beta$ и $2d - \gamma$.

К тем же заключениям мы пришли бы, если в качестве вспомогательной окружности взяли σ_1' вместо σ_1 , или σ_2' вместо σ_2 , или, наконец, σ_1' и σ_2' вместо σ_1 и σ_2 .

Итак, *искомые окружности*, принадлежащие к первому из четырёх семейств, перечисленных в начале решения настоящей задачи, т. е. *пересекающие данные окружности под углами, строго равными α , β , γ или $2d - \alpha$, $2d - \beta$, $2d - \gamma$, касаются трёх окружностей A' , B' и C'* . При этом они образуют одну из четырёх пар окружностей, касающихся A' , B' и C' , в смысле решения упражнения 267. Действительно, из сказанного выше следует, что если одна из искомых окружностей первого семейства касается двух из трёх окружностей, скажем A' и B' , одинаковым образом, то и всякая окружность первого семейства касается их одинаковым образом.

Мы предположили выше, что среди окружностей, имеющих с A и B общую радикальную ось, найдутся две окружности A' и B' , каса-

ющиеся вспомогательной окружности σ_1 (или σ_1'). Это всегда будет иметь место, если окружности A и B не имеют общих точек. Действительно, отыскивая окружности A' и B' , как указано в п. 311, мы получим в этом случае два решения, потому что радикальный центр α окружностей A , B и σ_1 (или A , B и σ_1'), которым мы там пользовались, будет лежать вне каждой из этих трёх окружностей. Однако окружности A' и B' могут существовать и в том случае, когда окружности A и B пересекаются (сравнить черт. 664).

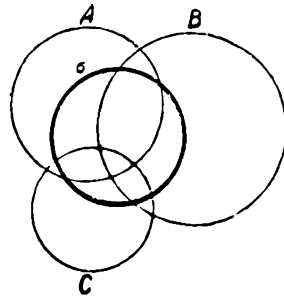
В том случае, когда среди окружностей, имеющих с A и B общую радикальную ось, не существует окружностей, касающихся искомой окружности, и то же обстоятельство имеет место для каждой из пар окружностей B и C , A и C , описанный способ оказывается неприменимым. Это может случиться лишь в том случае, когда все три данные окружности имеют попарно общие точки. Примером может служить расположение данных и искомой окружностей, приведённое на чертеже 665.

Чтобы дать решение поставленной задачи, пригодное и в этом случае, поступим следующим образом. Построив вспомогательную окружность σ_1 (или σ_1'), как указано выше, найдём среди окружностей, имеющих с A и B общую радикальную ось, окружность B_0 , ортогональную к σ_1 (или σ_1'). Способ построения был указан выше (задача B). Искомая окружность σ (или σ') должна быть также ортогональна к B_0 , так как окружности σ и σ_1 (или σ и σ_1') пересекают B_0 под равными углами. Аналогичным образом, построив далее новую вспомогательную окружность σ_2 , пересекающую A и C под углами, соответственно равными α и γ , можно найти окружность C_0 , имеющую с A и C общую радикальную ось и ортогональную к окружности σ_2 . Окружность C_0 будет ортогональна и к искомой окружности σ .

Итак, искомая окружность σ (или σ') должна пересекать окружность A под углом, строго равным α (или $2d - \alpha$), и быть ортогональной к окружностям B_0 и C_0 . Можно показать и обратно, что всякая окружность, удовлетворяющая этим последним условиям, будет удовлетворять и условиям первоначальной задачи. Таким образом мы приходим к упражнению 259.

Заметим, что этот второй путь решения будет заведомо пригоден в тех случаях, когда первый способ может оказаться неприменимым, т. е. когда три данные окружности попарно пересекаются. В самом деле, через всякие две точки, например через точки пересечения окружностей A и B , можно провести окружность, ортогональную к данной окружности σ_1 (сравнить решение упр. 258, примечание).

Однако этот второй путь может оказаться непригодным в тех случаях, когда первый способ заведомо применим. В самом деле, если две окружности (скажем A и B) не пересекаются, то среди окружностей,



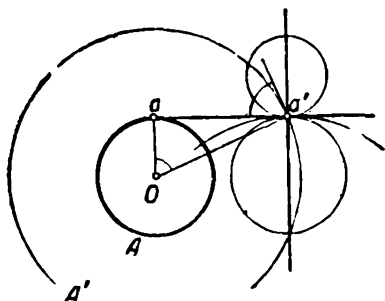
Черт. 665.

имеющих с ними общую радикальную ось, может не существовать окружности, ортогональной к данной окружности (скажем к σ_1).

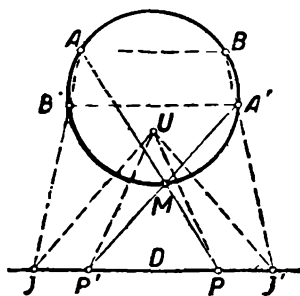
До сих пор мы искали окружности, принадлежащие к первому из четырёх семейств, о которых говорилось в начале решения. Таким же путём можно найти окружности, принадлежащие к каждому из остальных трёх семейств. Надо только заменить один из углов α , β и γ углом, ему дополнительным. Существенно, что при этом каждый раз придётся пользоваться некоторыми вспомогательными окружностями, аналогичными A' , B' и C' или B_0 и C_0 , но, вообще говоря, *отличными от последних*.

Каждое из четырёх семейств окружностей содержит самое большее две искомые окружности, и потому наибольшее возможное число решений задачи — восемь.

403а. Отложим на касательной в произвольной точке a данной окружности A с центром в точке O некоторый отрезок aa' (черт. 666)



Черт. 666.



Черт. 667.

и проведём через точку a' окружность A' , concentрическую с A . Очевидно, что все окружности Σ , имеющие с окружностью A общую касательную длиной aa' , пересекают окружность A' под углом, равным углу aOa' . При этом, если aa' является внешней общей касательной, то окружность Σ пересекает A' под углом, строго равным углу aOa' , а если aa' является внутренней общей касательной, то Σ и A' пересекаются под углом, строго равным $2d - \angle aOa'$.

Итак, если отрезок общей касательной к данной окружности A и к искомой окружности Σ имеет данную длину aa' , то искомая окружность должна пересекать определённую окружность A' , concentрическую с A , под углом, равным углу между окружностью A' и произвольной касательной к окружности A . Точно так же определяем углы между искомой окружностью и вполне определёнными окружностями B' и C' , concentрическими соответственно с окружностями B и C .

Таким путём рассматриваемая задача непосредственно сводится к задаче 403.

404. Через точки A и A' проводим хорды AB и $A'B'$ (черт. 667), параллельные прямой D , и обозначим через I и I' точки пересечения прямых AB' и $A'B$ с прямой D .

через точки M и M' , так как $\angle OAM = \frac{1}{2} \angle O\omega M$ и $\angle OAM' = \frac{1}{2} \angle O\omega M'$.

Выполним теперь инверсию с полюсом A , преобразующую окружность Σ в данную прямую D . Эта инверсия преобразует точки M и M' в точки P и P' , а окружность C , ортогональную к Σ , — в окружность c , имеющую отрезок PP' своим диаметром. Обозначим через s окружность, обратную окружности S . Так как окружность C касается окружности S , то окружность c касается s в некоторой точке T . Точка T есть центр подобия окружностей c и s , и потому прямые PT и $P'T$ пересекают вторично окружность s в концах диаметра QQ' , параллельного прямой D . Точки Q и Q' , не зависящие, очевидно, от положения окружности C , обладают тем свойством, что прямые PQ и $P'Q'$ взаимно перпендикулярны.

Итак, мы доказали существование точек Q и Q' , обладающих искомым свойством, для того случая, когда данная точка A совпадает с одной из точек пересечения прямой $O\omega$ и окружности Σ (а прямая D , перпендикулярная к $O\omega$, задана произвольно). Если теперь выполнить над этой точкой A , данной прямой D и найденными точками Q и Q' одно и то же поступательное перемещение в направлении прямой $O\omega$, то свойство точек Q и Q' сохранится: прямые PQ и $P'Q'$ и в новом своём положении останутся взаимно перпендикулярными.

Отсюда и вытекает существование точек Q и Q' , обладающих искомым свойством, для всякой точки прямой $O\omega$. Чтобы их найти, можно поступить так. Выполним над данной точкой и над данной прямой поступательное перемещение, которое совместило бы данную точку с той точкой, которая обозначена через A на чертеже 668. После этого построим точки Q и Q' , как указано выше, а затем выполним над ними обратное поступательное перемещение.

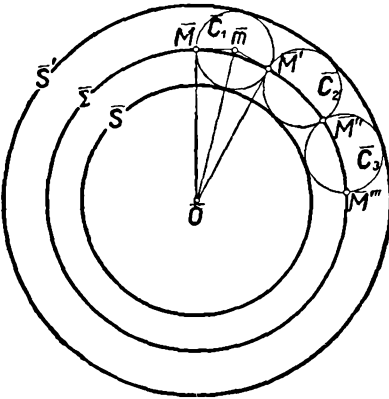
3°. Точки P и P' получаются из точек Q и Q' с помощью построения, указанного в тексте задачи 404. Действительно, точки P и P' являются точками пересечения прямой D с прямыми, соединяющими две данные точки Q и Q' окружности s с произвольной точкой T окружности.

Так как окружности S и Σ по условию задачи не пересекаются, то окружность s не пересекает прямой D . Следовательно, отрезок PP' виден (в силу задачи 405) под постоянным углом из каждой из предельных точек окружности s и прямой D .

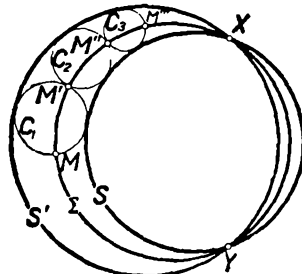
4°. Пусть окружность C_{n+1} совпадает с C_1 . Так как окружности S и Σ не пересекаются, то их можно преобразовать с помощью одной инверсии (упр. 248) в две concentric окружности \bar{S} и $\bar{\Sigma}$ (черт. 669). При этом окружность S' , обратная окружности S относительно Σ , преобразуется в окружность \bar{S}' , также обратную (в силу упр. 250) окружности \bar{S} относительно $\bar{\Sigma}$ и потому concentricкую с \bar{S} и $\bar{\Sigma}$. Окружности C_1, C_2, \dots, C_n преобразуются в равные

окружности $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$, касающиеся окружностей \bar{S} и \bar{S}' и попарно касающиеся друг друга.

Обозначим через \bar{O} общий центр окружностей $\bar{S}, \bar{\Sigma}$ и \bar{S}' , через \bar{M} и \bar{M}' — точки пересечения окружности \bar{C}_1 с окружностью $\bar{\Sigma}$ и через \bar{m} — центр окружности \bar{C}_1 . При этом произведение угла \bar{MOM}' на n будет равно (в силу совпадения окружности \bar{C}_{n+1} с \bar{C}_1) целому числу окружностей. Отсюда следует, что центральный угол \bar{MOM}' соответствует стороне $\bar{M}\bar{M}'$ одного из тех правильных многоугольников, о которых говорится в тексте задачи. Угол \bar{MOm} есть половина этого центрального угла.



Черт. 669.



Черт. 670.

Если \bar{R} — радиус окружности \bar{S} , $\bar{\rho}$ — радиус окружности $\bar{\Sigma}$, то радиус окружности \bar{S}' , обратной \bar{S} относительно $\bar{\Sigma}$, равен $\bar{\rho}^2:\bar{R}$, и $\bar{Om} = \frac{1}{2}(\bar{R} + \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{R}})$. Треугольник \bar{OMm} с гипотенузой $\bar{Om} = \frac{1}{2}(\bar{R} + \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{R}})$ и катетом $\bar{OM} = \bar{\rho}$ подобен треугольнику с гипотенузой $\bar{R}^2 + \bar{\rho}^2$ и катетом $2\bar{R}\bar{\rho}$.

Так как в силу задачи 396 имеет место равенство $\frac{\bar{R}^2 + \bar{\rho}^2}{2\bar{R}\bar{\rho}} = \pm \frac{a^2 - R^2 - \rho^2}{2R\rho}$, то тот же самый острый угол \bar{MOm} будет иметь и прямоугольный треугольник с гипотенузой $\pm(a^2 - R^2 - \rho^2)$ и катетом $2R\rho$.

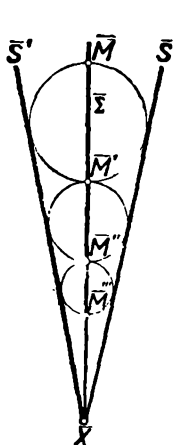
Таким образом, мы получили то условие совпадения окружности C_{n+1} с окружностью C_1 , которое указано в тексте задачи.

До сих пор мы рассматривали случай, когда окружности S и Σ не пересекаются. Пусть теперь эти окружности пересекаются в точках X и Y (черт. 670). Окружность S' , которой касаются окружности C , также пройдет через точки X и Y . Построим опять окружности C_1, C_2, \dots , как указано в условии 4°.

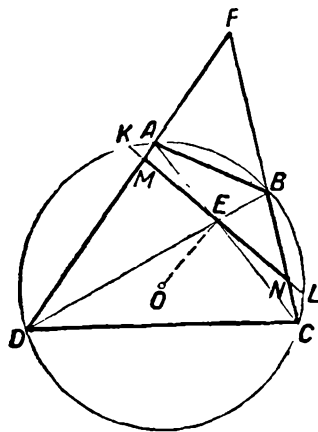
Выполним инверсию с полюсом в точке Y и произвольной степенью. Окружности S , Σ и S' преобразуются при этом в три прямые \bar{S} , $\bar{\Sigma}$ и \bar{S}' (черт. 671), пересекающиеся в точке \bar{X} , обратной точке X , а окружности C_1, C_2, \dots — в окружности $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots$ с центрами на прямой $\bar{\Sigma}$, касающиеся прямых \bar{S} и \bar{S}' и попарно касающиеся друг друга в точках $\bar{M}', \bar{M}'', \dots$, обратных точкам M', M'', \dots .

Рассматривая гомотегию с центром \bar{X} , в которой точке \bar{M} соответствует точка \bar{M}' , мы убедимся, что имеют место равенства $\bar{X}\bar{M}:\bar{X}\bar{M}' = \bar{X}\bar{M}':\bar{X}\bar{M}'' = \bar{X}\bar{M}'':\bar{X}\bar{M}''' = \dots$. Отсюда видно, что точки $\bar{M}, \bar{M}', \bar{M}'', \dots$ имеют своим предельным положением точку \bar{X} , а точки M, M', M'', \dots — точку X .

407. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность O (черт. 672), E — точка пересечения его диагоналей, F — точка пере-



Черт. 671.



Черт. 672.

сечения прямых AD и BC , KL — хорда, проходящая через E и перпендикулярная к OE (так что $EK = EL$), M и N — точки пересечения этой хорды со сторонами AD и BC .

Применяя к треугольнику FMN и каждой из секущих AEC и BED теорему п. 192, найдём $\frac{EM}{EN} \cdot \frac{CN}{CF} \cdot \frac{AF}{AM} = 1$; $\frac{EM}{EN} \cdot \frac{BN}{BF} \cdot \frac{DF}{DM} = 1$. Перемножая почленно эти два равенства и сокращая на произведение $AF \cdot DF = BF \cdot CF$, равное степени точки F относительно окружности O , получим:

$$\frac{EM^2}{EN^2} \cdot \frac{BN \cdot CN}{AM \cdot DM} = 1. \quad (1)$$

Преобразуем теперь произведение $BN \cdot CN$, равное степени точки N относительно окружности O , пользуясь равенством $EK = EL$, следую-

щим образом:

$$\begin{aligned} BN \cdot CN &= NK \cdot NL = (EK + NE) \cdot (EL - NE) = \\ &= (EK + NE) \cdot (EK - NE) = EK^2 - NE^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким же путём найдём:

$$AM \cdot DM = EK^2 - ME^2. \quad (3)$$

С помощью равенств (2) и (3) соотношение (1) можно привести к виду $\frac{EM^2}{EN^2} = \frac{EK^2 - ME^2}{EK^2 - NE^2}$ или, составляя производную пропорцию, к виду $EM^2 : EN^2 = EK^2 : EK^2 = 1$. Отсюда и следует, что $EM = EN$.

408. Применим к треугольнику PQU , где U — точка пересечения прямых PR и QS , и секущим AB и CD (черт. 362) теорему п. 192; получим $\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{B'Q}{B'U} \cdot \frac{A'U}{A'P} = 1$; $\frac{CP}{CQ} \cdot \frac{D'Q}{D'U} \cdot \frac{C'U}{C'P} = 1$. Перемножая почленно эти два равенства и принимая во внимание, что $A'U \cdot C'U = B'U \cdot D'U$, получим:

$$\frac{PA \cdot PC}{PA' \cdot PC'} = \frac{QA \cdot QC}{QB' \cdot QD'}. \quad (1)$$

Точно так же, применяя теорему п. 192 к треугольнику RSU и секущим AB и CD , получим:

$$\frac{RB \cdot RD}{RA' \cdot RC'} = \frac{SB \cdot SD}{SB' \cdot SD'}. \quad (2)$$

Наконец, из подобия треугольников PAA' и SDD' (см. решение задачи 107а), а также треугольников PCC' и SBB' имеем $PA : PA' = SD : SD'$; $PC : PC' = SB : SB'$. Перемножая эти два равенства, получим:

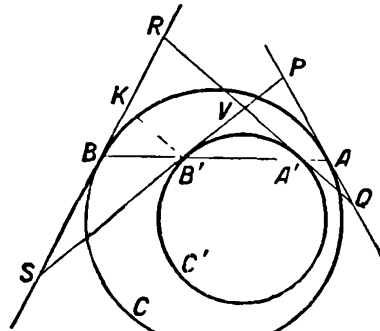
$$\frac{PA \cdot PC}{PA' \cdot PC'} = \frac{SB \cdot SD}{SB' \cdot SD'}. \quad (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) показывают, что отношения степеней каждой из точек P , Q , R и S относительно окружностей $ABCD$ и $A'B'C'D'$ имеют одно и то же значение. В силу упражнения 149 точки P , Q , R и S лежат на одной окружности, имеющей с двумя данными окружностями общую радикальную ось.

Примечание. Рассматривая предельный случай, когда данные прямые, пересекающие обе окружности, сливаются в одну (черт. 673), можно аналогично, но более просто доказать следующую теорему:

Даны две окружности C и C' и пересекающая их прямая; точки пересечения касательных к окружности C в точках её пересечения с данной прямой с касательными к окружности C' в точках её пересечения с той же прямой лежат на одной окружности, имеющей с окружностями C и C' общую радикальную ось.

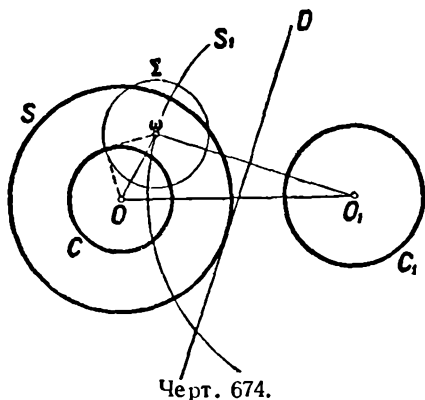
Действительно, обозначим через V точку пересечения прямых PS и QR (черт. 673). Применяя к треугольнику PQV и секущей AA' теорему п. 192,



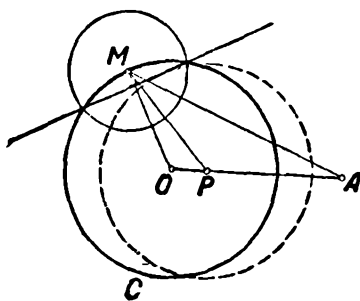
Черт. 673.

будем иметь: $\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{A'Q}{A'V} \cdot \frac{B'V}{B'P} = 1$ или $\frac{AP^2}{AQ^2} \cdot \frac{A'Q^2}{A'V^2} \cdot \frac{B'V^2}{B'P^2} = 1$. Но $A'V^2 = B'V^2$, и потому $\frac{PA^2}{PB^2} = \frac{QA^2}{QB^2}$. Итак, отношение степеней каждой из точек P и Q относительно окружностей C и C' имеет одно и то же значение. Аналогично покажем, что то же имеет место и для любых двух из точек P, Q, R и S . В силу упражнения 149 точки P, Q, R и S лежат на одной окружности, имеющей с данными общую радикальную ось.

409. Обозначим через O общий центр окружностей C и S , через r и R — их радиусы, через O_1 и r_1 — центр и радиус окружности C_1 (черт. 674). Пусть ω — центр одной из окружностей Σ , ортогональных к C и обладающих тем свойством, что радикальная ось D окружностей Σ и C_1 касается S .



Черт. 674.



Черт. 675.

В силу п. 136 (примечание 3^о) разность степеней точки O относительно окружностей Σ и C_1 (равных соответственно r^2 и $OO_1^2 - r_1^2$) равняется удвоенному произведению расстояния между центрами ωO_1 этих окружностей на расстояние R точки O от радикальной оси D , т. е.

$$r^2 - (OO_1^2 - r_1^2) = 2R \cdot \omega O_1$$

или

$$2R \cdot \omega O_1 = r^2 + r_1^2 - OO_1^2. \quad (1)$$

Отсюда видно, что расстояние ωO_1 есть величина постоянная. Обратно, если центр ω окружности, ортогональной к C , выбрать так, чтобы удовлетворялось соотношение (1), то расстояние от точки O до радикальной оси D будет равно R . Следовательно, геометрическое место точек ω есть окружность S_1 с центром в точке O_1 .

Вторая половина доказываемого предложения вытекает из того, что соотношение (1) симметрично как относительно r и r_1 , так и относительно R и $O_1\omega$.

410. Пусть каждая точка M окружности C с центром O служит центром окружности радиуса $k \cdot MA$, где k — данный коэффициент (черт. 675). В силу симметрии фигуры относительно прямой OA искомая точка P должна лежать на этой прямой. На основании реше-

ния упражнения 218 имеем для любой точки P прямой OA равенство $MP^2 = MO^2 \cdot \frac{PA}{OA} + MA^2 \cdot \frac{OP}{OA} - OP \cdot PA$. Степень точки P относительно окружности с центром M и радиусом $k \cdot MA$ будет при этом равна $MP^2 - k^2 \cdot MA^2 = MO^2 \cdot \frac{PA}{OA} + MA^2 \cdot \left(\frac{OP}{OA} - k^2 \right) - OP \cdot PA$. Эта

степень не будет зависеть от положения точки M на окружности C , если в правую часть не будет входить MA , т. е. если выбрать точку P так, чтобы удовлетворялось условие $OP = k^2 \cdot OA$.

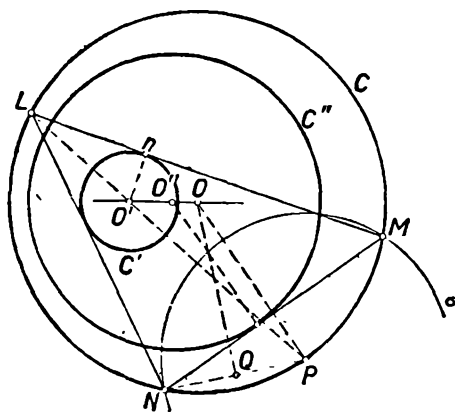
При этом расстояние точки P от радикальной оси обеих окружностей определится (на основании п. 136, примечание 3°) как частное от деления разности степеней точки P относительно обеих окружностей на удвоенное расстояние между их центрами. Отсюда непосредственно следует, что и это расстояние точки P от радикальной оси не зависит от положения точки M на окружности C .

Приведённые рассуждения сохраняют полностью свою силу (видоизменяются несколько лишь приводимые выше формулы), если вместо $k \cdot MA$ радиус окружности с центром M взять равным

$k\sqrt{MA^2 - a^2}$, где A и a — центр и радиус второй данной окружности. В частности при этом сохраняется соотношение $OP = k^2 \cdot OA$.

411. Пусть O и O' — центры данных окружностей (черт. 676), r и r' — их радиусы. Далее пусть касательные из точки L окружности C к окружности C' пересекают второй раз окружность C в точках M и N . Прямая LO' пересекает вторично окружность C в некоторой точке P , равноудалённой от точек M и N в силу равенства углов MLP и NLP . Опустим из O перпендикуляр OQ на прямую NP . Если n — точка касания прямой LM с окружностью C' , то треугольники POQ и $O'Ln$ подобны, так как $\angle MLP = \frac{1}{2} \angle PON = \angle POQ$. Из подобия этих треугольников имеем $\frac{1}{2} NP : r = r' : LO'$; $NP = \frac{2rr'}{LO'}$. Отсюда

$$\frac{NP}{PO'} = \frac{2rr'}{LO' \cdot PO'} = \frac{2rr'}{r^2 - OO'^2} = k, \quad (1)$$

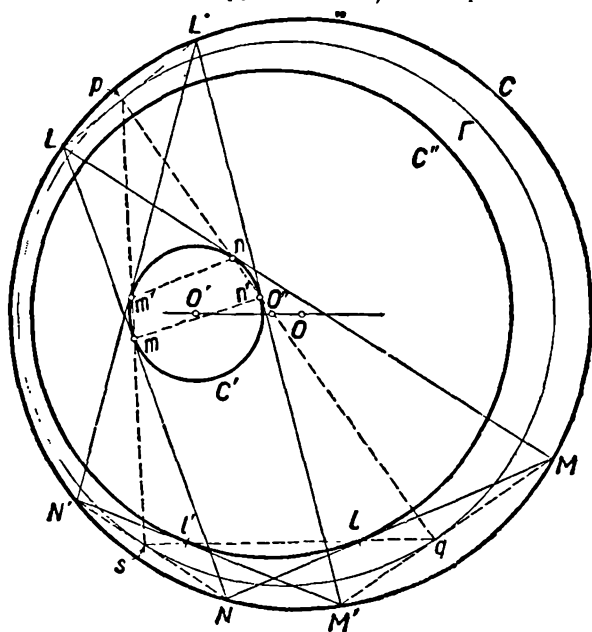


Черт. 676.

так как $LO' \cdot PO'$ есть (по абсолютной величине) степень точки O' относительно окружности C .

Окружность σ с центром P и радиусом $PM=PN$ удовлетворяет условию задачи 410 (так как $k=PN:PO'$ не зависит от выбора точки L); следовательно, радикальная ось окружностей C и σ , т. е. прямая MN касается (при любом положении точки L) определённой окружности C'' с центром O'' на прямой OO' .

Рассмотрим теперь две произвольные точки L и L' окружности C (внешние по отношению к окружности C') и построим соответствующие



Черт. 677.

треугольники LMN и $L'M'N'$ (черт. 677). Пусть m , n , m' и n' — точки касания прямых LN , LM , $L'N'$ и $L'M'$ с окружностью C' .

Пусть прямая nn' пересекает прямые LL' и MM' в точках p и q ; при этом $\angle pLn = \angle qM'n'$; $\angle pnL = \angle qn'M'$ и, следовательно, $\angle Lpn = \angle M'qn'$. Поэтому существует окружность Γ , касающаяся прямых LL' и MM' в точках их пересечения p и q с прямой nn' .

Применим теперь сказанное в примечании к решению задачи 408 к окружностям C' и Γ и секущей nn' . Касательные к C' в точках n и n' и касательные к Γ в точках p и q имеют своими точками пересечения точки L , L' , M и M' окружности C . Следовательно, окружности C , C' и Γ имеют общую радикальную ось.

Итак, мы доказали, что существует окружность Γ , имеющая с C и C' общую радикальную ось и касающаяся прямых LL' и

MM' в точках p и q пересечения этих прямых с прямой nn' . Таким же образом можно доказать, что существует окружность Γ' (на чертеже не показана), имеющая с C и C' общую радикальную ось и касающаяся прямых LL' и NN' в точках их пересечения с прямой mm' .

Применим теперь к четырёхугольнику $mm'nn'$ второе предложение упражнения 239. Из этого предложения следует, что прямые mm' и nn' пересекаются в точке p прямой LL' . Окружности Γ и Γ' совпадают, так как они обе касаются прямой LL' в точке p , а их центры лежат на прямой OO' .

Итак, окружность Γ , имеющая с окружностями C и C' общую радикальную ось, касается прямых LL' , MM' и NN' в точках p , q и s , где эти прямые пересекают прямые mm' и nn' .

Прямая qs образует с прямыми MM' и NN' равные углы. Кроме того, будут равны углы $MM'N'$ и MNN' . Следовательно, в треугольниках $M'I'q$ и NIs , где I и I' — точки пересечения прямой qs с MN и $M'N'$, будут равны и третьи углы — $\angle M'I'q$ и $\angle NIs$. Поэтому существует окружность \bar{C} , касающаяся прямых MN и $M'N'$ в точках I и I' (окружность \bar{C} не показана на чертеже). Совершенно таким же образом, как это было сделано выше для окружностей C , C' и Γ , покажем, что эта новая окружность \bar{C} имеет с окружностями C и Γ общую радикальную ось.

Обе окружности \bar{C} и C'' касаются прямых MN и $M'N'$, а их центры лежат на прямой OO' . Кроме того, центры обеих окружностей лежат, как в этом можно убедиться хотя бы из рассмотрения чертежа 677, на одной и той же биссектрисе углов между прямыми MN и $M'N'$. Отсюда вытекает, что \bar{C} совпадает с C'' .

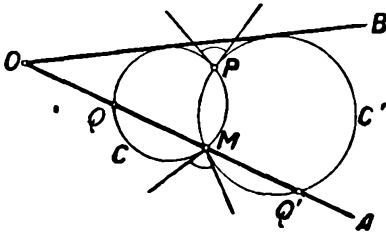
В том, что окружность \bar{C} совпадает с C'' , можно более строгим образом убедиться так. Окружность \bar{C} имеет с окружностями C и Γ общую радикальную ось и касается прямой MN . Так как существуют (п. 311) лишь две окружности, удовлетворяющие этим обоим условиям, то окружность \bar{C} необходимо совпадает с одной из них. Далее, при непрерывном перемещении точки L' , а следовательно, и точек M' и N' по окружности C , окружность \bar{C} , касающаяся также и $M'N'$, могла бы изменяться лишь непрерывным образом; но непрерывное изменение в данном случае невозможно (существует всего-навсего два возможных положения окружности \bar{C}). Следовательно, окружность \bar{C} не изменяется при перемещении прямой $M'N'$; иначе говоря, окружность \bar{C} касается прямой $M'N'$ в любом её положении, и потому совпадает с C'' .

Итак, окружности C и Γ имеют общую радикальную ось как с окружностью C' , так и с окружностью \bar{C} , т. е. с окружностью C'' . Следовательно, окружности C , C' и C'' имеют общую радикальную ось.

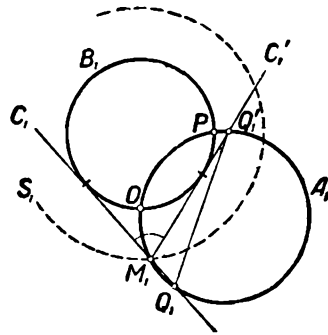
Пусть теперь, как и выше, r и r' — радиусы окружностей C и C' (черт 676) и $d = OO'$. Расстояние центра O'' окружности C'' от цен-

плоскости, внешней по отношению к обеим окружностям (т. е. к части плоскости, содержащей прямую OB), будет равен углу между прямыми C_1 и C_1' , в котором лежит окружность OB_1P . Мы приходим к задаче: найти на окружности OA_1P точку, из которой окружность OB_1P видна под данным углом.

Геометрическое место точек, из которых данная окружность видна под данным углом, есть окружность, концентрическая с данной. Следовательно, точка M_1 есть точка пересечения окружности OA_1P с вполне определённой окружностью S_1 , концентрической с окружностью OB_1P , а M есть точка пересечения прямой OA с окружностью S , обратной по отношению к окружности S_1 .



Черт. 679.



Черт. 680.

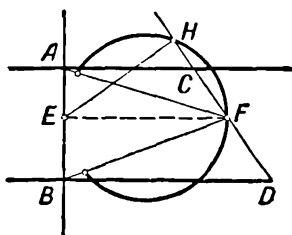
2°. При перемещении точки M_1 по дуге OA_1P от O к P , т. е. при перемещении точки M по стороне OA угла AOB , угол, о котором идёт речь, убывает от $2d$ до некоторого определённого значения (соответствующего наибольшему расстоянию точки M_1 от центра окружности OB_1P), а затем снова возрастает до $2d$.

3°. Окружность PQQ' преобразуется в прямую Q_1Q_1' , соединяющую вторые точки пересечения касательных C_1 и C_1' с окружностью OA_1P . Но прямая Q_1Q_1' остаётся касательной к некоторой окружности (задача 411), имеющей с окружностями OA_1P и OB_1P общую радикальную ось и потому проходящей через точки O и P . Следовательно, окружность PQQ' , обратная прямой Q_1Q_1' , остаётся касательной к некоторой прямой, проходящей через точку O .

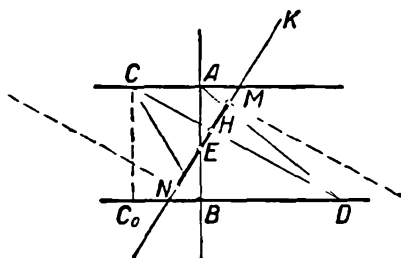
413. Так как площадь трапеции и её высота AB сохраняют постоянные значения, то и сумма оснований $AC + BD$ сохраняет постоянное значение.

Если отрезки AC и BD отложены в одну сторону (черт. 681), то середина F отрезка CD остаётся неподвижной. Основание H перпендикуляра, опущенного из середины E отрезка AB на прямую CD , лежит на окружности, имеющей EF своим диаметром. Геометрическое место точек H есть часть этой окружности, внешняя по отношению к треугольнику AFB .

Если отрезки AC и BD отложены в противоположные стороны (черт. 682), то проекция C_0D диагонали CD на прямую BD , равная $AC + BD$, сохраняет постоянную величину. Следовательно, угол CDB сохраняет постоянное значение, и прямая CD перемещается парал-



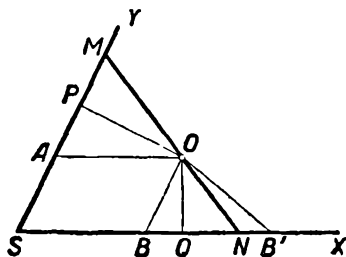
Черт. 681.



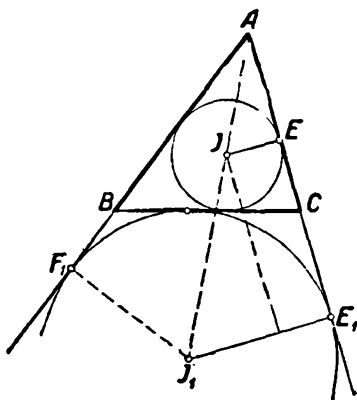
Черт. 682.

лельно самой себе. Геометрическое место точек H есть отрезок прямой EK , перпендикулярной к CD и проходящей через E . Этот отрезок имеет своими концами точки пересечения M и N прямой EK с прямыми, параллельными CD и проходящими через точки A и B (так как точка A есть крайнее положение точки C , а точка B — точки D).

414. Через точку O , лежащую внутри угла XSU , пусть требуется



Черт. 683.



Черт. 684.

провести секущую MON так, чтобы площадь треугольника MNS равнялась данной величине Δ . Строим параллелограмм $SAOB$ (черт. 683). Тогда, проводя прямые OP и OQ , перпендикулярные соответственно к SU и к SX , будем иметь $AM \cdot OP + BN \cdot OQ = 2(\Delta - \text{пл. } SAOB)$. Строим отрезок BB' так, чтобы $\Delta - \text{пл. } SAOB = \text{пл. } BOB'$. Тогда $AM \cdot OP + BN \cdot OQ = BB' \cdot OQ$, или $AM \cdot OP = NB' \cdot OQ$. Задача сводится к построению по данным точкам A и B' секущей MON , для которой $AM : B'N = OQ : OP$ (упр. 216).

415. Зная угол A и периметр $2p$ искомого треугольника ABC , можно построить точки касания E_1 и F_1 (черт. 684) вневписанной

окружности, касающейся стороны BC , с продолжениями сторон AC и AB , так как $AE_1 = AF_1 = p$ (упр. 90а). Следовательно, можно построить и самую вневписанную окружность.

Зная площадь S и периметр, можно построить радиус R вписанной окружности, равный $\frac{S}{p}$ (упр. 299), а следовательно, и самую вписанную окружность. Сторона BC искомого треугольника будет внутренней общей касательной к обеим построенным окружностям.

В силу соотношения $S = pR$ наибольшая возможная площадь получится при данных значениях угла A и полупериметра p , если R будет иметь наибольшее возможное значение, т. е. если обе построенные окружности будут внешним образом касаться друг друга. При этом треугольник ABC будет равнобедренным.

416. Пусть $BC = a$, $2p$, S — данные сторона, периметр и площадь треугольника, I и I_1 — центры вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон, R и R_1 — радиусы тех же окружностей, E и E_1 — точки их касания со стороной AC (черт. 684).

В силу упражнения 90а имеем: $EE_1 = AE_1 - AE = p - (p - a) = a$. В силу упражнения 299 имеем:

$$R = \frac{S}{p}, \quad R_1 = \frac{S}{p - a}. \quad (1)$$

Таким образом, можно построить отрезок $EE_1 = a$ и окружности I и I_1 ; строя общие касательные к обеим окружностям, получаем искомым треугольник.

Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы окружности I и I_1 были расположены одна вне другой или касались одна другой внешним образом, т. е. чтобы $I_1I^2 = a^2 + (R_1 - R)^2 \geq (R_1 + R)^2$, откуда после упрощений находим: $a^2 \geq 4RR_1$.

При данных a и S радиусы R и R_1 оба возрастают с уменьшением p в силу формул (1). Наименьшее значение p соответствует этому равенству $a^2 = 4RR_1$, т. е. $I_1I = R + R_1$. При этом треугольник ABC будет равнобедренным. Итак, из всех треугольников с данными стороной a и площадью S наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Точно так же при данных a и p радиусы R и R_1 возрастают с увеличением S в силу формул (1). Наибольшее значение S соответствует опять равенству $a^2 = 4RR_1$, т. е. $I_1I = R + R_1$. Итак, из всех треугольников с данными стороной a и периметром $2p$ наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Примечания: 1°. Выбрать среди всех треугольников с данным периметром $2p$ и данной стороной a тот, который имеет наибольшую площадь, можно также, исходя из выражения площади треугольника через его стороны, приведенного в п. 251. Представив выведенную там формулу в виде $S^2 = \frac{1}{4} p(p-a)[a^2 - (b-c)^2]$, мы видим, что при данных p

и a площадь S будет тем больше, чем меньше будет $|b - c|$, и будет наибольшей при $b = c$.

2° Выбрать среди всех треугольников с данной площадью S и данной стороной a тот, который имеет наименьший периметр, можно ещё так. Пусть Δ — равнобедренный треугольник, имеющий площадь S , периметр $2p$ и основание a , Δ' — произвольный неравнобедренный треугольник с площадью S , периметром $2p'$ и основанием a . Требуется показать, что $p < p'$.

Построим равнобедренный треугольник Δ_1 с основанием a и периметром $2p'$ и обозначим через S_1 его площадь. Тогда, сравнивая треугольники Δ' и Δ_1 , имеющие одно и то же основание и один и тот же периметр $2p'$, получим в силу предыдущего $S_1 > S$. Отсюда следует, обозначая через h высоту каждого из треугольников Δ и Δ' , опущенную на сторону a , и через h_1 — соответствующую высоту треугольника Δ_1 , что $h_1 > h$, а следовательно, из сравнения равнобедренных треугольников Δ и Δ_1 , что и $p' > p$ (так как большей проекции соответствует большая наклонная, то в равнобедренных треугольниках с равными основаниями большей высоте соответствует и большая боковая сторона).

417. Первое решение. Допустим, что среди всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ есть треугольник ABC , имеющий наибольшую площадь. Если бы две из сторон, например AB и AC , были не равны между собой, то мы могли бы увеличить площадь треугольника, заменив его равнобедренным треугольником $A'BC$ с тем же основанием BC и с тем же периметром (задача 416). Отсюда следует, что $AB = AC$. Точно таким же путём докажем, что $AB = BC$. Итак, среди всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Примечание. Приведённое только что решение основано на предположении, что среди всех треугольников с данным периметром существует треугольник, имеющий наибольшую площадь. Однако существование такого треугольника не может считаться очевидным (ср. примечание к первому решению задачи 366). Приводим поэтому второе решение, в котором существование треугольника с наибольшей площадью заранее не предполагается.

Второе решение. Пусть Δ — равносторонний треугольник с периметром $2p$, и Δ' —какой-либо другой треугольник с тем же периметром. Среди сторон a', b' и c' треугольника Δ' должна найтись сторона, меньшая $\frac{2}{3}p$, и сторона, бо́льшая $\frac{2}{3}p$. Пусть $a' < \frac{2}{3}p$ и $\frac{2}{3}p < c'$.

Рассмотрим сначала случай, когда $b' > \frac{2}{3}p$; в этом случае имеем $\frac{2}{3}p - a' > c' - \frac{2}{3}p$. Построим треугольник Δ'' со сторонами $a'' = \frac{2}{3}p$; $b'' = b'$; $c'' = a' + c' - \frac{2}{3}p$.

Легко проверить, что $a'' + c'' > b''$; $a'' + b'' > c''$; $b'' + c'' > a''$. Действительно,

$$1) a'' + c'' = a' + c' > b' = b'';$$

2) $a'' + b'' = \frac{2}{3}p + b'$, но $\frac{2}{3}p + b' > a' + c' - \frac{2}{3}p$, так как в данном случае $b' > \frac{2}{3}p$; $a' + c' < \frac{4}{3}p$;

$$3) b'' + c'' = \frac{4}{3}p > a''.$$

Сравним площади S'' и S' треугольников Δ'' и Δ' . Имеем $b'' = b'$ и $a' < c'' < a'' < c'$, откуда $|a'' - c''| < |a' - c'|$. В силу примечания 1° к решению задачи 416, найдём, что $S'' > S'$. Сравнивая далее таким же образом площади S и S'' треугольников Δ и Δ'' , находим $S > S''$. Итак, $S > S'' > S'$, и потому $S > S'$.

Рассмотрим далее случай, когда $b' < \frac{2}{3}p$; в этом случае имеем $\frac{2}{3}p - a' < c' - \frac{2}{3}p$. Построим треугольник Δ'' со сторонами $c'' = \frac{2}{3}p$; $b'' = b'$; $a'' = a' + c' - \frac{2}{3}p$.

Легко проверить, что $a'' + c'' = a' + c' > b' = b''$; $a'' + b'' = \frac{4}{3}p > c''$; $b'' + c'' = \frac{2}{3}p + b' > a' + c' - \frac{2}{3}p = a''$, так как $b' > \frac{1}{3}p$ и $a' + c' - b' < \frac{4}{3}p$.

Сравним площади S'' и S' треугольников Δ'' и Δ' . Имеем $b'' = b'$ и $a' < c'' < a'' < c'$, откуда $|a'' - c''| < |c' - a'|$ и в силу задачи 416 опять $S'' > S'$. Далее, как и в первом случае, $S > S''$ и потому $S > S'$.

Если, наконец, $b' = \frac{2}{3}p$, то мы имеем $S > S'$ в силу последнего предложения задачи 416.

Таким образом показано, что площадь S треугольника Δ больше площади S' любого другого треугольника с тем же периметром.

418. Чтобы не прерывать дальнейшего изложения, докажем предварительно следующую теорему:

Во всяком четырёхугольнике разность между суммами квадратов двух пар противоположных сторон равна удвоенному произведению одной из его диагоналей на проекцию на неё другой диагонали. (При этом из суммы квадратов сторон AB и CD , черт. 685, которым соответствует тупой угол $\angle AEB = \angle CED$ между диагоналями, вычитается сумма квадратов сторон, соответствующих острому углу $\angle BEC = \angle AED$.)

Пусть L и M — проекции вершин B и D четырёхугольника $ABCD$ на диагональ AC . Мы должны доказать, что

$$(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + AD^2) = 2AC \cdot ML. \quad (1)$$

Имеем $AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2AE \cdot EL$; $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2EC \cdot EL$; $CD^2 = CE^2 + DE^2 + 2EC \cdot ME$; $AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot ME$. Отсюда $(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + AD^2) = 2AE \cdot EL + 2EC \cdot ME + 2EC \cdot EL + 2AE \cdot ME = 2(AE + EC)(ME + EL) = 2AC \cdot ML$. Таким образом, соотношение (1) доказано.

Наконец, проекцию CN отрезка CC_1 на прямую CM , перпендикулярную к AB , можно найти из соотношения пл. $ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ABC_1 = \frac{1}{2} AB \cdot (CM + C_1L) = \frac{1}{2} AB \cdot CN$.

Отсюда

$$CN = \frac{2 \text{ пл. } ABCD}{a}. \quad (9)$$

Итак, мы приходим к следующему построению. Строим отрезки $C_1N = LM$ и CN по формулам (8) и (9) и отрезок CC_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника CC_1N . Построив отрезок $BC_1 = m$ по формуле (3), можно построить по трём сторонам треугольник BCC_1 . Вершину A можно теперь найти, проводя прямую BA , параллельную C_1N , и откладывая отрезок BA , равный a . Наконец, положение вершины D определяется её расстояниями $CD = c$ и $AD = d$ от точек C и A .

Если задача возможна, то она имеет, вообще говоря, два решения. Действительно, при построении треугольника BCC_1 по трём сторонам мы получим два возможных положения точки B (точки B и B_1 на черт. 686), симметричных относительно прямой CC_1 . Получаем четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1CD_1$.

Если построить точки A' , B' и C' , соответствующие точкам A , B и C в инверсии с полюсом D и произвольной степенью, то мы будем иметь $\angle A'B'B = \angle BAA'$ и $\angle BB'C' = \angle BCC'$, откуда

$$\begin{aligned} \angle A'B'C' &= \angle A'B'B + \angle BB'C' = 360^\circ - \angle BAD - \angle BCD = \\ &= \angle ADC + \angle ABC = \angle C_1BA + \angle ABC = \angle C_1BC. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее мы имеем, согласно решению упражнения 270, 1°,

$$A'B':B'C' = (AB \cdot CD):(BC \cdot AD) = ac:bd. \quad (11)$$

Если построить аналогично точки A_1' , B_1' и C_1' (для упрощения не показанные на чертеже), исходя из четырёхугольника $A_1B_1CD_1$, то мы получим:

$$\angle A_1'B_1'C_1' = \angle C_1B_1C; \quad (10')$$

$$A_1'B_1':B_1'C_1' = ac:bd. \quad (11')$$

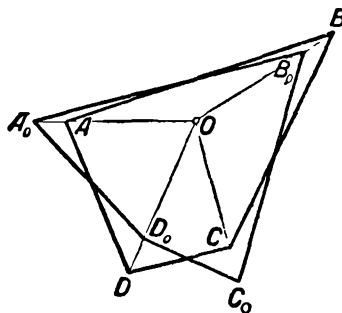
Полученные соотношения (10), (11), (10') и (11') показывают, что треугольник, рассмотренный в упражнении 270, имеет для четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1CD_1$ одну и ту же форму.

Пусть теперь дан четырёхугольник $ABCD$, и требуется построить четырёхугольник, ему не равный, но имеющий те же стороны и ту же площадь.

Мы могли бы построить искомый четырёхугольник, строя точку C_1 , как указано в тексте задачи, затем точку B_1 , симметричную с B относительно прямой CC_1 , и закончить построение четырёхугольника $A_1B_1CD_1$, как было указано выше. Однако можно указать и более простое построение.

Чтобы прийти к этому новому построению, примем во внимание, что вершины A_0, B_0, C_0 и D_0 искомого четырёхугольника (в некотором определённом положении его на плоскости) можно рассматривать как точки, обратные вершинам данного в некоторой инверсии. Если O — полюс этой инверсии и k — её степень, то мы должны иметь $A_0B_0 = \frac{k \cdot BA}{OA \cdot OB} = AB$ и аналогичные равенства для остальных сторон. Из этих равенств непосредственно следует, что $k = OA \cdot OB = OB \cdot OC = OC \cdot OD = OD \cdot OA$, так что $OA = OC$ и $OB = OD$. Далее $OA_0 = \frac{k}{OA} = \frac{OA \cdot OB}{OA} = OB$, и таким же образом $OA_0 = OC_0 = OB = OD$ и $OB_0 = OD_0 = OA = OC$. Мы приходим к следующему построению:

Строим точку O , удовлетворяющую условиям $OA = OC$ и $OB = OD$, т. е. точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в серединах диагоналей четырёхугольника. На полупрямых OA и OC откладываем отрезки OA_0 и OC_0 , оба равные OB , а на полупрямых OB и OD — отрезки OB_0 и OD_0 , оба равные OA (черт. 687). Справедливость построения непосредственно вытекает из равенства четырёх пар треугольников OAB и OB_0A_0 , OBC и OC_0B_0 , и т. д.



Черт. 687.

Площадь четырёхугольника $ABCD$ (черт. 686) будет в силу соотношения (9) равна $\frac{1}{2} a \cdot CN$. Наибольшее возможное значение

площади четырёхугольника, имеющего данные стороны, отвечает поэтому наибольшему возможному значению отрезка CN . В свою очередь это значение CN соответствует наибольшему значению отрезка CC_1 , так как отрезок $C_1N = LM$ определяется по формуле (8) данными сторонами.

А отрезок CC_1 будет иметь наибольшее значение, если точки C, B и C_1 будут лежать на одной прямой.

Итак, площадь четырёхугольника с данными сторонами будет наибольшей, если точки C, B и C_1 лежат на одной прямой, т. е. если $\angle CBC_1 = \angle B + \angle D = 180^\circ$. Последнее равенство и показывает, что четырёхугольник $ABCD$, имеющий наибольшую площадь, — вписанный.

418а. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 685) $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $AC = e$; $BD = f$. Обозначим через E точку пересечения диагоналей, через L и M — проекции вершин B и D на прямую AC , через N — проекцию вершины B на прямую DM .

Из прямоугольного треугольника BDN имеем $f^2 = BN^2 + DN^2 = ML^2 + DN^2$, откуда, умножая почленно на $4e^2 = 4AC^2$, получим $4e^2 f^2 = (2AC \cdot ML)^2 + (2AC \cdot DN)^2$.

Преобразуем каждый из членов правой части этого равенства отдельно. На основании соотношения (1), выведенного в решении задачи 418, находим $2AC \cdot ML = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = a^2 + c^2 - b^2 - d^2$.

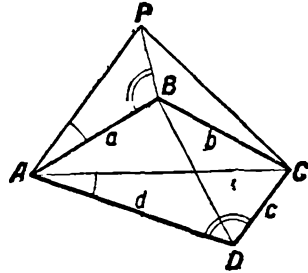
Далее имеем $2AC \cdot DN = 2AC \cdot DM + 2AC \cdot BL = 4$ пл. $ACD + 4$ пл. $ABC = 4S$. Подставляя эти выражения для $2AC \cdot ML$ и $2AC \cdot DN$ в предыдущее равенство, мы и получим первое из приведённых в тексте задачи соотношений.

Чтобы получить второе соотношение, заметим, что $\operatorname{tg} V = \operatorname{tg} \angle DBN = \frac{DN}{NB} = \frac{DN}{ML} = \frac{2AC \cdot DN}{2AC \cdot ML}$. Заменяя здесь числитель

и знаменатель их полученными выше значениями, мы и придём к данному в тексте задачи выражению для $\operatorname{tg} V$.

Переходим теперь к построению четырёхугольника $ABCD$ (черт. 688) по его сторонам и площади. Пусть P — такая точка плоскости, что треугольник ABP подобен ADC . Из подобия этих двух треугольников находим, что $BP = \frac{ac}{d}$ и

что $AC:AP = AD:AB = d:a$. Кроме того, $\angle CAP = \angle DAB$, так что треугольники ACP и ADB подобны, откуда $CP = \frac{ef}{d}$.



Черт. 688.

Задавшись теперь положением стороны BC на плоскости, можно построить точку P по её расстояниям $BP = \frac{ac}{d}$ и $CP = \frac{ef}{d}$ от точек B и C . При этом отрезок CP можно построить, пользуясь первым из доказанных выше соотношений, из которого следует, что

$$\left(\frac{ef}{d}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{d} + \frac{c^2}{d} - \frac{b^2}{d} - d \right)^2 + \left(\frac{2S}{d} \right)^2.$$

Далее можно определить положение вершины A , пользуясь двумя окружностями: 1) геометрическим местом точек A , удовлетворяющих выведенному выше соотношению $AC:AP = d:a$ (п. 116) и 2) окружностью с центром B и радиусом a .

Наконец, вершина D определяется её расстояниями $CD = c$ и $AD = d$ от точек C и A .

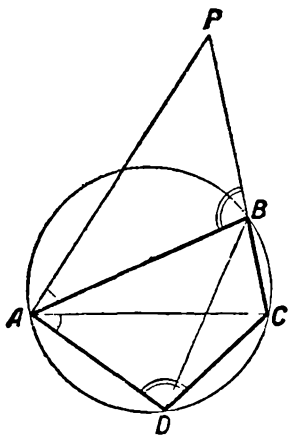
419. Пусть $ABCD$ — искомый вписанный четырёхугольник (черт. 689) и P — такая точка плоскости, что треугольник ABP подобен ADC . Точки P , B и S лежат на одной прямой, так как $\angle ABP + \angle ABC = \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. Кроме того, из подобия треугольников ABP и ADC следует, что $BP = \frac{AB \cdot CD}{AD}$, так что, задавшись положением

стороны BC , можно построить точку P . Далее из подобия треугольников ACP и ADB следует, что $AC:AP = AD:AB$. Таким образом, положение вершины A можно определить, пользуясь двумя окружностями: 1) геометрическим местом точек, расстояния которых от точек C и P относятся как $AD:AB$ (п. 116), и 2) окружностью с центром B и данным радиусом AB .

Наконец, вершина D определяется её расстояниями CD и AD от точек C и A .

419а. Пусть $ABCDE \dots$ — многоугольник с данным числом сторон и данным периметром, имеющий наибольшую площадь (существование такого многоугольника мы предполагаем). Так как соответствующая задача для треугольника разрешена нами полностью (задача 417), то мы можем предполагать, что данное число сторон равно по крайней мере четырём.

Рассмотрим четыре последовательные вершины A, B, C и D искомого многоугольника. Если бы эти вершины не лежали на одной окружности, то мы могли бы увеличить площадь данного многоугольника, не изменяя его периметра: для этого достаточно заменить четырёхугольник $ABCD$ вписанным четырёхугольником $AB'C'D$ с теми же сторонами (задача 418, последнее предложение). Следовательно, точки A, B, C и D лежат на окружности. Так как это рассуждение можно повторить для любых четырёх последовательных вершин, то все вершины многоугольника $ABCDE \dots$ лежат на одной окружности. Итак, *если среди всех многоугольников с данным числом сторон и данным периметром существует многоугольник, имеющий наибольшую площадь, то этот многоугольник может быть вписан в окружность.*



Черт. 689.

Предположим теперь, что две смежные стороны многоугольника, хотя бы AB и BC , не равны между собой. В таком случае мы можем заменить треугольник ABC равнобедренным треугольником с тем же периметром, но с большей площадью (задача 416). Отсюда следует, что все стороны искомого многоугольника, имеющего наибольшую площадь, должны быть равны между собой, а так как этот многоугольник, кроме того, можно вписать в окружность, то он правильный.

Если мы имеем правильный и неправильный многоугольники с одним и тем же числом сторон и одним и тем же периметром, то отношение $\frac{S}{p^2}$ для правильного многоугольника будет больше, чем для неправильного,

так как площадь первого больше площади второго. Но отношение $\frac{S}{p^2}$ для правильного многоугольника не зависит от его размеров при заданном числе сторон, так как два правильных многоугольника с одним и тем же числом сторон подобны между собой.

Примечание. При решении этой задачи мы предполагали существование многоугольника, имеющего наибольшую площадь среди всех много-

угольников с данным числом сторон и данным периметром (ср. примечание к первому решению задачи 366). Доказательство, свободное от этого предположения, читатель найдёт, например, в книге Д. А. Крыжановского: «Изопериметры», М.-Л., 1938.

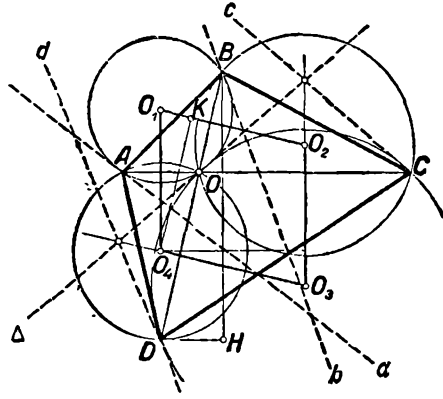
420. Рассмотрим окружность, имеющую длину C и некоторую замкнутую линию, имеющую ту же длину. Впишем в окружность правильный n -угольник и обозначим через S_n и P_n его площадь и периметр. В замкнутую линию впишем какой-либо многоугольник с n сторонами и обозначим через s_n и p_n его площадь и периметр. В силу задачи 419а будем иметь при любом n неравенство

$$\frac{S_n}{P_n^2} \geq \frac{s_n}{p_n^2}.$$

Если мы будем неограниченно увеличивать число сторон n , выбирая вершины n -угольника, вписанного в огличную от окружности замкнутую линию, так, чтобы каждая его сторона стремилась к нулю, то мы будем иметь: $P_n \rightarrow C$, $p_n \rightarrow C$, $S_n \rightarrow S$, $s_n \rightarrow s$, где через S и s обозначены площади, ограниченные окружностью и выбранной кривой, и из предыдущего неравенства следует, что $\frac{S}{C^2} \geq$

$$\geq \frac{s}{C^2}, \text{ откуда } S \geq s. \text{ Итак, среди}$$

всех замкнутых линий, имеющих заданную длину, нет ни одной, которая ограничивала бы площадь большую, чем окружность, имеющая данную длину.



Черт. 690.

Примечание. Осталось ещё не доказанным, что окружность есть единственная кривая, ограничивающая наибольшую площадь среди всех кривых, имеющих заданную длину. В самом деле, ввиду соотношения $S \geq s$ мыслимо, что кроме окружности существуют среди замкнутых линий данной длины C и другие кривые, ограничивающие ту же площадь S (это будет, если $S = s$). Свойство окружности ограничивать наибольшую площадь при заданной длине (так называемое изопериметрическое свойство) весьма подробно рассмотрено в книге Крыжановского (см. ссылку в решении задачи 419а). В частности, там доказана единственность кривой наибольшей площади.

420а. Прямые O_1O_4 и O_2O_3 (черт. 690) параллельны друг другу, так как они представляют собой перпендикуляры, восстановленные в серединах отрезков OA и OC . По такой же причине прямая O_1O_2 параллельна O_3O_4 . Следовательно, точки O_1 , O_2 , O_3 и O_4 образуют параллелограмм P .

1°. Длины диагоналей четырёхугольника равны удвоенным высотам параллелограмма, так как точки A и C симметричны с O относительно

двух противоположных сторон параллелограмма, и то же относится к точкам B и D . Если прямая BH перпендикулярна к AC , а DH параллельна AC , то $пл. ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BH$ (сравнить решение задачи 418а).

Пусть O_4K — высота параллелограмма, опущенная из O_4 на O_1O_2 . Прямоугольные треугольники BDH и O_4O_1K подобны, так как их острые углы DBH и O_1O_4K имеют соответственно параллельные стороны, откуда $BH = \frac{O_4K \cdot BD}{O_1O_4}$. Таким образом, задание параллелограмма P определяет AC и BH , а потому и площадь четырёхугольника $ABCD$, равную $\frac{1}{2} AC \cdot BH$.

2°. Так как точки A и O симметричны относительно стороны O_1O_4 параллелограмма P , то при перемещении точки O по прямой Δ точка A описывает прямую a , симметричную с Δ относительно O_1O_4 . Точно так же точки B , C и D описывают при этом прямые b , c , d . Прямая c получается из прямой a с помощью двух последовательных симметрий — относительно O_1O_4 и относительно O_2O_3 ; так как прямые O_1O_4 и O_2O_3 параллельны, то последовательность этих двух симметрий даёт поступательное перемещение, и прямые a и c параллельны. Точно так же покажем, что прямые b и d параллельны. Таким образом, прямые a , b , c и d образуют параллелограмм P' .

Если прямая Δ перемещается параллельно самой себе, то прямые a , b , c и d , очевидно, сохраняют своё направление. Так как прямые a и c получаются одна из другой с помощью поступательного перемещения, перпендикулярного к прямым O_1O_4 и O_2O_3 и по величине равного удвоенному расстоянию между ними, то расстояние между прямыми a и c не изменяется при параллельном перемещении прямой Δ . Не изменяется при этом по аналогичным соображениям и расстояние между прямыми b и d . Отсюда непосредственно следует, что при перемещении прямой Δ параллельно самой себе параллелограмм P' испытывает лишь поступательное перемещение.

При вращении прямой Δ углы параллелограмма P' не изменяются, так как при повороте прямой Δ на некоторый угол около произвольной точки прямые a и b обе поворачиваются на тот же самый угол в одном и том же направлении, а потому угол между ними не изменяется.

Так как при перемещении прямой Δ параллельно самой себе площадь параллелограмма P' не изменяется, то для отыскания наибольшей площади параллелограмма достаточно рассмотреть вращение прямой Δ около некоторой неподвижной точки, например около центра M параллелограмма P (черт. 691, на котором параллелограмм P не показан). При этом прямые a , b , c , d будут вращаться соответственно около точек α , β , γ , δ , симметричных с M относительно сторон параллелограмма P . Так как точки α , β , γ и δ сами образуют параллелограмм, то мы приходим к следующей задаче: описать около параллелограмма $\alpha\beta\gamma\delta$ параллелограмм $UVWT$, углы которого имеют заданную величину (напомним, что

углы этого параллелограмма не изменяются при вращении прямой Δ), и притом так, чтобы его площадь была наибольшей. Вершина U перемещается при этом по окружности, проходящей через точки α и β . Очевидно, что $\text{пл. } UVWT = 2 \text{ пл. } \alpha\gamma VU$ или (в силу упр. 297) $\text{пл. } UVWT = 2 \cdot \alpha\gamma \cdot SL$, где SL — перпендикуляр, опущенный из середины S стороны UV на прямую $\alpha\gamma$. Но $2SL = UN$, где UN — перпендикуляр из точки U на прямую $\alpha\gamma$. Итак, $\text{пл. } UVWT = \alpha\gamma \cdot UN$. Но отрезок UN будет иметь наибольшее значение, когда точка U выбрана так, чтобы отрезок UN совпадал с диаметром окружности $\alpha\beta U$, по которой перемещается точка U (как изображено на чертеже).

Определив, таким образом, то положение точки U , для которого площадь параллелограмма P' будет наибольшей, легко построить и соответствующее положение прямой Δ . Действительно, как было указано выше, прямая Δ симметрична с прямой α (т. е. с прямой $U\alpha$) относительно $O_1 O_4$.

3°. Пусть дан параллелограмм P и углы A и C (черт. 690). Диагонали AC и BD определены при этом по величине и направлению. Геометрическое место каждой из вершин A и C при произвольно расположенной на плоскости диагонали BD состоит из дуг окружностей. Определение положения диагонали AC непосредственно сводится к упражнению 75.

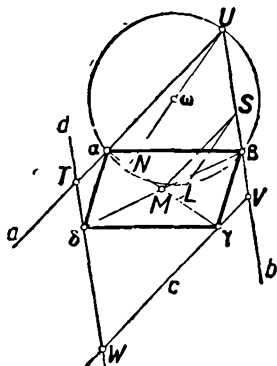
Пусть теперь даны параллелограмм P и углы A и B . Диагонали AC и BD опять определены по величине и направлению; следовательно, можно построить параллелограмм (см. упр. 36 и черт. 281), имеющий своими вершинами середины сторон искомого четырёхугольника: стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырёхугольника и равны их половинам. Геометрическое место каждой из вершин A и B будет дугой окружности. Через вершину построенного параллелограмма остаётся провести прямую так, чтобы отрезок её AB , заключённый между двумя построенными окружностями, делился в этой вершине пополам. Эта задача решается, как указано в решении упражнения 165.

Если даны параллелограмм P и отношения $AB:AD$ и $CB:CD$, (черт. 690), то, выбрав произвольно положение диагонали BD , получим в качестве геометрического места каждой из точек A и C окружность (п. 116), и задача снова сводится к упражнению 75.

421. Данный четырёхугольник $MNPQ$ и четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$, образованные соответственно биссектрисами его внешних и внутренних углов, образуют ту же фигуру, которая нам встречалась при решении задачи 362а (черт. 590). Мы имели там соотношение

$$R \cdot (MN + NP + PQ + QM) = AC \cdot BD, \quad (4)$$

где R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.



Черт. 691.

Далее аналогично выведенному там соотношению (3) имеем $2R' \cdot MN = B'M \cdot C'D' + B'N \cdot D'A'$; $2R' \cdot NP = C'N \cdot D'A' + C'P \cdot A'B'$; $2R' \cdot PQ = D'P \cdot A'B' + D'Q \cdot B'C'$; $2R' \cdot QM = A'Q \cdot B'C' + A'M \cdot C'D'$, где R' — радиус окружности, описанной около $A'B'C'D'$. Из полученных равенств имеем $2R' \cdot (MN + NP + PQ + QM) = A'B' \cdot (D'P + C'P) + B'C' \cdot (D'Q + A'Q) + C'D' \cdot (B'M + A'M) + D'A' \cdot (B'N + C'N) = 2(A'B' \cdot C'D' + B'C' \cdot D'A') = 2A'C' \cdot B'D'$. Это соотношение вместе с формулой (4) приводит к равенству

$$\frac{R(MN + NP + PQ + QM)}{R'(MN + NP + PQ + QM)} = \frac{AC \cdot BD}{A'C' \cdot B'D'}. \quad (5)$$

С другой стороны, в силу п. 251 (примечание), имеем $4R \cdot \text{пл. } ABC = AB \cdot BC \cdot AC$; $4R' \cdot \text{пл. } A'B'C' = A'B' \cdot B'C' \cdot A'C'$, и потому

$$\frac{R}{R'} \cdot \frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A'B'C'} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{A'B' \cdot B'C' \cdot A'C'};$$

$$\text{но из п. 256 имеем } \frac{\text{пл. } ABC}{AB \cdot BC} = \frac{\text{пл. } A'B'C'}{A'B' \cdot B'C'}, \text{ так что } R:R' =$$

$= AC:A'C'$. Таким же путём найдём, что $R:R' = BD:B'D'$. Заменяя в равенстве (5) каждое из отношений $AC:A'C'$ и $BD:B'D'$ через $R:R'$, получим искомое соотношение.

421а. 1°. Пусть E и F — точки пересечения двух пар противоположных сторон AB, CD и BC, AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ (черт. 692), M и N — середины его диагоналей, O — точка пересечения биссектрисы угла AED с прямой MN .

Отрезки EM и EN являются соответственными медианами двух подобных треугольников EAC и BED , и потому

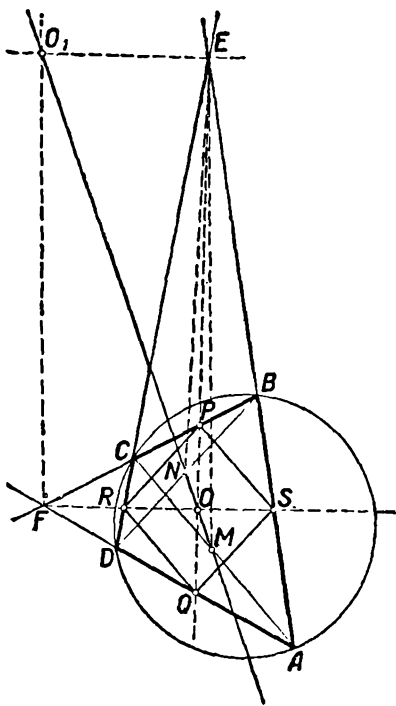
$$EM:EN = AC:BD, \quad (1)$$

и $\angle AEM = \angle DEN$. Из последнего равенства следует, что EO есть в то же время и биссектриса угла MEN , так что

$$EM:EN = MO:ON. \quad (2)$$

Из отношений (1) и (2) имеем:

$$MO:ON = AC:BD. \quad (3)$$



Черт. 692.

Итак, биссектриса угла AED делит отрезок MN на части, пропорциональные диагоналям четырёхугольника.

Таким же образом докажем, что и биссектриса угла AFB делит отрезок MN в том же отношении. Отсюда следует, что биссектрисы углов AED и AFB пересекаются в точке O прямой MN .

2°. В 1° мы уже доказали, что биссектриса угла AED есть и биссектриса угла MEN . То же имеет, очевидно, место и для биссектрисы угла AFB .

3°. Если прямая EO пересекает стороны BC и AD в точках P и Q , а прямая FO — стороны CD и AB в точках R и S , то мы имеем (EP — биссектриса треугольника EBC) $CP:PB = EC:EB$. Но $EC:EB = AC:BD$ в силу подобия треугольников EAC и EDB , так что $CP:PB = AC:BD$. Аналогично найдём, что $AS:SB = AC:BD$. Отсюда следует, что прямая PS параллельна AC , так что

$\frac{PS}{AC} = \frac{BP}{BP + PC} = \frac{BD}{AC + BD}$. Итак, $PS = \frac{AC \cdot BD}{AC + BD}$. То же выражение мы получим и для каждого из отрезков SQ , QR и RP . Таким образом четырёхугольник $PRQS$ есть ромб, сторона которого имеет указанную в тексте задачи величину.

4°. Назовём для краткости «внешними углами при точках E и F » углы, смежные с углами AED и AFB . В таком случае мы будем иметь следующие предложения:

а) Биссектрисы внешних углов при точках E и F пересекаются на прямой, соединяющей середины диагоналей данного четырёхугольника, и делят внешним образом отрезок этой прямой между серединами диагоналей в отношении, равном отношению диагоналей.

Если биссектрисы внешних углов при точках E и F пересекаются в точке O_1 , то мы имеем, следовательно,

$$MO_1:NO_1 = AC:BD. \quad (4)$$

б) Биссектрисы внешних углов при точках E и F будут в то же время и биссектрисами углов, смежных с теми углами, под которыми отрезок, соединяющий середины диагоналей, виден из точек E и F .

с) Биссектрисы внешних углов при точках E и F пересекают продолжения сторон данного четырёхугольника в четырёх точках, которые будут вершинами ромба. Стороны этого ромба параллельны диагоналям четырёхугольника; их длина есть четвёртая пропорциональная к этим диагоналям и к их разности (ромб этот не показан на чертеже).

Доказательства предложений а), б) и с) вполне аналогичны приведённым выше в 1°, 2° и 3°.

5°. Прямые EO и FO пересекаются в точке O под прямым углом как диагонали ромба $PRQS$. Следовательно, $EOFO_1$ — прямоугольник, и потому $EF = OO_1$. Мы имели выше равенства (3) и (4), из которых

следует, что $\frac{ON}{MN} = \frac{BD}{AC + BD}$ и $\frac{NO_1}{MN} = \frac{BD}{AC - BD}$, так что $\frac{EF}{MN} =$

$$= \frac{OO_1}{MN} = \frac{ON + NO_1}{MN} = \frac{BD}{AC + BD} + \frac{BD}{AC - BD} = \frac{2AC \cdot BD}{AC^2 - BD^2}. \text{ Итак,}$$

отрезок EF относится к отрезку MN , соединяющему середины диагоналей, как удвоенное произведение последних к разности их квадратов.

Равенство $\frac{EF}{MN} = \frac{2AC \cdot BD}{AC^2 - BD^2}$ могло бы служить для вычисления отрезка EF по сторонам четырёхугольника. Действительно, диагонали AC и BD можно найти, пользуясь п. 240а, а отрезок MN — пользуясь упражнением 139. Однако мы значительно быстрее придём к цели следующим образом:

Для вычисления длины отрезка EF заметим прежде всего, что точки E и F сопряжены относительно окружности, так как поляра точки E проходит через F согласно п. 211. Следовательно, квадрат отрезка EF равняется сумме степеней точек E и F относительно окружности (см. решение упр. 237), т. е.

$$EF^2 = EA \cdot EB + FA \cdot FD. \quad (5)$$

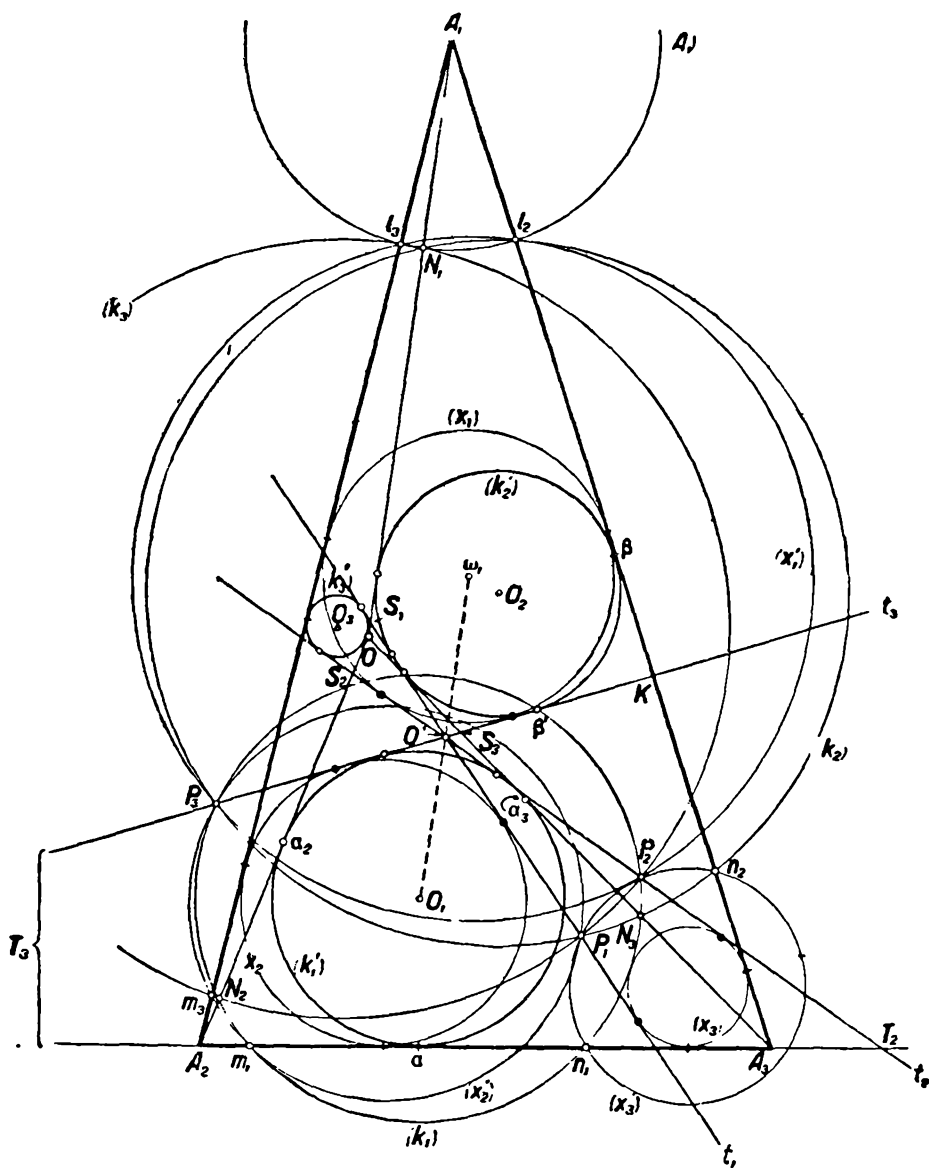
Для сокращения выкладок положим $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$. Из подобия треугольников EAD и ECB найдём: $EA:EC = ED:EB = d:b$; кроме того, $EA - EB = a$; $ED - EC = c$. Решая эти уравнения, мы найдём $EA = \frac{d(ad + bc)}{d^2 - b^2}$; $EB = \frac{b(ab + cd)}{d^2 - b^2}$, и, следовательно, $EA \cdot EB = \frac{bd(ab + cd)(ad + bc)}{(b^2 - d^2)^2}$. Аналогичным путём найдём, что $FA \cdot FD = \frac{ac(ab + cd)(ad + bc)}{(a^2 - c^2)^2}$. Подставляя найденные значения $EA \cdot EB$ и $FA \cdot FD$ в равенство (5), получим окончательно

$$EF^2 = (ab + cd)(ad + bc) \left[\frac{ac}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2 - d^2)^2} \right].$$

422. 1°. Пусть произвольная окружность (k_1) , концентрическая с (k_1') , пересекает прямые OA_2 и OA_3 соответственно в точках N_2 и N_3 (черт. 693). Если обозначить через a_2 и a_3 точки касания окружности (k_1') с прямыми OA_2 и OA_3 , то отрезки Oa_2 и Oa_3 будут равны как касательные к окружности из одной точки. Далее из равенства прямоугольных треугольников $O_1a_2N_2$ и $O_1a_3N_3$, где O_1 — общий центр окружностей (k_1') и (k_1) , имеем $a_2N_2 = a_3N_3$. Отсюда $ON_2 = ON_3$, так как $Oa_2 = Oa_3$.

Строим теперь окружность (k_2) , концентрическую с (k_2') и проходящую через точку N_3 . Для одной из точек пересечения N_1 окружности (k_2) с прямой OA_1 будем иметь аналогично $ON_3 = ON_1$. Таким образом, имеем $ON_1 = ON_2$, и потому окружность (k_3) , концентрическая с (k_3') и проходящая через точку N_2 , проходит и через точку N_1 .

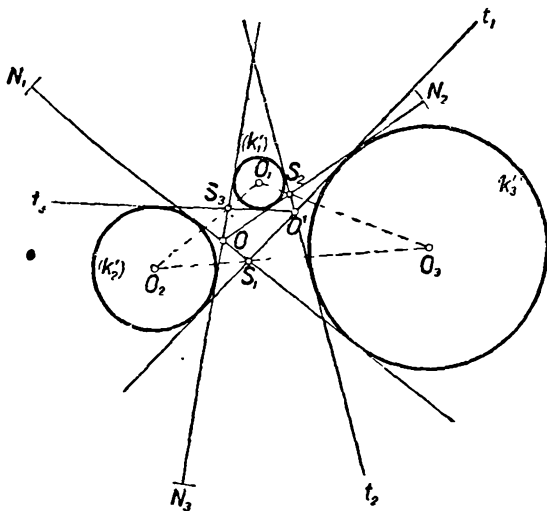
2°. Если a и a_2 — точки касания окружности (k_1') с прямыми A_2A_3 и OA_2 , то $am_1 = a_2N_2$ и $A_2a = A_2a_2$, откуда $A_2m_1 = A_2N_2$. Точно так же $A_2m_3 = A_2N_2$ и т. д.



Черт. 693.

3°. Точки N_1 и P_1 пересечения окружностей (k_2) и (k_3) симметричны относительно линии центров O_2O_3 . Так как точка N_1 лежит на внутренней общей касательной окружностей (k_2') и (k_3') , то и точка P_1 , с ней симметричная, лежит на внутренней общей касательной t_1 окружностей (k_2') и (k_3') , симметричной с OA_1 относительно прямой O_2O_3 . Аналогично точки P_2 и P_3 лежат соответственно на прямых t_2 и t_3 .

Пусть теперь O' — точка пересечения прямых t_2 и t_3 (черт. 694) и t_1' — касательная из точки O' к окружности (k_2') . Далее пусть S_1 — точка пересечения прямых ON_1 и t_1' , S_2 — точка пересечения прямых



Черт. 694.

ON_2 и t_2 , S_3 — точка пересечения прямых ON_3 и t_3 . Четырёхугольник $OS_2O'S_3$ описан около окружности (k_1') ; в силу решения упражнения 87 имеем $OS_2 + O'S_2 = OS_3 + O'S_3$. Четырёхугольник $OS_3O'S_1$ описан около окружности (k_3') , и следовательно, $OS_3 + O'S_3 = OS_1 + O'S_1$. Из двух полученных равенств имеем $OS_1 + O'S_1 = OS_2 + O'S_2$, так что четырёхугольник $OS_1O'S_2$ — описанный. Так как три его стороны — OS_1 , $O'S_2$ и OS_2 — касаются окружности (k_3') , то и четвёртая его сторона $O'S_1$, т. е. t_1' , касается той же окружности. Отсюда следует, что прямая t_1' совпадает с t_1 , так что прямые t_1 , t_2 и t_3 проходят через одну точку O' .

Отрезки OS_3 и $O'S_2$ видны из центра O_1 окружности (k_1') под равными углами как отрезки касательных к этой окружности, заключённые между касательными ON_2 и t_3 (упр. 89). Иначе говоря, прямые O_1O и O_1O' образуют равные углы O_2O_1O и O_3O_1O' соответственно со сторонами O_1O_2 и O_1O_3 треугольника $O_1O_2O_3$; следовательно, прямые O_1O и O_1O' образуют равные углы и с биссектрисой угла $O_2O_1O_3$. Точно так же докажем, что прямые O_2O и O_2O' одинаково наклонены

к биссектрисе угла $O_3O_2O_1$, а прямые O_3O и O_3O' — к биссектрисе угла $O_1O_3O_2$. Отсюда и следует, что точки O и O' получаются одна из другой с помощью построения задачи 197, применённого к треугольнику $O_1O_2O_3$.

4°. Пусть (A_1) — окружность с центром A_1 , проходящая через точки I_2 , I_3 и N_1 , равноудалённые от A_1 в силу 2° (черт. 693). Так как $ON_1 = ON_2 = ON_3$ в силу 1° и точка N_1 лежит на прямой A_1O , то окружность (A_1) касается окружности, описанной около треугольника $N_1N_2N_3$. Поэтому можно применить задачу 345 (сравнить примечание к решению этой задачи) к треугольнику $N_1N_2N_3$ и окружностям (k_1) , (k_2) , (k_3) и (A_1) . Вторые точки пересечения этих окружностей P_2 , P_3 , I_2 и I_3 также будут лежать на одной окружности, которую мы и обозначим через (x_1') .

Эта окружность пересекает прямые A_1A_2 и A_1A_3 под равными углами, так как внешние отрезки секущих A_1I_2 и A_1I_3 равны, а следовательно, равны и хорды, отсекаемые окружностью (x_1') на прямых A_1A_2 и A_1A_3 .

Если β и β' — точки касания окружности (k_2') с прямыми A_1A_3 и t_3 , то $K\beta = K\beta'$, где K — точка пересечения прямых A_1A_3 и t_3 . Кроме того, $\beta I_2 = \beta' P_3$ как отрезки касательных к окружности (k_2') , ограниченные концентрической с ней окружностью (k_2) (треугольники $O_2\beta I_2$ и $O_2\beta' P_3$ равны). Отсюда следует, что $KI_2 = KP_3$ и, следовательно, окружность (x_1') пересекает под равными углами прямые A_1A_3 и t_3 . По той же причине окружность (x_1') пересекает под равными углами прямые A_1A_2 и t_2 .

Итак, окружность (x_1') , проходящая через точки P_2 , P_3 , I_2 и I_3 , пересекает под равными углами прямые A_1A_2 и A_1A_3 , далее прямые A_1A_3 и t_3 и, наконец, прямые A_1A_2 и t_2 . Следовательно, окружность (x_1') пересекает под равными углами все эти четыре прямые.

Следовательно, центр ω_1 окружности (x_1') равноудалён от прямых A_1A_2 , A_1A_3 , t_2 и t_3 и потому лежит на пересечении биссектрисы угла $A_2A_1A_3$ с биссектрисой угла между прямыми t_2 и t_3 , т. е. с прямой $O'O_1$. Так как прямые t_2 и t_3 не зависят от выбора радиусов окружностей (k_1) , (k_2) и (k_3) , то отсюда и следует, что точка ω_1 не зависит от выбора радиусов окружностей (k_1) , (k_2) и (k_3) и что прямая $O_1\omega_1$ проходит через O' .

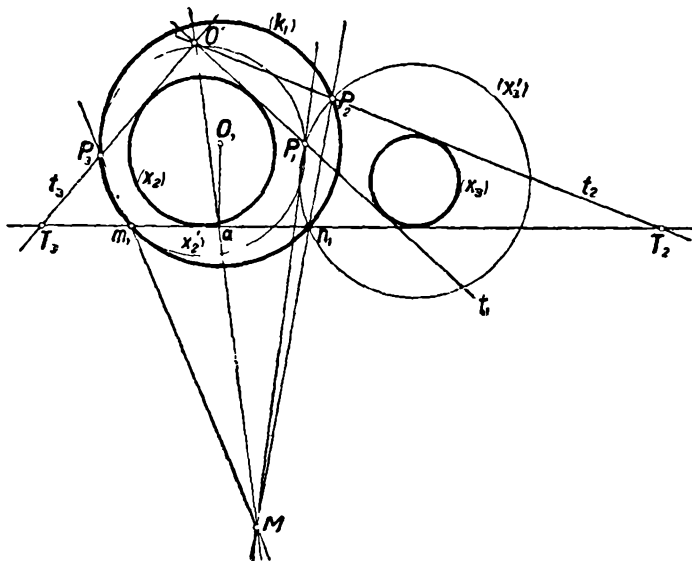
Аналогично определяются окружности (x_2') и (x_3') и их центры ω_2 и ω_3 .

Так как прямые A_1A_2 , A_1A_3 , t_2 и t_3 равноудалены от центра ω_1 окружности (x_1') , то существует окружность (x_1) , концентрическая с (x_1') и касающаяся всех четырёх прямых. Таким же образом получаются и окружности (x_2) и (x_3) .

5°. Прямая m_1P_3 есть радикальная ось окружностей (k_1) и (x_2') , прямая n_1P_2 — окружностей (k_1) и (x_3') . Следовательно, точка пересечения M этих прямых (черт. 695) есть радикальный центр окружностей (k_1) , (x_2') и (x_3') (п. 139) и потому лежит на радикальной оси окружностей (x_2') и (x_3') .

Пусть теперь α — точка касания окружности (k_1') с прямой A_2A_3 , T_2 и T_3 — точки пересечения прямых t_2 и t_3 с той же самой прямой A_2A_3 , M' — точка пересечения прямых n_1P_2 и $O'\alpha$. Покажем, что точка M' совпадает с M .

Применим теорему п. 192 к треугольнику $\alpha O'T_2$ и секущей n_1P_2 . Получим $\frac{P_2O'}{P_2T_2} \cdot \frac{n_1T_2}{n_1\alpha} \cdot \frac{M'\alpha}{M'O'} = 1$. Но $T_2P_2 = T_2n_1$ как секущие окружности (x_3') , равноудалённые от её центра, так что $M'\alpha : M'O' = n_1\alpha : P_2O'$. Применяя ту же теорему п. 192 к треугольнику $\alpha O'T_3$ и секущей m_1P_3 ,



Черт. 695.

найдем аналогично, что прямая m_1P_3 делит отрезок $\alpha O'$ внешним образом в отношении $m_1\alpha : P_3O'$. Но $m_1\alpha = n_1\alpha$ (так как $O_1\alpha$ — перпендикуляр к m_1n_1) и $O'P_2 = O'P_3$, так как прямые $O'P_2$ и $O'P_3$ (т. е. t_2 и t_3) касаются окружности (k_1') и потому равноудалены от центра O_1 окружности k_1 (сравнить упр. 52). Таким образом, прямые m_1P_3 и n_1P_2 делят отрезок $\alpha O'$ в одном и том же отношении и, следовательно, пересекаются в точке M' прямой $\alpha O'$. Следовательно, точка M совпадает с M' .

Итак, точка пересечения M прямых m_1P_3 и n_1P_2 лежит на прямой, соединяющей точку касания α окружности (k_1') и прямой A_2A_3 с точкой пересечения O' прямых t_1, t_2 и t_3 , как бы ни были выбраны радиусы окружностей $(k_1), (k_2)$ и (k_3) .

Пусть теперь окружности $(x_2), (x_3)$ касаются друг друга; при этом прямая t_1 будет общей касательной в их точке касания. Так как одна из точек пересечения P_1 окружностей (x_2') и (x_3') , концентрических с (x_2) и (x_3) , лежит на прямой t_1 , то в этом случае и вторая точка их

пересечения будет лежать на прямой t_1 . Прямая t_1 как радикальная ось окружностей (x_2') и (x_3') будет проходить через точку пересечения M радикальной оси m_1P_3 окружностей (k_1) и (x_2') с радикальной осью n_1P_2 окружностей (k_1) и (x_3') . Таким образом прямая t_1 будет совпадать с $O'M$, так как она проходит через точку O' .

Обратно, если прямая t_1 совпадает с $O'M$, то она проходит через радикальный центр M окружностей (k_1) , (x_2') и (x_3') . Так как она проходит через одну из точек пересечения P_1 окружностей (x_2') и (x_3') , то она будет их радикальной осью и потому пройдёт через вторую точку их пересечения. Окружности (x_2) и (x_3) касаются при этом прямой t_1 на линии центров окружностей (x_2') и (x_3') и, следовательно, касаются друг друга.

УКАЗАТЕЛЬ СОДЕРЖАНИЯ ЗАДАЧ.

(Числа обозначают номера задач.)

Биссектрисы (угла, треугольника, четырёхугольника): 2, 4, 17, 18, 24—26, 38, 66, 86, 107, 143, 144, 230, 361, 361а, 3/8, 421. См. ещё Окружность вневписанная, вписанная, описанная треугольника.

Высоты треугольника: 17, 19, 20, 38, 70, 71, 101, 102, 136, 158, 197, 350. Гармонизм: 125, 217, 219а, 239.

Геометрическое место: 31, 48, 53, 57, 60, 124, 133, 134, 141, 142, 149, 193, 238, 246, 257.

Деление отрезка: 1, 78, 173.

Деление площадей: 293, 295, 303, 304, 321—323, 327, 328.

Длина окружности (приближённые построения): 188, 189.

Знаки отрезков, площадей, углов: 324, 344, 347.

Инверсия: 245, 247—253, 270, 270а, 273, 275, 387, 338, 389, 390, 396.

Инверсор: 271, 271а.

Касание окружностей: 58, 59, 91, 112, 187, 266, 267, 393, 394, 398—400. См. ещё Построение окружности.

Касательные к окружности: 89, 90, 93, 104, 135; — общие к двум окружностям: 200, 347.

Медианы треугольника: 7, 11, 12, 17, 18, 29, 33, 39, 137, 144, 145, 326.

См. ещё Центр тяжести треугольника.

Менелая теорема: 223.

Многоугольник вообще: 8а, 22, 117, 194; — вписанный (в том числе и треугольник вписанный): 115, 253а, 367, 391; — правильный: 178—184, 298, 331, 419а. См. ещё Четырёхугольник.

Наибольшее и наименьшее: 13, 15, 32, 40, 54, 56, 174—176, 219, 268, 291, 319, 320, 331, 362—364, 366, 367, 415—418, 419а, 420.

Окружность — вневписанная, вписанная и описанная треугольника: 70, 72, 90а, 101а, 103, 108, 158, 228, 299, 300, 357, 377, 379, 411; — девяти точек: 101, 374, 376; — сопряжённая с треугольником: 253, 284. См. ещё Касание, Касательные, Пересечение, Построение.

Ось радикальная: 154, 177, 220, 245, 256, 272, 408.

Параллелограмм: 26—28, 41, 109, 132, 138, 234, 290, 296.

Паскаля теорема: 279.

Перемещения: 92, 93, 94.

Пересечение окружностей: 65, 69, 110, 128, 256, 346, 355, 395.

Построение окружностей: 73, 74, 176, 177, 209, 258, 259, 263—265, 280, 401—403а; — треугольника: 77—85, 103а, 169—171, 203, 204, 332, 415, 416; — четырёхугольника: 118, 122, 213, 319, 320, 333, 351, 418—419.

Равносоставленность: 334—337.

Симсона прямая: 72, 373, 374.

Стьюарта теорема: 218.

Точка наименьшего расстояния: 10, 105, 363, 364.

Точки предельные двух окружностей: 152, 219, 241, 278.

Точки изогонально-сопряжённые: 197, 365.

Трапеция: 34, 129, 130, 205, 221, 292, 297. См. ещё Построение четырёхугольника.

Треугольники — равнобедренный: 5, 19, 39, 42, 361; — прямоугольный: 16, 30, 136, 309, 310; — равносторонний: 42, 99, 100, 269, 287. См. ещё Биссектрисы, Высоты, Медианы, Многоугольник вписанный, Окружность, Построение, Центр тяжести.

Фигуры — гомотетичные: 159; — подобные: 161, 162, 212, 214, 215, 380; — построенные на сторонах многоугольника или треугольника: 45, 105, 211, 309—311, 363, 381; — равные: 92, 93, 95.

Центр подобия: 220, 272; — тяжести треугольника: 37, 131, 140, 158, 221, 295, 365.

Четырёхсторонник полный: 106, 240, 371, 371а, 373.

Четырёхугольник вообще: 9, 10, 25, 36, 66, 123, 139, 270, 293, 294, 372, 418а, 421; — вписанный: 107, 147, 239, 282, 286, 345, 362а, 387, 407, 421а; — описанный: 87, 198, 239, 282, 384, 385. См. ещё Параллелограмм, Построение, Трапеция.